Diziler, Polinomlar, Güçlerin Toplamı, Asallar vs

Tosun Terzioğlu* / *tosun@sabanciuniv.edu.tr*

Bu yazıda dizileri kullanarak birbirinden ilginç ve birbirinden bağımsız sonuçlar kanıtlayacağız.

I. Diziler. Bir ***dizi***,

$$a_0, a_1, a_2, ...$$

ya da

$$(a_n)_n$$

yazılımıyla gösterilir. Bu yazıda hep sayı dizilerinden söz edeceğiz. Örneğin,

$$1, 3, 5, 7, ...$$

bir dizidir. Bu dizinin tek sayılardan oluştuğunu, herhangi bir açıklamaya gereksinim duymadan, ilk dört terimine bakar bakmaz anlıyoruz, daha doğrusu hissedip tahmin ediyoruz, çünkü aslında 1, 3, 5, 7 sayılarından sonra 9 gelecek diye bir kural yok... İlk terimleri 1, 3, 5, 7 olan dizimizin sonraki üç terimi 9, 11, 13 yerine pekâlâ 2, ϕ, 89 olabilir. Bu yüzden bu diziyi

$$(2n + 1)_n$$

olarak göstermek ya da "genel terimi $a_n = 2n + 1$ olan dizi"den söz etmek daha doğru olur.

Terimleri a_n olan $(a_n)_n$ dizisini a olarak göstermek pratikte yararlı olabilir: $a = (a_n)_n$.

$a = (a_n)_n$ dizisinde, a_n sayısı a dizisinin ***n*'inci terimi** olarak adlandırılır. İlk terimimiz hep a_0 olacak, yani dizilerimiz hep sıfırıncı terimden başlayacak. Örneğin a_{10}, dizinin onuncu terimidir. 0, 1, 2, 3, ... tamsayılar dizisinin n'inci terimi n iken, 1, 3, 5, 7, ... tek sayılar dizisinin n'inci terimi $2n + 1$'dir.

Genel terimi sırasıyla

$$a_n = 2n + 1$$
$$b_n = n(n + 1)$$

ve

$$c_n = 2^n$$

olan a, b, c dizilerin ilk birkaç terimini yazalım:

a : 1, 3, 5, 7, 9, ...
b : 0, 2, 6, 12, 20, ...
c : 1, 2, 4, 8, 16, ...

Bazen de diziler tümevarımsal bir formülle belirlenir, yani her terimin daha önceki terimlere göre nasıl bulunduğunun kuralı verilir. İşte buna üç örnek:

$$d_n = d_{n41} + 2,$$
$$e_n = e_{n41}^2,$$
$$f_n = f_{n41} + f_{n42}.$$

Dizi bu yöntemle tanımlandığında, dizinin tüm terimlerinin belirlenmesi için dizinin ilk birkaç terimi verilmeli. Örneğin ilk iki dizide 0'ıncı (yani ilk!) terimler olan d_0 ve e_0 verilmişse, dizinin diğer terimleri formüller yardımıyla teker teker bulunabilir. Birinci örnekte d_0'ı bilirsek

$$d_1 = d_0 + 2$$
$$d_2 = d_1 + 2 = d_0 + 4$$

olur ve tümevarımla tüm terimleri teker teker elde edebiliriz; işte o dizi:

$$d_0, d_0 + 2, d_0 + 4, d_0 + 6, d_0 + 8, ...$$

Eğer $d_0 = 0$ alırsak dizimiz

$$0, 2, 4, 6, ...$$

olur. Ama eğer $d_0 = 1$ alırsak

$$1, 3, 5, 7, ...$$

teksayılar dizisini elde ederiz. Uzun lafın kısası,

$$d_n = d_{n41} + 2$$

ilişkisiyle verilen dizi birinci terimine göre değişir.

İkinci örnekte $e_0 = 0$ veya $e_0 = 1$ alırsak

$$0, 0, 0, ...$$

ve

$$1, 1, 1, ...$$

sabit dizilerini buluruz. Ama $e_0 = 2$ olursa bu kez çok hızlı artan 2, 4, 16, 256, ... dizisi bulunur.

