Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Fen Liseleri Yarışması 2005

Soru ve Yanıtlar

1. 2005^{2006} *sayısının* 11'*e bölümünden kalan kaçtır*?

Çözüm: $2005 \sum 3(mod\ 11)$ olduğundan3
$2005^{2006} \sum 3^{2006} = (3^5)^{401}\Delta 3 \sum 3\ (mod\ 11)$.

2. $(x\ 2\ 1)P(x\ 2\ 1)\ 4\ (x\ 2\ 2)P(x) = 0$ *bağıntısını sağlayan bir* $P(x)$ *polinomu için* $P(2) = 6$ *ise bu polinomun sabit terimi kaçtır*?

Çözüm: Verilen bağıntıyı $x = 1$ için uygularsak,

$$2P(2)\ 4\#3P(1) = 0$$

elde ederiz. $P(2) = =$ olduğundan, bundan

$$P(1) = 4$$

çıkar. Verilen bağıntıyı bu kez $x = 0$ değerine uygulayalım: $P(1)\ 4\ 2P(0) = 0$ buluruz. $P(1) = 4$ olduğundan, sabit terim $P(0) = 2$ bulunur.

3. *k ve n pozitif tamsayılar olmak üzere,*

$$n^3\ 2\ 2n^2 = (2k\ 2\ 1)^2$$

eşitliğini sağlayan en küçük k değeri nedir?

Çözüm: $n^2(n\ 2\ 2) = n^3\ 2\ 2n^2 = (2k\ 2\ 1)^2$ olarak yazıldığından, $n\ 2\ 2$ sayısının bir tam kare olması gerekir. $(2k\ 2\ 1)^2$ tek olduğundan bunu sağlayan en küçük n sayısı da 7 olur. Buradan da $k = 10$ bulunur.

4. $\left\{\begin{array}{l} x\ 4\ \sqrt{yz}\ |\ 42 \\ y\ 4\ \sqrt{xz}\ |\ 6 \\ z\ 4\ \sqrt{xy}\ |\ 430 \end{array}\right.$ *denklem sisteminin bütün gerçel* (x, y, z) *çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: Denklemlerden $x\ \}\ 0$, $y\ \}\ 0$, $z\ \}\ 0$ olması gerektiği görülüyor. Pozitif a, b ve c için,

$$x = a^2,\ y = b^2,\ z = c^2$$

olsun. O zaman sistem,

$$a^2\ 4\ bc = 42$$
$$b^2\ 4\ ac = 6$$
$$c^2\ 4\ ab = 430$$

olarak yazılır. İkinci denklemi 41 ile çarpıp ilk denkleme eklersek

$$(a\ 4\ b)(a\ 2\ b\ 2\ c) = 36$$

elde ederiz. Üçüncü denklemi 41 ile çarpıp ikinciye eklersek,

$$36 = (b\ 4\ c)(a\ 2\ b\ 2\ c)$$

elde ederiz. Demek ki

$$(a\ 4\ b)(a\ 2\ b\ 2\ c) = 36 = (b\ 4\ c)(a\ 2\ b\ 2\ c).$$

Sadeleştirerek,

$$a\ 4\ b = b\ 4\ c,$$

yani $b = (a\ 2\ c)/2$ buluruz. Şimdi,

$$6 = b^2\ 4\ ac = (a + c)^2/4\ 4\ ac = (a\ 4\ c)^2/4$$

eşitliğinden $a\ 4\ c = \partial 2\surd 6$ bulunur. Ayrıca,

$$36 = (b\ 4\ c)(a + b + c) = 3(a\ 4\ c)(a + c)/4$$

eşitliğinden $(a\ 4\ c)(a + c) = 48$ bulunur. Yukarda bulunan $a\ 4\ c = \partial 2\surd 6$ ile birlikte $a + c = \partial 4\surd 6$ bulunur. a ve c negatif olamayacaklarından,

$$a\ 4\ c = 2\surd 6$$

ve

$$a + c = 4\surd 6.$$

Bu ikisinden $a = 3\surd 6$, $c = \surd 6$, $b = 2\surd 6$ bulunur. Ardından, $x = 54$, $y = 24$ ve $z = 6$ bulunur.

