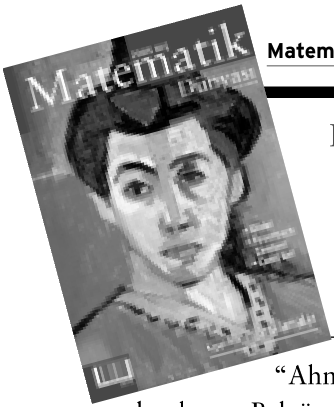


Kapak Konusu: Sıralamalar

Her Şey Sıralanamaz

Ali Nesin* / anesin@bilgi.edu.tr

"Ahmet, Belgün'den daha uzun boyluysa, Belgün de Cemal'den daha uzun boyluysa, Ahmet, Cemal'den daha uzun boyludur," önermesi hiç kuşkusuz doğrudur. Çünkü $A < B$ ve $B < C$ eşitsizliklerinden, $A < C$ eşitsizliği çıkar.

Şu önermeyi ele alalım şimdi: "Ahmet, Belgün'den daha iyi satranç oynuyorsa ve Belgün de Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, Ahmet, Cemal'den daha iyi satranç oynuyordur."

Bu önerme doğru mudur? Ahmet gerçekten Cemal'den daha iyi satranç oynuyorsa, önerme doğrudur elbet. Ama genel olarak, herhangi üç kişi için doğru mudur bu önerme? Bir başka deyişle, A, B ve C herhangi üç kişiyi simgeliyorsa, A, B'den, B de C'den daha iyi satranç oynuyorsa, A, C'den daha iyi satranç oynuyor diyebilir miyiz?

Satranç analizi zor bir oyun. Satranç oynamak yerine zar atalım.

Bir Zar Oyunu. A ve B diye adlandıracağımız iki zarın altı yüzünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	4	5	7	9	12
B:	2	3	6	8	10	11

Bu iki zar birbiriyle "en yüksek sayıyı atma" oyunu oynasa, hangisi daha çok kazanır, yani hangi zarın kazanma olasılığı daha yüksektir? Bu soruyu yanıtlamak için gelebilecek zarları bir tabloyla gösterelim.

	1	4	5	7	9	12
2	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
3	*B*	*A*	*A*	*A*	*A*	*A*
6	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*	*A*
8	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*	*A*
10	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*
11	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*A*

Örneğin, A'ya 9, B'ye 3 geldiği durumu beşinci sütunla ikinci sıranın kesiştiği yerde (gölgelenmiş karede) gösterdik. A'nın B'yi yendiği zar atışlarını A ile, B'nin A'yı yendiği zar atışlarını B ile gösterdik.

Sayıldığında görüleceği gibi, B, A'yı 19 kez yeniyor. Demek ki B'nin A'yı yenme olasılığı 19/36'dır. Ve elbet, A'nın B'yi yenme olasılığı 17/36'dır[1].

Dolayısıyla iki zardan birini seçmek gerekirse B zarını seçmeliyiz, çünkü B zarıyla kazanma olasılığımızı artırmış oluruz. Hatta bu oyunu B zarıyla (A zarına karşı) 36 milyon kez oynayacak olsak, aşağı yukarı 19 milyonunda kazanırız, geriye kalan 17 milyonunda kaybederiz. Sonuç olarak B zarı A zarından daha iyidir.

Bu kez üç zarımız olsun: A, B ve C zarları. Ve zarların üstünde şu sayılar yazılı olsun:

A:	1	5	6	10	13	18
B:	2	3	7	11	16	17
C:	4	8	9	12	14	15

Bu zarlarla C, B'yi 20/36 olasılıkla yener (hesapları okura bırakıyorum.) B de A'yı 19/36 olasılıkla yener. Demek ki C zarı B zarından ve B zarı A zarından daha iyidir. En iyi zarın C olduğu sonucuna varabilir miyiz?

C'yle A'yı birbirleriyle kapıştıracak olursak, C'nin A'yı gerçekten de 21/36 olasılıkla yendiğini görürüz.

Demek C, hem A'yı hem de B'yi yeniyor. Hiç kuşku yok ki bu örnekte C en iyi zardır.

Birinci Soru. Öyle A, B ve C zarları var mıdır ki, A zarı B zarını yensin[2], B zarı C zarını yensin ve C zarı A zarını yensin?

Ayrıca zarların üstünde 18 değişik sayı olsun[3]?

Birinci Sorunun Yanıtı. Evet vardır! Bu zarları bulacağız. Hatta öyle zarlar bulacağız ki, A, B ve C birbirlerini hep aynı sonuçla, 19'a 17 yenecek! Ve atacakları ortalama zar aynı olacak!