Üçüncü örnekte dizinin belirlenmesi için sadece birinci terimin verilmiş olması yetmez, bu sefer ilk iki terime ihtiyacımız var; bu dizide ancak f_0 ve f_1 verilmişse diğer terimleri bulabiliriz. Örnek olarak $f_0 = f_1 = 1$ alalım. Bu takdirde ilk birkaç terimi

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

olan meşhur ***Fibonacci dizisi***ni elde ederiz. [Bkz. MD-2003-I, sayfa xx-xx ve II, sayfa xx-xx]

Her dizi böyle tümevarımsal bir ilişkiyle belirlenmeyebilir. Ama matematikte, fizikte ve diğer bilimlerde karşımıza "doğal olarak" çıkan dizilerin pek çoğunda böyle tümevarımsal bir ilişki vardır.

* Sabancı Üniversitesi öğretim üyesi.

> Tümevarımsal bir ilişkiyle belirlenen diziler sayılabilir sonsuzluktadadır (yani doğal sayılar kadardırlar), çünkü formüller sonlu sayıda simgeyle yazılırlar ve sonlu uzunluktadırlar; öte yandan ne kadar gerçel sayı varsa o kadar dizi olduğu oldukça kolay bir biçimde kanıtlanabilir. Demek ki dizilerin çok büyük bir çoğunluğu tümevarımsal bir ilişkiyle belirlenemezler.

II. Farklar Dizisi. Bir $c = (c_n)_n$ dizisinde ardarda gelen terimlerin farklarını $\div c_n = c_{n+1}\ 4\ c_n$ olarak yazalım. Böylece $\div c_0, \div c_1, \div c_2, \ldots$ yani $(\div c_n)_n$ dizisini türettik. Bu diziye $\div c$ adını verelim. $\div c$ dizisine c dizisinin ***farklar dizisi*** adı verilir.

Örnekler.

1. c dizisi 3, 5, 8, -3, 6, 2, ... ise $\div c$ dizisi

$$2, 3, 411, 9, 44, \ldots$$

dir.

2. Her terimi aynı olan diziye ***sabit dizi*** denir. Bu durumda $c_{n+1} = c_n$ olduğu için $\div c_n = 0$'dır.

3. $c_n = c_{n41} + 2$ tümevarımsal ilişkisiyle verilen $(c_n)_n$ dizisinin farklar dizisi 2, 2, 2, 2, ... sabit dizisidir. Farklar dizisinin bu durumda ilk terimden bağımsız olduğuna dikkatinizi çekerim.

4. Genel terimi $c_n = n(n + 1)$ olan dizi için

$$\div c_n = c_{n+1}\ 4\ c_n$$
$$= (n + 1)(n + 2)\ 4\ n(n + 1) = 2(n + 1)$$

dir.

5. Son olarak bir de $(f_n)_n$ Fibonacci dizisini alalım. Dizimiz

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

olduğuna göre $(\div f_n)_n$ farklar dizisi de

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

olacaktır. Yani farklar dizisi ilk dizinin bir ötelenişi oldu. Teorik olarak da kanıtlayabiliriz bunu:

$$\div f_n = f_{n+1}\ 4\ f_n = (f_n + f_{n41})\ 4\ f_n = f_{n41}.$$

III. Farkın Farkı. Farklar dizisinin de farklar dizisini alabiliriz ve bunu böyle dilediğimiz kadar sürdürebiliriz, yani $\div$ ile gösterdiğimiz işlemi ardarda uygulayıp tümevarımla

$$\div^k = \div \circ \div^{k41} = \div(\div^{k41})$$

olarak k'inci farklar dizisini tanımlayabiliriz. Ayrıca $\div^0 c_n$, gene c_n'ye eşit olsun, yani yeni hiçbir şey vermesin.

Örneğin, $c_n = n(n + 1)$ ise,

$$\div^0 c_n = c_n = n(n + 1),$$
$$\div^2 c_n = \div c_n = c_{n+1}\ 4\ c_n = 2(n + 1),$$
$$\div^2 c_n = \div c_{n+1}\ 4\ \div c_n = 2(n + 2)\ 4\ 2(n + 1) = 2,$$
$$\div^3 c_n = \div^2 c_{n+1}\ 4\ \div^2 c_n = 2\ 4\ 2 = 0$$

olur.

Dikkat ederseniz, yukardaki örnekte farklar dizisi gittikçe basitleşiyor, genel terimler,

$$n(n + 1), 2(n + 1), 2, 0$$

olarak değişiyor; bir anlamda, diziye fark işlemi uygulandıkça elde edilen dizinin genel teriminin "derecesi" azalıyor.