5. $\sqrt{x\ 2\ \sqrt{2x\ 4\ 1}}\ 2\ \sqrt{x\ 4\ \sqrt{2x\ 4\ 1}}\ |\ 2$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm: Verilen ifadenin karesini alalım,

$$x\ 2\ \sqrt{2x\ 4\ 1}\ 2\ x\ 4\ \sqrt{2x\ 4\ 1}\ 2\ 2\sqrt{x^2\ 4\ 2x\ 2\ 1}\ |\ 4;$$

yani $x\ 2\ |x\ 4\ 1| = 2$. Buradan da $x = 3/2$ bulunur.

6. 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ... *dizisinin ilk kaç terimini toplarsak* 396 *elde ederiz*?

Çözüm: Bu dizinin ilk terimlerinin toplamı,
$1^2\ 2\ 2^2\ 2\ 3^2\ 2\#..\ 2\ n^2\ 2\ K = n(n\ 21)(2n\ 21)/6\ 2\ K$ biçiminde olacaktır. $n = 10$ için $385\ 2\ K$ elde edilir. Böylece $K = 11$ bulunur ve terim sayısı

$$10(10\ 2\ 1)/2\ 2\ 1 = 56$$

bulunur.

7. $x^3\ 4\ y^3 = z$ *denklemini sağlayan* (x, y, z) *asal sayı üçlüleri nelerdir*?

Çözüm: Denklemi çarpanlarına ayırırsak,

$$z = x^3\ 4\ y^3 = (x\ 4\ y)(\ x^2\ 2\ xy\ 2\ y^2)$$

olmalıdır. z asal olduğundan $x\ 4\ y = 1$ yani $x = y\ 2\ 1$ olmalıdır. Ardışık asal sayılar yalnızca 3 ve 2 olduğu için, $x = 3$, $y = 2$ buradan da $z = 19$ bulunur.

8. *Bir kitabın sayfalarını numaralamak için toplam* 2004 *rakam kullanılmıştır. Bu kitabın sayfa sayısı kaçtır?*

$$\underbrace{1, 2, 3, 3, 9}_{9\ tane}, \underbrace{10, 11, 3, 99}_{90\ tane}, \underbrace{100, 101, 3, k}_{k\ tane}$$

Çözüm: Sayfa sayıları
biçiminde olduğundan,

$$9\ 2\ 2\cdot 90\ 2\ 3(k\ 4\ 99) = 2004$$

olmalıdır. Buradan da $k = 704$ bulunur.

9. 1080'*den küçük ve* 1080 *ile aralarında asal olan kaç pozitif tamsayı vardır?*

Çözüm: $1080 = 2^3 3^3 5$, 2 ile bölünen sayıların kümesini A, 3 ile bölünenleri B ve 5 ile bölünenleri C ile gösterelim. Şimdi hesaplayalım:

$$|A \cong B \cong C| = |A|\ 2\ |B|\ 2\ |C|\ 4\ |A \sim B|\ 4\ |A \sim C|\ 4\ |B \sim C|\ 2\ |A \sim B \sim C|$$
$$= 1080/2\ 2\ 1080/3\ 2\ 1080/5\ 4\ 1080/(2\cdot 3)\ 4\ 1080/(2\cdot 5)\ 4\ 1080/(3\cdot 5)\ 2\ 1080/(2\cdot 3\cdot 5)$$
$$= 792.$$

Demek ki yanıt 1080 4 792 = 288'dir.

