Kapak Konusu: Konikler

İkinci Dereceden Eğrilerin Cebirsel Analizi

Ali Özgür Kişisel* / *akisisel@metu.edu.tr*
Ali Nesin** / *anesin@bilgi.edu.tr*

1. Giriş. İkinci dereceden bir eğri ya da bir ***konik***, x ve y koordinatları,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (0)$$

biçiminde iki bilinmeyenli ikinci dereceden bir denklemi sağlayan (x, y) noktalarından oluşur, yani

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

kümesidir.

Buradaki a, b, c, d, e, f katsayıları gerçel sayılardır. Bu katsayıların değerlerine göre eğrinin şekli değişir. Elbette...

Eğer a, b ve c katsayılarının hepsi birden 0'sa denklemimiz $dx + ey + f = 0$ denklemine dönüştüğünden, bu durumda "ikinci dereceden" hakedilmiş bir tamlama olmaz. Dolayısıyla bundan böyle a, b ve c katsayılarından en az birinin 0 olmadığını varsayacağız.

Eğriye (koniğe) $\mathcal{C}$ adını verelim. Aslında $\mathcal{C}$ eğrisi a, b, c, d, e, f katsayılarına göre değiştiğinden, $\mathcal{C}$'den değil $\mathcal{C}_{a,b,c,d,e,f}$ eğrisinden sözetmemiz gerekirdi ama yazılımı fazla ağırlaştırmak istemiyoruz.

Örneğin, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ denklemini sağlayan noktalar kümesi bir koniktir. Ama bu küme boştur, hiç elemanı yoktur!

$x^2 + y^2 = 0$ denklemiyle verilen konik ise sadece $(0, 0)$ noktasından oluşur.

Öte yandan $x^2 - y^2 = 0$ denklemiyle verilen konik $x = y$ ve $x = -y$ doğrularının bileşimidir.

Konikler, yukardaki örneklerdeki gibi birkaç istisna dışında, ***parabol***, ***hiperbol*** ve ***elips*** denen eğrilerdir. Bir sonraki yazıda, a, b, c, d, e, f katsayılarına göre bir koniğin ne zaman parabol, hiperbol ya da elips olduğunu göreceğiz, yani ikinci dereceden eğrileri sınıflandıracağız. Elbette parabol, hiperbol ve elipsi o yazıda yeri geldiğinde tanımlayacağız.

Çemberler elipslerin özel bir halidir. Örneğin

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

denklemi $(0, 0)$ merkezli 1 yarıçaplı birim çemberi verir. Genel olarak (u, v) merkezli ve r yarıçaplı çemberin denklemi

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 - r^2 = 0$$

dir ve bu da iki bilinmeyenli ikinci dereceden bir denklemdir, yani bir koniktir.

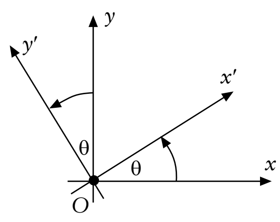
(0) denkleminde b, d ve e yerine $2b$, $2d$, $2e$ yazmak ilerde bize kolaylık sağlayacaktır; öyle yapalım. Bundan böyle

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (1)$$

denklemini sağlayan (x, y) noktalar kümesine bakalım.

Bu denklemle oynayarak (x ve y değişkenleri yerine başka değişkenler alarak) denklemi daha basit bir hale getireceğiz. Olabildiğince fazla katsayının 0 olması, 0 olamıyorsa da 1 olması işimize gelir. Bir sonraki yazıda eğrilerin geometrik analizini yaptığımızda bu bize kolaylık sağlayacak.