$c_{n+1} = c_n + \div c_n$ formülünü ilerde sık sık kullanacağız. Bu formül sayesinde farklar dizisi ve c_0 bilindiğinde dizinin kendisini de bulabileceğiz.

Fibonacci dizimize fark işlemini peşi sıra uygulayalım.

$\div^0 f$:	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	...
$\div^1 f$:	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	...
$\div^2 f$:	1,	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	...
$\div^3 f$:	41,	1,	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	...
$\div^4 f$:	2,	41,	1,	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	...
$\div^5 f$:	43,	2,	41,	1,	0,	1,	1,	2,	3,	5,	...
$\div^6 f$:	5,	43,	2,	41,	1,	0,	1,	1,	2,	3,	...

Her adımda Fibonacci dizimizi bir terim sağa kaydırıyoruz ve solda beliren boşluklara da sırasıyla 0, 1, 41, 2, 43, 5, ..., yani 0 ve ∂f_n sayılarını koyuyoruz.

Eğer dizimizin farkları

$$\div c_0 = \div c_1 = \ldots = \div c_n = a\ \prod\#0$$

ise, $(c_n)_n$ dizisine ***aritmetik dizi*** diyelim. Bu durumda $c_{n+1} = \div c_n + c_n$ formülünden kolaylıkla (tümevarımla) $c_n = c_0 + na$ elde ederiz. Her aritmetik dizi $(c_0 + na)_n$ olarak yazılır. Burada $a\ \prod\#0$ ve c_0 sayılarını belirlememiz gerekir. $a = 2$ ve $c_0 = 1$ ise 1, 3, 5, 7, ... teksayılar dizisini ve $a = 3$ ve $c_0 = 2$ ise 2, 5, 8, 11, 14, ... dizisini elde ederiz. $(c_n)_n$ bir aritmetik diziyse, mutlaka $\div^2 c_n = 0$'dır.

Buraya kadar yaptıklarımız ısınma hareketleriydi. Artık kolları sıvayıp daha ciddi işlere başlayalım.

IV. Terimleri Farklar Cinsinden Yazmak. $\div^0 c_n = c_n$ tanımını hatırlatırım. Yani $\div^0$, dizileri değiştirmeyen özdeşlik fonksiyonu. Bu fonksiyon genelde Id olarak yazılır. Ama pratikliğinden ve psikolojik yararından dolayı bazen 1 olarak yazıldığı da olur. Biz de bundan böyle bu fonksiyonu 1 olarak yazalım:

$$\div^0 = \text{Id} = 1$$

ve

$$1c_n = \div^0 c_n = c_n.$$

Buradaki 1'in sayı olmadığı, bir fonksiyon olduğu unutulmamalı ve sayı olan 1'le karıştırılmamalıdır. Zaten uygulamalarımızda sayı 1'le fonksiyon 1'in karışma riski olan durumlara hiç rastlamayacağız.

$c_{n+1} = c_n + \div c_n = (1 + \div)c_n$ olduğunu biliyoruz; demek ki $1 + \div$ işlemi dizinin ilk terimi kaybedip diziyi sola kaydırıyor: Eğer c dizisi

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$$

ise, $(1 + \div)c$ dizisi

$$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$$

dür.

$1 + \div$ işlemini ilk terimimize iki kez uygularsak

$$(1 + \div)^2 c_0 = (1 + \div)c_1 = c_2$$

elde ederiz; üç kez uygularsak,

$$(1 + \div)^3 c_0 = (1 + \div)^2 c_1 = (1 + \div)c_2 = c_3$$

elde ederiz. Daha genel olarak,

$$(1 + \div)^n c_0 = c_n$$

buluruz. Bu şekilde dizimizin genel terimini ilk terim ve $1 + \div$ işlemi cinsinden ifade etmiş olduk:

$$\begin{aligned} c_0 &= (1 + \div)^0 c_0,\\ c_1 &= (1 + \div)^1 c_0,\\ c_2 &= (1 + \div)^2 c_0,\\ c_3 &= (1 + \div)^3 c_0,\\ &\ldots\\ c_n &= (1 + \div)^n c_0,\\ &\ldots \end{aligned}$$

En sondaki $c_n = (1 + \div)^n c_0$ formülünde c_0 yerine c_m koyarak (bunu yapamamamız için hiçbir neden yok: dizinin ilk m terimini atarsak c_0 yerine c_m'den başlayan bir dizi elde ederiz), daha genel olarak,

$$(1 + \div)^n c_m = c_{n+m} \tag{1}$$

sonucuna ulaşırız.