10. $3x^2\ 2\ x\ 4\ 2 = 0$ *polinomunun bir kökü ise* $4/x^2\ 2\ 9x^2$ *kaçtır?*

Çözüm: $x = 2\ 4\ 3x^2$ olduğundan $1 = 2/x\ 4\ 3x$. Her iki tarafın karesi alındığında

$$1 = 4/x^2\ 2\ 9x^2\ 4\ 12$$

buradan da $4/x^2\ 2\ 9x^2 = 13$ bulunur.

11. $13!\ 2\ 1\ \{\ p\ \Omega 13!\ 2\ 13$ *koşulunu sağlayan kaç p asal sayısı vardır?*

Çözüm: p sayısı, $2\ \Omega k\ \Omega 13$ sayısı için $13!\ 2\ k$ biçimindedir. $k\surd 13!$ olacağından p sayısı her zaman k'ya bölünür, yani p asal olamaz.

12. 216.000 *sayısının pozitif bölenlerinin kaçı* 8'*e bölünür fakat* 9'*a bölünmez?*

Çözüm: $216.000 = 2^6 3^3 5^3$ sayısının bölenleri $2^n 3^k 5^m$ biçimindedir. 8'e bölünen fakat 9'a bölünmeyen bölenler $\{2^n 3^k 5^m : 3\ \Omega n\ \Omega 6,\ 0\ \Omega k\ \Omega 1,\ 0\ \Omega\ m\ \Omega 3,\ n, m, k \subset\ )\}$ kümesi içindedir. Bu kümenin eleman sayısı da $4\ \Delta\ 2\ \Delta\ 4 = 32$ dir.

13. *abc üç basamaklı sayısının a, b ve c rakamlarının* $49a\ 2\ 7b\ 2\ c = 286$ *eşitliğini sağladığı bilindiğine göre, abc sayısı kaçtır?*

Çözüm: $49a\ 2\ 7b\ 2\ c = 286$ özelliğinden 286 sayısının 7'ye bölümünde kalanın c olduğu anlaşılır ve $c = 6$ bulunur. Buna göre $7a\ 2\ b = 40$ eşitliğinden $a = 5$ ve $b = 5$ bulunur. Demek ki aranan sayı 556 dır.

14. (44, 11) *ve* (16, 41) *noktalarından geçen doğrunun koordinatları pozitif tamsayılar olan bütün noktalarını bulunuz.*

Çözüm: (44, 11) ve (16, 41) noktalarından geçen doğrunun denklemini $5y\ 2\ 3x = 43$ olarak bulunur. Bu denklemi $5(y\ 4\ 8)\ 2\ 3(x\ 4\ 1) = 0$ yazalım. Buradan $k \subset\ )$ için $y = 8\ 4\ 3k$ ve $x = 1\ 2\ 5k$ olur. $k\ \{\ 3$ olduğunu gözönüne alırsak. Böylece

$k = 0$ için (1, 8),

$k = 1$ için (6, 5)

ve

$k = 2$ için (11, 2)

pozitif tamsayı ikilileri bulunur.

15. *a ve b doğal sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü* $(a, b) = 9$ *ve ortak katlarının en küçüğü* $[a, b] = 270$ *olduğuna göre, bu iki sayının toplamının olabilecek en küçük değeri nedir?*

Çözüm: $ab = (a, b)[a, b] = 9\cdot 270 = 2\cdot 3^5\cdot 5$ eşitliğinden birbirine en yakın a ve b bölenleri $9\cdot 5 = 45$ ve $9\cdot 6 = 54$ olarak bulunur. Demek ki istenen toplam 45 2 54 = 99 olacaktır.

16. 7 *ve* 9 *tabanına göre yazılışları*

$$(abc)_7 = (cba)_9$$

eşitliğini sağlayan $(abc)_7$ *sayısı nedir?*

Çözüm: Verilen eşitlikten

$$a7^2\ 2\ b7\ 2\ c = c9^2\ 2\ b9\ 2\ a$$

çıkar. Buradan da $b = 8(3a\ 4\ 5c)$ bulunur. Aranan sayı 7 tabanına göre olduğundan, $a, b, c \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O halde $b = 0$ ve $3a = 5c$ olmalıdır. Sonuç olarak $c = 3$, $a = 5$ ve istenilen sayı da $(503)_7$ bulunur.

