Kanıt Nedir?

Ali Nesin* / anesin@bilgi.edu.tr

Hiçten var etmek insanoğluna özgü bir nitelik değildir. Örnek: Un, şeker ve yağ olmadan helva yapılmaz. Yeni bir şey elde etmek için var olan başka şeylerden hareket etmek gerekir.

Bir şeyi başka bir şeye dönüştürebiliriz belki ama yokluktan varlık yaratamayız.

Nasıl yoktan bir şey var edemezsek, hiçbir şey bilmeden de yeni bir şey bilemeyiz. Belli bir temele dayanmadan bir gerçeğe ulaşamayız.

Çok verilen şu örneği ele alalım: Hiç Macarca bilmediğimizi varsayalım, ama tek kelime bile bilmiyoruz... Anlamını bilmek istediğimiz Macarca bir sözcük var. Elimizde sadece Macarcadan Macarcaya bir sözlük var. Bu sözlüğe bakarak Macarca bir sözcüğün anlamını öğreneceğiz... Başka hiçbir seçeneğimiz olmadığından Macarca sözlükte o sözcüğü bulup tanımına bakalım. Tanım da Macarca tabii. Ama tek kelime Macarca bilmediğimizden tanımı anlamıyoruz. Bu sefer tanımdaki sözcükleri arıyoruz sözlükte. Bunların da tanımları Macarca... Çünkü sözlük Macarcadan Macarcaya... Bu sefer bu tanımlardaki sözcükleri arıyoruz sözlükte. Bu böyle sürekli sürer gider. Sözlük sonlu olduğundan, bir zaman sonra ikinci kez aynı sözcüğe rastlarız, yani bir sözcüğün anlamını bilmek için o sözcüğün anlamını bilmemiz gerektiğini anlarız...

Macarca bir sözcüğün anlamını Macarcadan Macarcaya bir sözlüğe bakarak anlayabilmemiz için en azından birkaç Macarca sözcük bilmeliyiz. Macarcayı bu sözlüğe bakarak sökebilmek için bilmemiz gereken sözcüklere – bir anlamda - Macarcanın aksiyomları (belitleri) adını verebiliriz.

Matematik benzer nedenden aksiyomatik bir uğraş dalıdır, başka türlü olamaz. Matematikçi bazı sözcükleri anlamadan ve bazı önermeleri kanıtlamadan kabul etmeli, yoksa tümce kuramaz ve hiçbir gerçeğe dayanmadığından yeni teoremler elde edemez.

Matematikte doğru kabul edilen – doğru olan demiyorum! – önermelere matematiğin aksiyomları denir.

Herkes aynı aksiyomları kabul etmek zorunda değildir elbet. Değişik aksiyomlarla değişik matematikler elde edilebilir. Ancak matematikçilerin çoğunluğunun kabul ettiği bir aksiyom sistemi vardır ve birkaç mantıkçı dışında herkes bu aksiyom sisteminde çalışır.

Diyelim elimizde bir dizi aksiyom var. Bu aksiyomlardan yola çıkarak matematik yapacağız, yani teoremler elde edeceğiz... Aksiyomlardan biri, örneğin, "$x = x$" diyebilir. Bunun gibi sonlu ya da sonsuz aksiyomlarımız var. Bu aksiyomları kullanarak teorem elde edeceğiz...

Nasıl yapmalı?

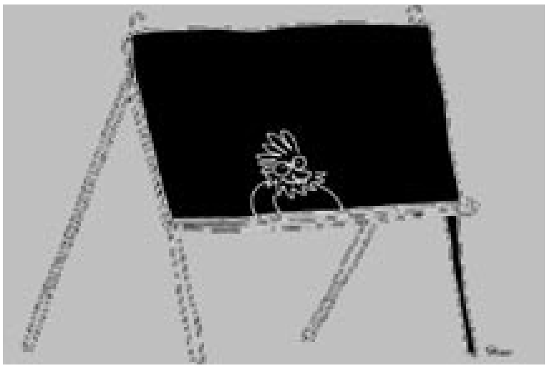
Doğru olduğunu kabul ettiğimiz (bildiğimiz demedim! Bir kez daha!) önermelerden yeni bir önerme nasıl elde edilir?

Bunun bir kuralı olmalı. Un, şeker ve yağdan helva yapmak için bile "unu yağda kavuracaksın" gibi bazı komutlar gerekiyor...