Şimdi $(1 + \div)^n$ işlemine binom açılımını uygulayalım.

$$(1 + \div)^n = \Sigma_{k=0}^n C(n, k)\div^k$$

elde ederiz. Burada, $C(n, k)$, binom katsayısı olan

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n4k)!}$$

anlamına gelmektedir, tipografik nedenlerden dolayı binom katsayısı yerine $C(n, k)$ yazılımını kullanacağız. Binom açılımını ve katsayıları için referansımız [MD42005-I, sayfa 25426]. Binom açılımını kullanabilmek için aslında

$$\div^i(\div^j) = \div^j(\div^i) = \div^{i+j}$$

eşitliklerini ispat etmemiz gerekirdi ama bu da oldukça kolay.

Yukardaki binom açılımını bir dizinin c_m terimine uygularsak,

$$\begin{aligned} (1 + \div)^n c_m &= (\Sigma_{k=0}^n C(n, k)\div^k)c_m\\ &= \Sigma_{k=0}^n C(n, k)\div^k c_m \end{aligned}$$

buluruz. Şimdi bunu yukarda bulduğumuz (1) ile birleştirip

$$c_{n+m} = \Sigma_{k=0}^n C(n, k)\div^k c_m \tag{2}$$

formülünü elde edelim. Böylelikle, dizinin $(n+m)$'inci terimini, dizinin farkları olan

$$c_m, \div c_m, \div^2 c_m, \ldots, \div^{n41} c_m, \div^n c_m$$

cinsinden yazabildik.

V. Farkları Terimler Cinsinden Yazmak. Şimdi de farkları dizinin terimleri cinsinden yazmaya çalışalım. $\div c_m = c_{m+1}\ 4\ c_m$ tanımından dolayı bunu $\div c_m$ için yapmayı biliyoruz, amacımız $\div^n c_m$ farkını dizinin terimleri cinsinden yazmak. Gene binom açılımını kullanacağız.

$$\begin{aligned} \div^n &= ((1 + \div)\ 4\#1)^n\\ &= \Sigma_{k=0}^n (41)^k C(n, k)(1 + \div)^{n4k} \end{aligned}$$

işlem eşitliğini c_m terimine uygulayalım:

$$\begin{aligned} \div^n c_m &= [\Sigma_{k=0}^n (41)^k C(n, k)(1 + \div)^{n4k}]c_m\\ &= \Sigma_{k=0}^n (41)^k C(n, k)(1 + \div)^{n4k} c_m \end{aligned}$$

elde ederiz. Gene (1)'i kullanarak,

$$\div^n c_m = \Sigma_{k=0}^n (41)^k C(n, k) c_{m+n4k} \tag{3}$$

elde ederiz. Böylece $\div^n c_m$ farkını dizinin $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{m+n}$ terimleri cinsinden yazmış olduk.

VI. Dizilerin Aritmetiksel Mertebeleri. Bir $c = (c_n)_n$ dizisinin aritmetik bir dizi olması için gerek ve yeter koşul $\div c = (\div c_n)_n$ dizisinin sabit dizi olmasıdır. Eğer $\div c$ dizisi sabit değilse ama $\div^2 c$ dizisi sabitse, o zaman c dizisi aritmetik bir dizi değildir ama, bir anlamda, aritmetik bir dizi olmaya çok yatkındır.

Verilen bir $(c_n)_n$ dizisinin d-farkları 0'dan farklı bir sabitse, yani

$$0 \prod \div^d c_0 = \div^d c_1 = \ldots = \div^d c_n = \ldots$$

ise, bu diziye ***d*-inci mertebeden aritmetik dizi** denir. Bu takdirde, $m > 0$ için,

$$0 = \div^{d+1} c_n = \ldots = \div^{d+m} c_n$$

olur elbette.