17. *a, b ve c birbirinden farklı gerçel sayılardır.*

$$2a\ 2\ b = 3c$$

ve

$$2a^3\ 2\ b^3 = 3c^3$$

olduğuna göre, $a\ 2\ b\ 2\ c$ *kaçtır?*

Çözüm: Verilen eşitlikler,

$$2(a\ 4\ c) = c\ 4\ b \text{ ve } 2(a^3\ 4\ c^3) = c^3\ 4\ b^3$$

şeklinde yazılabilir. İkinci denklemi çarpanlarına ayırarak,

$$2(a\ 4\ c)(a^2\ 2\ ac\ 2\ c^2) = (c\ 4\ b)(c^2\ 2\ bc\ 2\ b^2)$$

yazıp ilk denklemi kullandığımız da, $(a\ \prod c$ olduğu için) a^2 2 ac 2 c^2 = c^2 2 bc 2#b^2 buluruz. Buradan da

$$a^2 \; 4 \; b^2 = bc - ac,$$

yani

$$(a \; 4 \; b)(a \; 2 \; b) = c(b \; 4 \; a)$$

bulunur. a ∏b olduğu için a 2 b 2 c = 0 bulunur.

18. *(abc) üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere (abc) = 11(a^2 2 c^2) eşitliğini sağlayan (abc) sayılarını bulun.*

Çözüm: a 4 b 2 c ∑0 (mod 11) olmalı, o halde ya a 2 c = b ya da a 2 c = b 2 11 olmalıdır. İlk durumda

$$100a \; 210(a \; 2 \; c)2 \; c = (abc) = 11(a^2 \; 2 \; c^2)$$

eşitliğinden c^2 4 c = 10a – a^2 çıkar, dolayısıyla bu durumda a çift olmalı. İkinci durumda ise

$$100a \; 2 \; 10(a \; 2 \; c \; 4 \; 11) \; 2 \; c = (abc) = 11(a^2 \; 2 \; c^2)$$

eşitliğinden,

$$c^2 \; 4 \; c = 10a \; 4 \; a^2 \; 4\#10$$

çıkar ve gene a çift olur. Ama a çift rakamlar üzerinde değiştiğinde 10a 4 a^2 sayılarının kümesi {16, 24}, 10a 4 a^2 4 10 sayılarının kümesi {6, 14} olur. Bunlardan yalnızca 6 ardışık iki sayının çarpımı olduğundanc^2 4 c = c(c 4 1) teriminin alabileceği tek değer 6'dır. Yani tek çözüm,

$$6 = c(c \; 4 \; 1) = c^2 \; 4 \; c = 10a \; 4 \; a^2 \; 4 \; 10$$

eşitliğinden c = 3, a = 8, b = a 2 c 4 11 = 0 olarak bulunur. Demek ki istenenlere uyan tek sayı 803'tür.

19. x^5 2 x^4 4 x^3 4 x^2 4 2x 4 2 *polinomunun kaç gerçel kökü vardır?*

Çözüm: Polinom, (x 2 1)(x^2 4 2)(x^2 2 1) şeklinde yazılacağından 3 gerçel kökü vardır.