İşte, eski önermelerden yeni önerme elde etme yöntemlerine matematikte ***çıkarım kuralları*** denir. Hiç çıkarım kuralı olmadan hiçbir yere gidemeyiz, aksiyomlardan öte geçemeyiz, en az bir çıkarım kuralı gerekir.

Çıkarım kurallarını biri dışında hepsini aksiyomlara ekleyebiliriz, ama en az bir çıkarım kuralı elimizde bulunmalı, yoksa sadece aksiyomlarla yetinmek zorunda kalırız.

Matematikçilerin büyük çoğunluğunun kabul ettiği matematik tek bir çıkarım kuralına indirgenebilir. O çıkarım kuralına da ***modus ponens***. La-



* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim üyesi.

tince "doğrulama kipi" demek olan Modus ponens'e göre eğer ζ ve $\zeta \Downarrow \eta$ önermelerini biliyorsak (ya da bu önermeler kanıtlanmışsa) o zaman η önermesini de biliyoruz demektir. Daha güncel bir dille, modus ponens, "eğer ζ doğruysa ve ζ doğru olduğunda η doğru oluyorsa, o zaman η da doğrudur" der. Örneğin modus ponens sayesinde,

Ayşe çarşambaları okulda olur

ve

bugün carsamba

önermelerinden

Ayşe bugün okulda

önermesini çıkarabiliriz.

Ayşe çarşambaları okulda olsa da olmasa da, bugün çarşamba olsa da olmasa da, "*Ayşe çarşambaları okulda olursa ve bugün çarşambaysa*, *Ayşe bugün okuldadır*" önermesi doğrudur.

Modus ponens, ζ ve $\zeta \Downarrow \eta$ önermelerinden yeni bir önerme (η önermesini) çıkarmamızı sağlar. Böylece ζ ve $\zeta \Downarrow \eta$ önermelerini içeren bilindikler listesine η önermesini de ekleyebiliriz.

Çıkarım kuralını değiştirme hakkına sahipiz elbette, ama o zaman çoğunluk matematikçinin kabul ettiği matematiğin dışında bir matematik yapmış oluruz. Nitekim bazı mantıkçılar değişik çıkarım kuralları kullanarak matematik yaparlar. Eğer aksiyomlarınız ve çıkarım kurallarınız standart değilse, bunu makalenizin başında belirtmeniz gerekir ki teoremlerinizi hangi matematik sisteminde kanıtladığınız daha makalenin başında kolayca anlaşılsın.

Genel olarak çıkarım kuralları şöyle ifade edilir: "Eğer $\zeta_1, ..., \zeta_n$ önermeleri teoremse o zaman şu önerme de bir teoremdir." Modus ponens örneğinde $n = 2$ ve modus ponens aynen şunu söyler: "Eğer ζ ve $\zeta \Downarrow \eta$ birer teoremse o zaman η da bir teoremdir."

Diyelim bir aksiyom sistemi ve en az bir çıkarım kuralı kabul ettik. Şimdi bir teoremin ne demek olduğunu görelim. Önce ***kanıt***'ın tanımını yapalım. Bir kanıt her şeyden önce sonlu bir önermeler listesidir. Diyelim şöyle:

$$\zeta_1$$
$$\zeta_2$$
$$...$$
$$\zeta_n$$

Bu listenin bir kanıt olması için şu koşul gerekir: Her ζ_i, ya bir aksiyomdur ya da listede ζ_i'den daha önce yer alan ζ'lardan bir çıkarım kuralıyla elde edilmiştir.

Bir kanıtın en son önermesi, yani ζ_n bir ***teorem***'dir; $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ listesi de ζ_n önermesinin bir ***kanıtı***dır.

Görüldüğü gibi her aksiyom bir teoremdir, tek satırlık bir teorem hem de. İşte ζ aksiyomunun tek satırlık kanıtı:

$$\zeta$$

Eğer ζ ve $\zeta \Downarrow \eta$ önermeleri birer aksiyomsa, o zaman η önermesi bir teoremdir, üç satırlık kanıtı olan bir teorem:

$$\zeta$$
$$\zeta \Downarrow \eta$$
$$\eta$$

Aşağıda okuyacağınız eğlenceli öyküde İngiliz mantıkçısı ve ünlü Alice Harikalar Diyarında'nın yazarı Lewis Carroll, modus ponens'i Aşil'le kaplumbağaya kanıtlattırmaya çalışır. Tabii bu, başka bir çıkarım kuralı olmadan imkânsızdır. ♦