Bu kavramı biraz daha iyi anlayabilmek için şu somut örneğe bakalım:

$$c_0 = 5,$$
$$\div^1 c_0 = 4$$

ve her n için

$$\div^2 c_n = 7$$

olsun. Bu 2'nci mertebeden aritmetik bir dizidir. Tabii $n > 2$ için $\div^n c_0 = 0$'dır. Şimdi $n > 2$ için (2)'de $m = 0$ alarak

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\Delta^k c_0$$

yazalım. $k > 2$ olduğunda $\Delta^k c_0 = 0$ olduğundan, yukardaki eşitlik,

$$\begin{aligned} c_n &= C(n, 2)\Delta^2 c_0 + C(n, 1)\Delta c_0 + c_0 \\ &= 7n(n-1)/2 + 4n + 5 \end{aligned}$$

şeklini alır, yani $n \geq 2$ için,

$$c_n = (n^2 + 7n + 10)/2$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik $n = 0, 1$ için de geçerlidir:

$$\begin{aligned} (0^2 + 7\cdot 0 + 10)/2 &= 5 = c_0 \\ (1^2 + 7\cdot 1 + 10)/2 &= 9 = 5 + 4 \\ &= c_0 + \Delta c_0 = c_0 + (c_1 - c_0) = c_1. \end{aligned}$$

olur. Böylece dizimizin genel terimini

$$c_n = (n^2 + 7n + 10)/2,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

olarak bulduk. Örneğimizdeki hesap yöntemini genelleştirerek şu teoremi ispat edelim.

Teorem 1. $(c_n)_n$, *d-inci mertebeden aritmetik bir diziyse, derecesi d olan bir p polinomu için* $p(n) = c_n$ *eşitliği her n için sağlanır.*

Kanıt: d'inci mertebeden aritmetik bir $(c_n)_n$ dizisi alalım. Demek ki her n için,

$$0 \neq \Delta^d c_0 = \Delta^d c_1 = \ldots = \Delta^d c_n = \ldots$$

ve her $n > d$ için $\Delta^n c_0 = 0$.

Şimdi, $n > d$ ve $m = 0$ için, (2)'den,

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\Delta^k c_0 \\ &= \sum_{k=0}^{d} C(n, k)\Delta^k c_0 \qquad (4) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bunu aklımızda tutup binom katsayılarına biraz daha yakından bakalım.

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Burada n yerine x değişkenini koyup, $C(x, k)$ polinomunu

$$C(x,k) = \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$$

olarak tanımlayalım. Bu, k-inci dereceden bir polinomdur [bkz. MD-2005-I, sayfa 25-26] ve kökleri $0, 1, \ldots, k-1$ tamsayılarıdır. Örneğin $C(x, 0) = 1$ ve $C(x, 1) = x$. Şimdi, eğer (4) formülünden esinlenerek,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k c_0 C(x, k)$$

tanımını yaparsak, (4)'ten dolayı

$$c_n = p(n)$$

eşitliğini buluruz. p'nin derecesi d olan bir polinom olduğu da aşikâr.

Ama kanıtımız daha bitmedi, çünkü $c_n = p(n)$ eşitliğini sadece $n > d$ için kanıtladık. Aynı eşitliğin $0 \leq n \leq d$ için de geçerli olduğunu kanıtlamalıyız. Böyle bir n alalım. Eğer $0 \leq n \leq k - 1$ ise, $C(n, k) = 0$ eşitliği $C(x, k)$'nin tanımından hemen çıkıyor; demek ki,

$$p(n) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k c_0 C(n, k)$$

eşitliğinde sadece $k = 0, 1, \ldots, n$ terimlerini almalıyız:

$$p(n) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k c_0 C(n, k)$$

bu da (2)'den dolayı ($m = 0$ alın) c_n'ye eşittir. □

Şimdi d'inci mertebeden bir $c = (c_n)_n$ aritmetik dizisi alalım. Bu c dizisinin $\Delta c = (\Delta c_n)_n$ farklar dizisi $(d - 1)$'inci mertebeden bir aritmetik dizidir; çünkü $\Delta^{d-1}(\Delta c_n) = \Delta^d c_n \neq 0$. Bu basit gözlem bize şu soruyu sordurur: Bir dizinin d'inci mertebeden aritmetik dizisi olması için d'inci dereceden bir polinomla tanımlı olması yeterli ve gerekli midir? Bu sorunun yarısını teoremimiz cevapladı. Şimdi şu kaldı: d'inci dereceden bir p polinomu verildiğinde $(p(n))_n$ dizisi d'inci mertebeden bir aritmetik dizi olur mu?