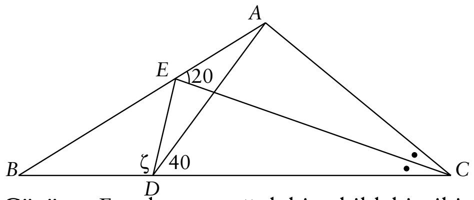
20. *Bir pozitif n tamsayısı için n^2 sayısının onlar basamağı 7 ise birler basamağı kaçtır?*

Çözüm: n tamsayısının son iki basamağı ab olsun. O halde a, b, c rakamlar olmak üzere

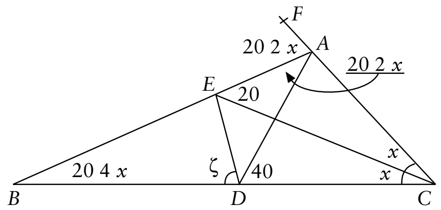
$$\ldots 2 \; 70 \; 2 \; c = n^2 = (\ldots ab)^2 = \ldots 2 \; 100a^2 \; 2 \; 20ab \; 2 \; b^2$$

olacaktır. Onlar basamağındaki 7 sayısı tek olduğu için 20ab çift sayısına b^2 sayısının onlar basamağından gelen bir tek sayı eklenmelidir. Bu özelliği sağlayan b sayısı 4 ya da 6 olacaktır, böylece her iki durum için de birler basamağı c = 6 olur.

21. *ABC üçgeninde CE açıortay, m(ADC) = 40°, m(CEA) = 20°. (Bkz. bir sonraki sütundaki şekil.) Bu verilere göre m(EDB) kaçtır?*



Çözüm: F noktası aşağıdaki şekildeki gibi seçilsin. ABC üçgeninde CE açıortay ve $m(ECA)$ =



$m(BCE)$ = x dersek,

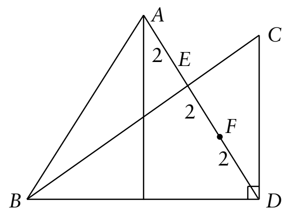
$$m(EAF) = 20 \; 2 \; x,$$
$$m(EBC) = 20 \; 4\#x$$

ve

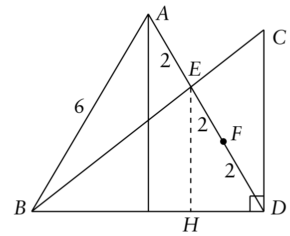
$$m(BAD) = 40 \; 4 \; (20 \; 4 \; x) = 20 \; 2 \; x$$

olur. Sonuç olarak AB, ADC üçgeninin dışaçıortayı, CE ise iç açıortayıdır. Bunlar E noktasında kesiştiklerinden ED, ADC' nin dış açıortayı olur. Buna göre ζ = (180∀4 40∀)/2 = 70∀bulunur.

22. *ABD eşkenar üçgen, m(BDC) = 90°, |AE| = |EF| = |FD| = 2 c**m** ise ABDC dörtgeninin alanı kaç cm² dir?*



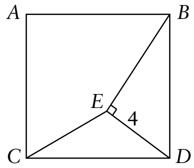
Çözüm: E'den BD'ye inilen dikme ayağı H olsun. $m(EDB)$ = 60° olduğundan |HD| = |ED|/2 = 2, |BH| = |BD| 4 |HD| = 6 4 2 = 4, |EH| = 2√3 olur.



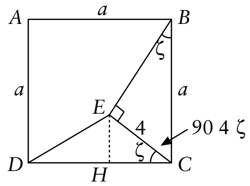
Şimdi, |CD|/|EH| = |BD|/|BH| = 6/4 = 3/2 oranından |CD| = 3/2 Δ |EH| = 3/2 Δ 2√3 = 3√3 çıkar. Ama ayrıca h_A = 3√3. Demek ki AC // BD. |AC| =

3 olacağından, $A(ABDC) = (6\ 2\ 3)3\sqrt{3}/2 = 27\sqrt{3}/2$ bulunur.