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.

1 Eşitlik (yenişememek) olmadığından, bu iki olasılığın toplamı 1 olmalıdır.

2 Olasılık olarak sözediyoruz burda elbet. Yani A'nın B'yi yenme olasılığı 1/2'den büyük olsun.

3 Eğer böyle 18 değişik sayı varsa, dilersek bu sayıları 1'den 18'e kadar alabiliriz.

1'le 18 arasındaki sayıları rastgele bir biçimde A, B ve C'ye dağıtalım. Eğer şanslı bir günümüzdeysek istediğimize ulaşırız. Şansımızı deneyelim. Diyelim A, B ve C'ye şu sayıları dağıttık:

A :	3	5	8	12	14	16
B :	2	4	9	11	13	18
C :	1	6	7	10	15	17

Bu zarları yarıştırırsak şu sonuçları elde ederiz:

A-B : 19–17
B-C : 19–17
C-A : 18–18

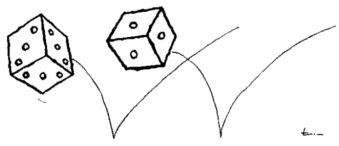
İlk iki karşılaşma istediğimiz gibi, ama son karşılaşma istediğimiz gibi değil. C'nin A'yı yenmesini istiyorduk, oysa yenişemediler. Demek ki C'yi güçlendirip A'yı zayıflatmamız gerekir. A'nın büyük bir sayısını C'nin küçük bir sayısıyla değiştirirsek istediğimiz olur ama, o zaman da istemeden A-B ve B-C sonuçlarını değiştirebiliriz... Bunu engellemeliyiz ama nasıl? A'nın hangi büyük sayısıyla C'nin hangi küçük sayısını değiştirelim ki, A-B ve B-C karşılaşmaları (yani B'nin yaptığı karşılaşmalar) bu değişimden etkilenmesinler. A'nın 8'iyle C'nin 7'sini değiştirirsek, hem C güçlenmiş hem de A zayıflamış olur, hem de A-B ve B-C karşılaşmaları bu değişimden etkilenmezler! Çünkü B'nin bir sayısı 7'den küçükse, 8'den de küçüktür; 8'den küçükse 7'den de küçüktür... Dediğimiz gibi yapalım ve 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim:

A:	3	5	7	12	14	16
B:	2	4	9	11	13	18
C:	1	6	8	10	15	17

Bu yeni zarlarda A-B, B-C ve C-A karşılaşmaları hep aynı sonuçla, 19-17 biter. İstediğimiz gibi A, B, C zarı bulduk.

Okur herhalde ilk denememdeki A, B, C zarlarını rastgele bulduğuma inanmıyor ve bu zarları nasıl elde ettiğimi soruyordur. Okur inanmamakta haklı. İlk zarları nasıl bulduğumu anlatayım.

Herhangi iki zarın 5-6, 7-8 gibi ardışık iki sayıyı paylaşmaları işime gelir. Hatta bunun bir değil iki ardışık sayı çifti için böyle olması daha da iyi olur. Gerekirse birini, gerekirse diğerini güçlendirmek için kullanırım. Böylece yanlışı gidermem kolay olur, çünkü böylece diğer iki karşılaşmanın sonucunu değiştirmeden istediğim karşılaşmanın sonucunu istediğim yönde değiştirebilirim. Bunu biliyorum. Dolayısıyla ilk denememde bunu sağlamaya çalışmalıyım. Sayıları zarlara şöyle dağıtalım:



B:						18
C:					15	17
A:	1			12	14	16
B:	2	4		11	13	
C:	3	5	7	10		
A:		6	8			
B:			9			

Yani şöyle:

A :	1	6	8	12	14	16
B :	2	4	9	11	13	18
C :	3	5	7	10	15	17

Bu zarlar aralarında oynarlarsa her karşılaşma 18-18 berabere biter... Oysa ben - örneğin - A'nın B'yi yenmesini istiyorum. 1'le 2'nin yerlerini değiştirirsem, A'yı güçlendiririm, B'yi zayıflatırım ve C'nin karşılaşmalarının sonuçlarını değiştirmem. Bu değiştirmeyi yapacak olursam A-B karşılaşması istediğim gibi biter ve B-C ve A-C karşılaşmalarında bir değişiklik olmaz. B-C karşılaşmasını B'ye kazandırtmak için 4'le 5'in yerlerini değiştireyim. Böylece B-C karşılaşmasını B kazanır ve A-B karşılaşmasını hâlâ A kazanır, hem de aynı sonuçla. Son olarak, C-A karşılaşmasını C'ye kazandırtmak için 7'yle 8'in yerlerini değiştirebilirim. Sonuç olarak şu zarları elde ederim:

A :	2	6	7	12	14	16
B :	1	5	9	11	13	18
C :	3	4	8	10	15	17

Ve şu sonuçları elde ederiz:

A-B : 19-17
B-C : 19-17
C-A : 19-17

İstediğimiz de buydu zaten. Üstelik her üç zarın ortalama sayısı aynı: 57/6 = 9,5.