İlk olarak özel bir hali ele alalım. $a_d \neq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sayılarıyla

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k C(x, k) \qquad (6)$$

olarak tanımlanan q fonksiyonun, derecesi d olan bir polinom tarafından verildiğini görmek kolay. Şimdi $q(n + 1) - q(n)$ sayısını hesaplayalım:

$$\begin{aligned} q(n+1) - q(n) &= \sum_{k=0}^{d} a_k C(n+1, k) - \sum_{k=0}^{d} a_k C(n, k) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k [C(n+1, k) - C(n, k)] \end{aligned}$$

yazarsak, binom katsayılarının sağladığı

$$C(n, k) + C(n, k-1) = C(n+1, k)$$

özdeşliği kullanarak [MD-2005-I, s. 25],

$$\Delta q(n) = q(n + 1) - q(n) = \sum_{k=1}^{d} a_k C(n, k-1)$$

elde ederiz. Demek ki

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k C(x, k)$$

iken,

$$\Delta q(x) = \sum_{k=1}^{d} a_k C(x, k-1)$$

oluyor. Bu yaptığımızı ardarda tekrarlayarak

$$\Delta^i q(n) = \sum_{k=i}^{d} a_k C(n, k-i)$$

sonucunu buluruz. Dolayısıyla

$$\Delta^d q(n) = a_d;$$

yani (6)'daki polinomun tanımladığı dizinin d-inci mertebeden bir aritmetik dizi olduğunu ispat ettik. Tabii (6)'da tanımladığımız polinom özel bir hal gibi gözüküyor ama şimdi derecesi d olan herhangi bir polinomu, $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sayılarını seçerek (6)'daki gibi yazabileceğimizi gösterelim.

Yardımcı Teorem. *Derecesi d olan bir p polinomu verildiğinde öyle* $a_0, a_1, \ldots, a_d$ *sayıları bulabiliriz ki*

$$p(x) = a_0 + a_1C(x, 1) + \ldots + a_dC(x, d)$$

özdeşliği geçerli olur.

Kanıt: $p(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_dx^d$, derecesi d olan bir polinom olsun. Demek ki $b_d \neq 0$.

$C(x, d)$'nin derecesi d olan bir polinom olduğunu biliyoruz. Bu polinomda x^d'nin katsayısı $c_d \neq 0$ olsun. a_d sayısını b_d/c_d olarak tanımlarsak,

$$p(x) - a_dC(x, d)$$

polinomunda x^d terimi yok olur; yani bu polinom artık $d - 1$'inci dereceden bir polinomdur. Şimdi a_{d-1} sayısını,

$$p(x) - a_dC(x, d) - a_{d-1}C(x, d - 1)$$

polinomunda x^{d-1} teriminin katsayısı sıfır olacak şekilde seçelim. Bu işlemi tekrarlayarak

$$a_d, a_{d-1}, \ldots, a_1$$

katsayılarını,

$$p(x) - a_d\,C(x, d) - a_{d-1}C(x, d-1) - \ldots - a_1C(x, 1)$$

polinomunda x teriminin de olmadığı, yani bu polinomun sabit olacak biçimde seçebiliriz. Bu sabiti a_0 ile gösterelim. O zaman $p(x)$'i

$$a_dC(x, d) - a_{d-1}C(x, d-1) - \ldots - a_1C(x, 1) + a_0$$

olarak seçebiliriz. □

Daha önce yaptığımızı yardımcı teoremle birleştirip şu sonuca varırız.

Teorem 2. *Derecesi d olan bir p polinomu tarafından tanımlanan $(p(n))_n$ dizisi d'inci mertebeden bir aritmetik dizidir.*

Genel olarak, herhangi iki f_0, f_1 pozitif sayısı verildiğinde $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, ile tanımlanan $(f_n)_n$ dizisine **Fibonacci dizisi** diyelim. Bu tanımdan her n için $f_n > 0$ olduğunu kolayca ispat edebiliriz. Demek ki $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} > f_{n-1}$. Dolayısıyla $(f_n)_n$ artan bir dizidir.