23. *ABDC kare, BE, EC ve EC = 4 cm ise DCE üçgeninin alanı kaçtır?*



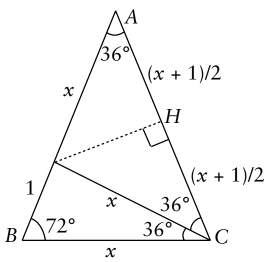
Çözüm: E' den DC' ye dik inelim. Dikme ayağı H ise EHC üçgeni ve CEB üçgeni benzerdir. Dolayısıyla



layısıyla $h = |EH|$ ise, $h/4 = 4/a$ olur ve buradan $ah = 16$ ve $A(DCE) = 8\ cm^2$ bulunur.

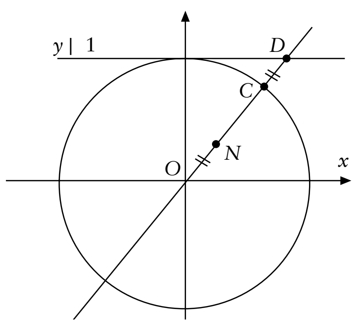
24. cos 36° = ?

Çözüm: Tepe açısı 36 ve tabanı x olan bir ABC ikizkenar üçgeni düşünürsek açıortay bağıntısın-



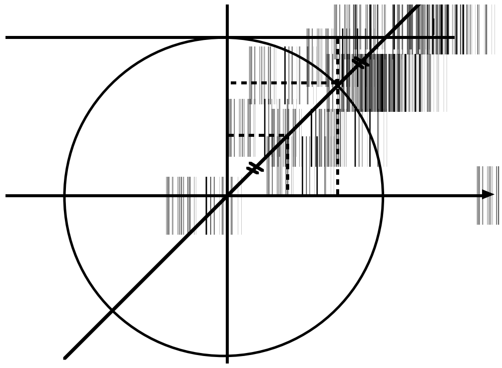
dan $1/x = x/(x\ 2\ 1)$ ve dolayısıyla $x^2\ 4\ x\ 4\ 1 = 0$ çıkar. Böylece $x = (1\ 2\ \sqrt{5})/2$ ve $\cos 36° = (x\ 2\ 1)/2x = x/2 = (1\ 2\ \sqrt{5})/4$ bulunur.

25. *$x^2\ 2\ y^2 = 1$ çemberi, merkezden geçen bir doğruyu D noktasında kessin bu doğru üzerinde ve*



|ON| = |CD| olacak biçimde alınan N noktalarının geometrik yerinin denklemi nedir?

Çözüm: $N(u, v)$ olsun ve C'nin koordinatlarına (x, y) diyelim. Aşağıdaki resimden takip edin.



Yok

Koşuldan dolayı $u\ 2\ y = 1$. Ayrıca benzer üçgen ilişkisinden $u/x = v/y$. Demek ki

$$x = yu/v = u(1\ 4\ v)/v.$$

Ayrıca $x^2\ 2\ y^2 = 1$. Bu ikisinden

$$u^2(1\ 4\ v)^2/v^2\ 2\ (1\ 4\ v)^2 = 1$$

ve

$$1/(1\ 4\ v)^2 = u^2/v^2\ 2\ 1$$

çıkar.

Yedek Sorular

1. *a, b, c pozitif tamsayıları artan bir geometrik dizi oluştursun. $b\ 4\ a$ bir tamkare ve*

$$\log_6 a\ 2\ \log_6 b\ 2\ \log_6 c = 6$$

ise $a\ 2\ b\ 2\ c$ kaçtır?

Çözüm: $\log_6 a\ 2\ \log_6 b\ 2\ \log_6 c = \log_6 (abc) = 6$ buradan da $abc = 6^6$ olur. $b^2 = ac$ olduğu için, bundan $b^3 = abc = 6^6$ ve $b = 6^2 = 36$ bulunur. $b\ 4\ a$ sayısının bir tamkare olması için, a sayısı 35, 32, 27, 20, 11 sayılarından biri olmalıdır.

$$ac = abc/b = 6^6/6^2 = 6^4 = 2^4 \cdot 3^4$$

olduğundan yukarıdaki sayılar içerisinden sadece $a = 27$ bulunur ve $c = 48$ çıkar. Sonuçta $a\ 2\ b\ 2\ c = 111$ olur.