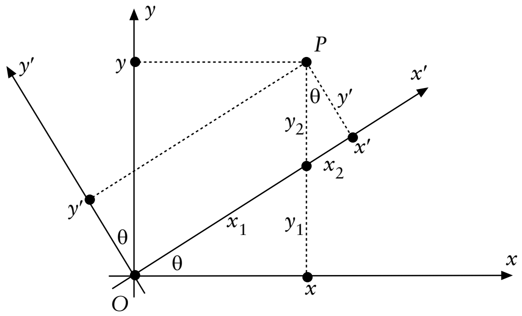
2. xy Terimini Kaybetmek. İlk olarak düzlemi belli bir θ açısıyla döndürerek xy terimini kaybedebileceğimizi, yani b'nin 0 olduğunu varsayabileceğimizi göstereceğiz. Eğriyi döndürmek eğrinin şeklini şemalini değiştirmeyeceğinden, eğer sadece eğrinin geometrik özellikleriyle ilgileniyorsak, ki öyle, bunu yapmaya hakkımız var.



Eğer b katsayısı zaten 0'sa aslında herhangi bir şey yapmamıza gerek yok, ama bu özel durumu şimdilik önemsemeyerek, düzlemi belli bir θ açısıyla döndürdüğümüzde düzlemin noktalarının koordinatlarının nasıl değiştiğine bakalım.

θ, herhangi bir açı ölçüsü olsun. x ve y eksenlerini θ açısı kadar döndürüp yukardaki şekildeki gibi x' ve y' eksenlerini elde edelim. Şimdi düzlemin herhangi bir P noktasının koordinatlarını x ve y eksenlerine ya da x' ve y' eksenlerine göre yazabiliriz. Bu koordinatlara sırasıyla (x, y) ve (x', y') diyelim. Elbette x, x', y, y' ve θ arasında bir bağıntı olmalı;

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi.
* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi.



örneğin x', y' ve θ biliniyorsa x ve y bulunmalı. Bu bağıntıyı bulalım. Yukardaki şekilden takip edin:

$$x = x_1\cos\theta = (x' - x_2)\cos\theta$$
$$= (x' - y'\tan\theta)\cos\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$
$$y = y_2 + y_1 = y'/\cos\theta + x_1\sin\theta$$
$$= y'/\cos\theta + (x' - x_2)\sin\theta$$
$$= y'/\cos\theta + (x' - y'\tan\theta)\sin\theta$$
$$= y'/\cos\theta + x'\sin\theta - y'\sin^2\theta/\cos\theta$$
$$= x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

Demek ki,

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

Şimdi (1) denkleminde x yerine $x'\cos\theta - y'\sin\theta$ ve y yerine $x'\sin\theta + y'\cos\theta$ koyup hangi θ değeri için $x'y'$ monomunun katsayısının sıfırlandığını bulalım.

$$0 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$
$$= a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2$$
$$+ 2b(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta)$$
$$+ c(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + 2d(x'\cos\theta - y'\sin\theta)$$
$$+ 2e(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + f$$
$$= a(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\sin^2\theta)$$
$$+ 2b(x'^2\cos\theta\sin\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'\sin^2\theta$$
$$- y'^2\sin\theta\cos\theta)$$
$$+ c(x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta)$$
$$+ 2d(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + 2e(x'\sin\theta + y'\cos\theta)$$
$$+ f$$
$$= (a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta)x'^2$$
$$+ (-2a\cos\theta\sin\theta + 2b\cos^2\theta - 2b\sin^2\theta$$
$$+ 2c\sin\theta\cos\theta)x'y'$$
$$+ (a\sin^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta)y'^2$$
$$+ (2d\cos\theta + 2e\sin\theta)x' + (2e\cos\theta - 2d\sin\theta)y'$$
$$+ f.$$

Demek ki eğer,

$$a' = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta$$
$$b' = (c - a)\cos\theta\sin\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$c' = a\sin^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$$
$$d' = d\cos\theta + e\sin\theta$$
$$e' = e\cos\theta - d\sin\theta$$
$$f' = f$$

tanımlarını yaparsak, (1) denklemi

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$$

denklemine dönüşür. Şimdi, θ açısını $b' = 0$, yani

$$(c - a)\cos\theta\sin\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \quad (2)$$

eşitliğini sağlayacak biçimde seçersek $x'y'$ teriminden kurtulabiliriz. (2)'yi sağlayan θ'yı bulalım:

$$0 = 2b'$$
$$= 2(c - a)\cos\theta\sin\theta + 2b(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= (c - a)\sin 2\theta + 2b\cos 2\theta.$$