Sonuç. *Fibonacci dizisini veren bir polinom yoktur.*

Kanıt: Fibonacci dizisinin farklar dizisine bakalım:

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$$

ve genelde $n \geq d$ için

$$\Delta^d f_n = f_{n-d}$$

olduğunu gösterebiliriz. Dolayısıyla hiçbir d için $(\Delta^d f_n)_n$ sabit bir dizi olamaz. Teorem 2 bize her n için $p(n) = f_n$ olacak şekilde bir polinom olmadığını verir. Yani Fibonacci dizisini veren bir polinom yoktur! □

VII. Aritmetik Dizilerin Sonlu Toplamları. Şimdi d'inci mertebeden bir aritmetik dizinin sonlu toplamlarını ele alalım, yani $(c_n)_n$, d-inci mertebeden bir aritmetik diziyse, genel terimi

$$(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n)_n$$

olan

$$c_0,\ c_0 + c_1,\ c_0 + c_1 + c_2,\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3, \ldots,$$

dizisini bulalım.

(4) formülüne göre, $(c_n)_n$ dizisinin genel terimini,

$$c_n = \sum_{k=0}^{d} C(n, k)\Delta^k c_0$$

olarak c_0 ve farkları cinsinden yazabiliyoruz. Gene binom katsayılarının

$$C(n, k + 1) + C(n, k) = C(n + 1, k + 1)$$

özdeşliğine dönelim ve bunu

$$C(n, k) = C(n + 1, k + 1) - C(n, k + 1)$$

olarak yazalım. Herhangi bir $k = 0, 1, \ldots$ sayısını sabitleyip $n = 0$'dan $n = m$'ye kadar $C(n, k)$ binom katsayılarını toplarsak, yukardaki formülden dolayı birçok terim sadeleşir ve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} C(n, k) &= C(m + 1, k + 1) - C(0, k + 1)\\ &= C(m + 1, k + 1)\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla d'inci mertebeden bir aritmetik dizinin sonlu toplamı,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} c_n &= \sum_{n=0}^{m} \Big[\sum_{k=0}^{d} C(n, k)\Delta^k c_0\Big]\\ &= \sum_{k=0}^{d} \Big[\sum_{n=0}^{m} C(n, k)\Delta^k c_0\Big]\\ &= \sum_{k=0}^{d} \Big[\sum_{n=0}^{m} C(n, k)\Big]\Delta^k c_0\\ &= \sum_{k=0}^{d} C(m + 1, k + 1)\Delta^k c_0\end{aligned}$$

formülüyle kolaylıkla bulunabilir. Sonuç:

$$\sum_{n=0}^{m} c_n = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k c_0\, C(m + 1, k + 1). \qquad (7)$$

Örnek olarak $(n^4)_n$ dizisini alalım. Teorem 2 bize bunun 4'üncü mertebeden bir aritmetik dizi olduğunu söylüyor. Farklar dizileri yazalım

$(n^4)_n$	: 0, 1, 16, 81, 256 ...
$(\Delta n^4)_n$	: 1, 15, 65, 175, ...
$(\Delta^2 n^4)_n$	: 14, 50, 110, ...
$(\Delta^3 n^4)_n$	: 36, 60, ...
$(\Delta^4 n^4)_n$	: 24, ...

Demek ki

$$c_0 = 0,$$
$$\Delta c_0 = 1,$$
$$\Delta^2 c_0 = 14,$$
$$\Delta^3 c_0 = 36$$

ve

$$\Delta^4 c_0 = 24.$$

Dolayısıyla, yukardaki (7) formülünden dolayı, ilk m doğal sayının karelerinin toplamı olan $\sum_{n=0}^{m} n^4$ sayısı aşağıdaki şu sayıya eşit:

$C(m + 1, 2) + 14C(m + 1, 3) + 36C(m + 1, 4) + 24C(m + 1, 5) = m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)/30$, yani

$$\sum_{n=0}^{m} n^4 = m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)/30.$$

MD okuru bu formülü iyi tanıyor olmalı [bkz. MD-200x-xx, sayfa xx]. İsterseniz aynı yöntemle $(n^2)_n$, $(n^3)_n$ vb. dizilerin ilk m terimlerinin toplamlarını da hesaplarsınız. Ama biz yazımızı genel bir sonuçla sürdürelim.

Teorem 3. *Derecesi d olan bir p polinomu için,*

$$q(m) = \sum_{n=0}^{m} p(n)$$

şartını sağlayan ve derecesi $d + 1$ olan bir q polinomu vardır.