2. *72 tane pozitif tamsayı böleni olan en küçük pozitif tamsayı kaçtır?*

Çözüm: En küçük tamsayıyı bulmak için 2, 3, 5, 7, ... gibi en küçük asallarla oluşturulan

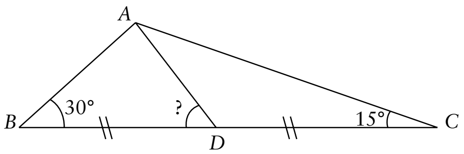
$$2^m 3^n 5^k 7^l \ldots$$

sayılarını incelemeliyiz.

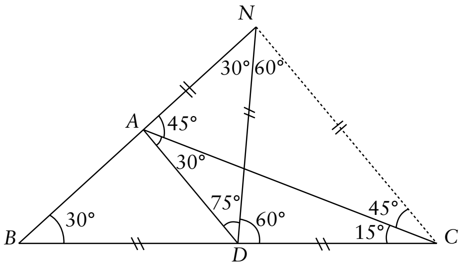
$$72 = (n\ 2\ 1)(m\ 2\ 1)(k\ 2\ 1)(l\ 2\ 1)$$

koşulu göz önüne alınarak en küçük sayı $2^5 3^2 5^7$ olarak bulunur.

3. *ABC üçgen, D* ⊂#[*BC*], *m*(*ABC*) = 30°, *m*(*ACB*) = 15°, |*BD*| = |*DC*|. *Bu verilere göre ADB açısı kaç derecedir?*



Çözüm: *C* noktasından *AB*'ye inilen dikmenin ayağı *N* olsun. (Bir sonraki sayfadaki şekilden izleyin.) *N* ile *D* birleştirilerek *NDC* eşkenar üçge-

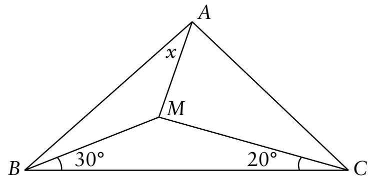


ni elde edilir (*NCB*, 90-60-30 üçgeninden dolayı). *m*(*NAC*) = 180° 4 *m*(*NCA*) - *m*(*ANC*) = 180° 4 45° 4 90° = 45° olacağından, *NAC* ve dolayısıyla *NAD* ikizkenar üçgen olur. O halde *m*(*ADB*) = 180° 4 (60° 2 75°) = 45°'dir.

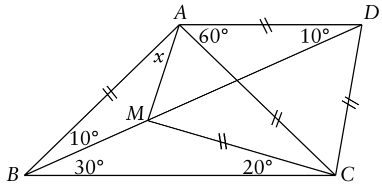
4. *a bir tam sayı olmak üzere, ayrıtları* 1, *a ve* 2*a birim, yüzey alanı* 54 *birim kare olan bir dikdörtgenler prizmasının hacmi nedir?*

Çözüm: Yüzey alan hem 2(*a* 2 2*a* 2 2a^2) hem de 54'tür. Buradan da *a* = 3 bulunur. Dolayısıyla hacim, 1 ∆#3 ∆#6 = 18 birim küptür.

5. *ABC üçgen*, |*AB*| = |*AC*|, *m*(*BAC*) = 100°, *m*(*MBC*) = 30°, *m*(*MCB*) = 20°. *Bu verilere göre x kaçtır?*



Çözüm: *BM*'nin uzantısı üzerinde |*AD*| = |*AB*| olacak biçimde alınan *D* noktası için,



m(*ADB*) = *m*(*MBA*) = 10°

ve dolayısıyla *m*(*CAD*) = 60° bulunur. Demek ki ortaya çıkan *DAC* ikizkenar üçgeni eşkenardır. Buradan açı hesaplamaları ile *x* = 20° bulunur. ♦