Eğer $b = 0$ ise, $\theta = 0$ alabiliriz. Eğer $b \neq 0$ ise, o zaman, (2)'nin sağlanması için

$$\cot 2\theta = \cos 2\theta/\sin 2\theta = (a - c)/2b$$

olmalı, yani

$$2\theta = \operatorname{arc\,cot}\left(\frac{a-c}{2b}\right) \quad (3)$$

olmalı. Bundan böyle, eğer $b \neq 0$ ise θ'yı (3)'ü sağlayacak biçimde ve eğer $b = 0$ ise θ'yı 0 seçeceğiz. Böylece $x'y'$ teriminin katsayısı olan $b' = 0$ olur.

θ'yı $[0, \pi/2)$ aralığında olacak biçimde seçebileceğimize dikkatinizi çekerim.

Şimdi,

$$K = \frac{a-c}{2b} \quad (4)$$

olsun. Demek ki,

$$\theta = \frac{\operatorname{arc\,cot} K}{2}. \quad (5)$$

Ayrıca $b = 0$ olduğunda $\theta = 0$ almaya karar verdiğimizden, (4) ve (5) formüllerinin $b = 0$ iken de doğru olduğunu varsayabiliriz (o zaman $K = +\infty$ alalım; $a = c$ olsa da!)

Şimdi x ve y eksenlerini θ açısı kadar döndürürsek, yeni x', y' koordinatlarında denklemimiz,

$$a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$a' = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta$$
$$b' = (c - a)\cos\theta\sin\theta + b(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$
$$c' = a\sin^2\theta - 2b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$$
$$d' = d\cos\theta + e\sin\theta$$
$$e' = e\cos\theta - d\sin\theta$$
$$f' = f.$$

3. Notlar. Bu yapılanlara bir iki not düşmek gerekiyor:

Birinci Not. Yukarda a', b', ... katsayılarını a, b, ... katsayıları ve θ cinsinden yazdık. Eğer formüllerde a', b', ... katsayılarıyla a, b, ... katsayılarının yerlerini değiştirir ve θ yerine −θ alırsak o zaman a, b, ... katsayılarını a', b', ... katsayıları cinsinden yazmış oluruz; örneğin,

$a = a'\cos^2\theta - 2b'\cos\theta\sin\theta + c'\sin^2\theta$
$b = (a' - c')\cos\theta\sin\theta + b'(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$
$c = a'\sin^2\theta + 2b'\sin\theta\cos\theta + c'\cos^2\theta$
vb.

İkinci Not. a' ve c' katsayılarının her ikisi de 0 olamaz, çünkü o zaman $a' = b' = c' = 0$ olur ve bir üstteki formüllerden $a = b = c = 0$ çıkar.

Üçüncü Not. Eğer $a' = 0$ ise o zaman $c' \neq 0$ olmalı ve düzlemi bir kez daha $\theta = \pi/2$ açısıyla döndürürsek, yukardaki formüllerden anlaşılacağı üzere a' ile c' katsayılarının rolleri değişir (ama b' gene 0 kalır.) Demek ki $a' \neq 0$ varsayımını yapabiliriz. Birazdan $a' \neq 0$ eşitsizliğini varsayacağız. O zaman, $\theta \in [0, \pi/2)$ yerine $\theta \in [0, \pi)$ varsayımını yapmak zorunda kalacağız.

Dördüncü Not. Yukardaki altı formülü matris biçiminde yazarak tek bir formüle indirgeyebiliriz:

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \\ e' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Hatta daha da basit olarak,

$$\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & e' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

Matrisleri bilmeyen okur rahatlasın, bu bilgi ilerde kullanılmayacak.

Beşinci Not. Uzun gibi görünen ama o kadar da uzun olmayan bir hesapla $b'^2 - a'c' = b^2 - ac$ eşitliği bulunur. Matrisleri bilen okur bu eşitliği yukardaki matris çarpımından da hemen çıkarabilir. Yani $b^2 - ac$ değeri bu dönüşümün bir değişmezidir. Bu değişmezin geometrik anlamını ortaya koyalım: Denklemi bir kez daha yazalım:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (1)$$

Bu denklem,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$$

denkleminde $z = 1$ koyularak elde edilir. Eğer bu son denklemde $z = 0$ alırsak, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ denklemini elde ederiz, ki $4(b^2 - ac)$ sayısı bu ikinci dereceden denklemin diskriminantıdır.