İkinci Soru. Aynı şeyi dört zarla yapmaya çalışalım. Üstlerinde 1'den 24'e kadar tüm sayıların bulunduğu öyle dört A, B, C, D zarı bulalım ki A-B, B-C, C-D ve D-A karşılaşmalarının sonucu 19-17 olsun. Ayrıca A-C ve B-D karşılaşmalarının sonucu 18-18 olsun!

İkinci Sorunun Yanıtı. Yukarda anlattığımız yöntemi deneyelim.

Zarları ilk aşamada şöyle dağıtalım:

C:						24
D:					20	23
A:	1			16	19	22
B:	2	5		15	18	21
C:	3	6	9	14	17	
D:	4	7	10	13		
A:		8	11			
B:			12			

Yani zarlarımızın yüzleri şöyle olsun:

A:	1	8	11	16	19	22
B:	2	5	12	15	18	21
C:	3	6	9	14	17	24
D:	4	7	10	13	20	23

Karşılaşmaların sonuçlarını da yazalım:

A-B : 19-17
B-C : 18-18
C-D : 17-19
D-A : 18-18
A-C : 19-17
B-D : 19-17

Tam istediğimiz gibi olmadı ama pek uzak sayılmayız. *A-B* karşılaşması tam istediğimiz gibi sonuçlandı: 19-17. Ama öbür karşılaşmaların hiçbiri istediğimiz gibi sonuçlanmadı. İkinci ve üçüncü karşılaşmalara bakalım ilk olarak. İkinci karşılaşma 18-18 bitmiş, oysa biz *B*'nin 19-17 kazanmasını istiyorduk. Demek ki *B*'yi *C*'den 1 sayı daha güçlü kılmalıyız. Üçüncü karşılaşma 17-19 *D*'nin lehine bitmiş, oysa biz tam tersini istiyorduk. Demek ki *C*'yi *D*'den daha güçlü kılmalıyız. Bu isteklerimizi ilk iki sütunla oynayarak yerine getirebiliriz:

A :	1	8	11	16	19	22
B :	4	5	12	15	18	21
C :	3	7	9	14	17	24
D :	2	6	10	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-B : 19-17
B-C : 19-17
C-D : 19-17
D-A : 18-18
A-C : 19-17
B-D : 18-18

Dördüncü ve beşinci karşılaşmalar hâlâ daha istediğimiz gibi değil. Örneğin *A-C* karşılaşmasını iki sayı farkla *A* kazanmış. Oysa biz bu karşılaşmanın 18-18 berabere bitmesini istiyorduk. Demek ki C'yi *A*'dan 1 puan güçlendirmeliyiz. Bunun için 7'yle 8'in yerlerini değiştirelim. *A-D* karşılaşmasını da yoluna koymak için 10'la 11'in yerlerini değiştirelim. İşte zarlar:

A:	1	7	10	16	19	22
B:	4	5	12	15	18	21
C:	3	8	9	14	17	24
D:	2	6	11	13	20	23

Bu yeni zarlarla sonuçlar şöyle:

A-B : 19-17
B-C : 19-17
C-D : 19-17
D-A : 19-17
A-C : 18-18
B-D : 18-18

Tam istediğimiz gibi... Ayrıca her zarın ortalaması 75/6'dır ve her oyuncu 19 + 19 + 18 sayı elde eder, yani averajda da eşitlik bozulmaz.

Yazının başında sorduğum satranç sorusunun yanıtını hâlâ daha bilmiyorum. Ama yukardaki bulgularım bana satrançta 'daha iyi oyuncu' ilişkisinin bir ***tamsıralama*** olmadığını fısıldıyor. Kimi oyuncu oyun başında, kimi oyuncu oyun ortasında, kimi oyuncuysa oyun sonunda iyi olabilir. Kimi oyuncu savunmada iyidir. Kimisi hırslı oyuncuya karşı daha iyi oynar... Bir satranç oyununu kazandıran (ya da kaybettiren) birçok öğe olduğundan, 'daha iyi satranç oyuncusu' ilişkisinin bir tamsıralama olduğunu hiç sanmıyorum. ♣