Kanıt: Teorem 2 bize $(p(n))_n$ dizisinin mertebesi d olan bir aritmetik dizi olduğunu söylüyor. Bu dizinin ilk m teriminin toplamını biliyoruz, bu toplam bize (7) formülüyle veriliyor. O formülde c_n yerine $p(n)$ yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{m} p(n) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k p(0)C(m + 1, k + 1).$$

buluruz. Sağ taraf, m'yi değişken olarak kabul edersek, m cinsinden $d + 1$'inci dereceden bir polinom. Bu polinoma q adını verelim:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{d} \Delta^k p(0)C(x + 1, k + 1).$$

Demek ki $\sum_{n=0}^{m} p(n) = q(m)$. □

Son olarak asal sayılar dizisini ele alalım. Bu dizi ile birinci ve ikinci farklar dizisini altalta yazalım.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, ...

1, 0, 2, −2, 2, −2, 2, 2, ...

Sadece bu dizilere bakarsak, asal sayıların farkları sanki giderek daha düzgün dağılıyor sanabiliriz. Oysa hiç de öyle değildir.

Asal sayılar dizisini $(p_n)_n$ ile gösterelim. Eğer bu dizi d'inci mertebeden bir aritmetik dizi olsaydı, o zaman her n için $f(n) = p_n$ olan bir f polinomu bulabilecektik. Gerçekten tüm asal sayıları bir polinomla hesaplayabilmek ne kadar güzel olurdu! Ama böyle bir polinom yok. Şimdi bunu ispat edelim. $f(x) = a_dx^d + ... + a_1x + a_0$, $a_d \neq 0$, bir polinom olsun. İlkin bir ilginç sonuca bakalım.

Yardımcı Teorem. *$f(n)$ sayısını bölen p sayısı, her $k = 1, 2, 3, ...$ için, $f(n + kp)$ sayısını da böler.*

Kanıt: Polinomumuz a_ix^i gibi terimlerin toplamı. Binom teoreminden

$$a_i(n + kp)^i = a_i(n^i + in^{i-1}(kp) + ... + (kp)^i)$$
$$= a_in^i + ...$$

elde ederiz. Noktalarla gösterilenlerin her birini p sayısı böler. Ayrıca i üzerinden toplarsak

$$f(n + kp) = f(n) + A(k, p)$$

sonucuna varırız. Burada $A(k, p)$ ile noktalarla gösterilen terimlerin i üzerinden toplamını ifade ediyor. Hem $f(n)$, hem de $A(k, p)$, p'ye bölünür. □

Sonuç. *Her n için $f(n)$'nin asal olan bir f polinomu yoktur.*

Kanıt: Her n için $f(n)$ değeri asal olan bir f polinomunun olduğunu varsayalım. Bu bizi bir çelişkiye götürecek. f'nin derecesi d olsun ve

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_dx^d$$

olarak yazalım.

$f(0) = p$ bir asal sayıdır. Ayrıca Yardımcı Teorem'den dolayı her k için p sayısı $f(kp)$ sayısını böler. Ama varsayımımızdan dolayı $f(kp)$ sayısı da asaldır. Dolayısıyla her $k = 1, 2, ...$ için $f(kp) = p$ eşitliği doğrudur. Cebirin Temel Teoremi denen ve $f(x) = a$ denkleminin en çok d tane çözümü olduğunu veren teoremi kullanarak [MD-200x-xx, sayfa xx], her k için $f(kp) = p$ eşitliğinin olamayacağını söyleyip ispatımızı burada bitirebiliriz. Ama bu teoremi bilmiyorsak, ziyanı yok. Şu ifadeye bakalım

$$f(kp)(kp)^{-d} = a_d + a_{d-1}(kp)^{-1} + ... + a_0(kp)^{-d}.$$

k arttıkça, sağ taraftaki a_d'den sonra gelen her terim giderek sıfıra yaklaşır. Yani

$$\lim_{k \to \infty} f(kp)/(kp)^d = a_d$$

Öte yandan $f(kp) = p$, yani

$$\lim_{k \to \infty} f(kp)/(kp)^d = \lim_{k \to \infty} p/(kp)^d = 0.$$

Ama a_d ise sıfır değildi. İşte ispatımızı tamamlayan çelişki. ♦