$b^2 - ac$ değişmezini elde etmenin bir başka yolu da şöyle. (1) denklemini y^2'ye bölelim:

$$ax^2/y^2 + 2bx/y + c + 2dx/y^2 + 2e/y + f/y^2 = 0$$

elde ederiz. Şimdi $x = yz$ yazalım:

$$az^2 + 2bz + c + 2dz/y + 2e/y + f/y^2 = 0$$

elde ederiz. Son olarak y'yi sonsuza götürelim. O zaman en sondaki üç terim kaybolur ve gene

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

denklemini elde ederiz. $4(b^2 - ac)$ sayısı bu ikinci dereceden denklemin diskriminantıdır.

4. θ'yı Bulmak. (Dileyen okur bu bölümü atlayabilir.) Eğer $\cos\theta$ ve $\sin\theta$'yı a, b, c, d, e, f cinsinden veren formülleri bulursak o zaman yukardaki denklemleri kullanarak yeni a', c', d', e', f' katsayılarını a, b, c, d, e, f cinsinden veren formülleri bulabiliriz. Şimdi bunu yapalım. $\cos\theta$ ve $\sin\theta$'yı a, b, c cinsinden yazacağız. Her x için geçerli olan

$$\cos(\operatorname{arc}\cot x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

eşitliğinden ve (5)'ten

$$\cos(2\theta) = \cos(\operatorname{arc}\cot K) = \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}$$

eşitliği çıkar. Eğer

$$L = \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}$$

tanımını yaparsak,

$$\cos(2\theta) = L$$

olur ve buradan da

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+L}{2}}$$

ve

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-L}{2}}$$

elde edilir. Bu formüller sayesinde yeni a', c', d', e', f' katsayıları eski a, b, c, d, e, f katsayıları cinsinden bulunabilir.

Alıştırmalar.

1. Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın.

$$\cot\theta = \sqrt{1+K^2} + K$$
$$\tan\theta = \sqrt{1+K^2} - K$$

Not: $\theta \in [0, \pi/2)$ koşulumuzu unutmayın.

2. $q = \cot\theta$ ya da $q = -\tan\theta$ olsun. O zaman $x = qx' - y$ ve $y = x' + qy'$ dönüşümleri yapılırsa $x'y'$ teriminin kaybolacağını kanıtlayın.

5. x ve y'yi Kaybetmek. Şimdi

$$a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0$$

denkleminden x' ve y' monomlarını kaybetmeye çalışacağız. Bunun için x' ve y' eksenlerini belli bir vektör doğrultusunda öteleyeceğiz ve denklemimizi bu yeni koordinat sisteminde yazacağız. Yukarda eksenleri θ açısıyla döndürürken yaptığımız gibi, $x' = X + r$ ve $y' = Y + s$ yazıp, eğrinin denklemindeki x' ve y' değişkenlerini X ve Y değişkenlerine dönüştürebilir ve X ve Y terimlerinin katsayılarının 0 olması için gereken r ve s değerlerini bulabiliriz. Ama biz lise eğitiminde de sık sık kullanılan "kareye tamamlama" yöntemini yeğleyeceğiz.

Bundan böyle $a' \neq 0$ eşitsizliğini varsayacağız. Yukardaki üçüncü notta bunu varsayabileceğimizi göstermiştik. Bu varsayımla hesaplayalım:

$$\begin{aligned} 0 &= a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' \\ &= a'(x'^2 + 2d'x'/a') + c'y'^2 + 2e'y' + f' \\ &= a'(x'^2 + 2d'x'/a' + d'^2/a'^2) \\ &\qquad + c'y'^2 + 2e'y' + f' - d'^2/a' \\ &= a'(x' + d'/a')^2 + c'y'^2 + 2e'y' + f' - d'^2/a'. \end{aligned}$$

Demek ki

$$X = x' + d'/a'$$

dönüşümünü yaparsak,

$$a'X^2 + c'y'^2 + 2e'y' + f' - d'^2/a'.$$

denklemine varırız ve böylece x' terimi kaybolur.

Eğer $c' \neq 0$ ise, yukardakine benzer bir dönüşümle y' terimini de kaybederiz:

$$\begin{aligned} 0 &= a'X^2 + c'y'^2 + 2e'y' + f' - d'^2/a' \\ &= a'X^2 + c'(y'^2 + 2e'y'/c') + f' - d'^2/a' \\ &= a'X^2 + c'(y'^2 + 2e'y'/c' + e'^2/c'^2) \\ &\qquad + f' - d'^2/a' - e'^2/c' \\ &= a'X^2 + c'(y' + e'/c')^2 + f' - d'^2/a' - e'^2/c'. \end{aligned}$$

Demek ki

$$Y = y' + e'/c',$$

dönüşümünü ve $f'' = d'^2/a' + e'^2/c' - f'$ tanımını yaparsak,

$$a'X^2 + c'Y^2 = f''$$

formülüne ulaşırız. Eğer $f'' = 0$ ise, denklem,

$$X^2 + (c'/a')Y^2 = 0$$

denklemine dönüşür. Eğer $f'' \neq 0$ ise, $A = a'/f'' \neq 0$ ve $C = c'/f''$ tanımlarını yaparak,

$$AX^2 + CY^2 = 1$$

denklemini buluruz.

Eğer $c' = 0$ ise ne yapmalıyız? Eğer $c' = 0$ ise, o zaman denklemimiz,

$$a'X^2 + 2e'y' + f' - d'^2/a' = 0$$

biçiminde yazılır ve $e' = 0$ şıkkı hariç y' terimini kaybetmenin imkânı yoktur. Eğer $e' = 0$ ise, F'yi gerektiği gibi tanımlarsak $X^2 = F$ biçiminde bir denklem ederiz. Öte yandan eğer $e' \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} Y &= y' - (d'^2/a' - f')/2e' \\ X &= x' + d'/a' \\ A &= -a'/2e' \neq 0 \end{aligned}$$

dersek,

$$Y = AX^2$$

denklemini elde ederiz. Bulduklarımızı yazalım.

Teorem. *a, b, c, d, e, f gerçel sayılar olsun, ama a, b ve c'nin hepsi birden 0 olmasın. x ve y eksenlerini belli bir $\theta \in [0, \pi)$ açısıyla döndürür ve belli bir vektör doğrultusunda ötelersek,*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

denklemi, bu yeni koordinat sisteminde, $A \neq 0$, C ve F sabitleri için,

$$X^2 + CY^2 = 0,$$

$$X^2 = F,$$

$$AX^2 + CY^2 = 1,$$

ya da

$$Y = AX^2$$

şekillerinden birini alır.

Böylece içinde tam altı tane sabit bulunan

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

denklemi düzlemin mesafeyi değiştirmeyen dönüşümleriyle (ki bu tür dönüşümlere ***izometri*** denir) içinde en fazla iki tane sabit bulunan oldukça basit bir denkleme dönüşür. Bir sonraki yazıda bu yaptıklarımızın yararlarını göreceğiz.

Alıştırmalar

1. $4x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 4y + 1 = 0$ denkleminin izometrilerle $y + 5x^2 = 0$ denklemine dönüştürülebileceğini kanıtlayın.

2. Eğer $a = c \neq 0$ ise, $ax^2 + bxy + ay^2 + dx + ey + f = 0$ denkleminin bir çember olduğunu kanıtlayın. Her çemberin denkleminin böyle olduğunu kanıtlayın.

3. Teoremde verilen eğrilerden hangileri sınırlı bir alan kaplar? Teoremde verilen eğrilerden hangileri doğrulardan oluşur?

4. İkinci dereceden bir eğrinin iki noktası varsa sonsuz tane noktası olduğunu kanıtlayın. ♥