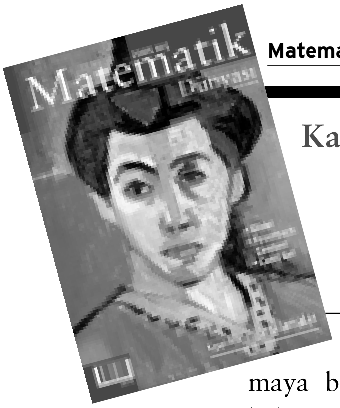


Kapak Konusu: Sıralamalar

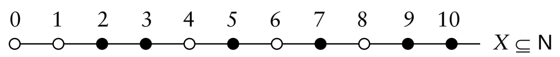
İyisıralamaları Hissetmek

İyisıralamayı koyun sıralamaya benzetmek pek yanlış olmaz. Sonsuz sayıda koyun da olsa, iyisıralanmış bir koyun sürüsünde mutlaka birinci koyun olmalı. İkinci, üçüncü, dördüncü koyun da... Son koyun dışında (eğer varsa öyle bir koyun!), her koyundan hemen sonra gelen ilk koyun olmalı. Dahası, sürü öyle sıralanmalı, yani koyunlar öyle numaralanmalı ki, her altsürüde numarası en küçük bir koyun olsun... İşte bu son özelliği sağlayan sıralamalara ***iyisıralama*** denir.

Sonlu bir sürüyü iyisıralamak marifet sayılmaz, bunu mühendisler bile yapar. Az sonsuz (örneğin doğal sayılar kadar sonsuz olan) sürüleri iyisıralamak da marifet sayılmaz. Marifet, çok sonsuz (örneğin gerçel sayılar kadar olan) sürüleri iyisıralamakta. Bu ve bundan sonraki sayıların kapak konularının ana sorularından biri de işte bu: Bir sürü ne kadar büyük olursa olsun iyisıralanabilir mi?

Küçükbaşlardan muaf ağırbaşlı matematiksel tanımı birazdan vereceğiz. Önce bir teorem:

Teorem 1. $\mathbb{N}$*'nin boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır.*



Siyah noktalar X'in elemanlarıdır.
$X = \{2, 3, 5, 7, 9, 10, ...\}$.
Bu örnekte, 2, X'in en küçük elemanıdır.

Kanıt: $X \subseteq \mathbb{N}$, en küçük elemanı olmayan bir küme olsun. X'in boşküme olduğunu kanıtlayacağız. Önce n üzerine tümevarımla şu A_n önermesini kanıtlayalım:

A_n : *n'den küçük hiçbir doğal sayı X'te değildir.*

Bu önermeyi daha matematiksel olarak şöyle yazabiliriz:

$$A_n : \forall m\ ((m \in \mathbb{N} \wedge m < n) \to m \notin X).$$

A_0 önermesi doğrudur, çünkü (X'te olsun ya da olmasın) 0'dan küçük bir doğal sayı yoktur, dolayısıyla X'te 0'dan küçük bir doğal sayı olamaz. Bu ilk aşamayı başarıyla geçtikten sonra önermenin n için doğru olduğunu varsayıp $n + 1$ için doğru olduğunu kanıtlayalım, yani A_n'yi varsayıp A_{n+1}'i kanıtlayalım. Demek ki X'te n'den küçük bir doğal sayı olmadığını varsayıp X'te $n + 1$'den de küçük bir doğal sayı olmadığını kanıtlayacağız. Eğer bu yanlış olsaydı, yani X'te n'den küçük olmayan ama $n + 1$'den küçük olan bir doğal sayı olsaydı, o zaman bu sayı ancak n olabilirdi ve o zaman da n, X'in en küçük sayısı olurdu, ki varsayıma göre X'te en küçük eleman yok. Demek ki A_n önermesi doğruysa A_{n+1} önermesi de doğrudur. Böylece her n için A_n'nin doğru olduğunu kanıtlamış olduk.

Şimdi, eğer X boşküme olmasaydı, diyelim $m \in X$ olsaydı, o zaman A_{m+1} yanlış olurdu. Bu bir çelişkidir. Demek ki X boşkümedir. □

İyisıralama. ($\mathbb{N}$, <) sıralamasında olduğu gibi, boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı olduğu sıralamalara *iyisıralama* denir. Matematiksel tanım aşağıda.

X bir küme olsun. Ayrıca X'in üstünde < simgesiyle göstereceğimiz bir sıralama olsun. Yani < ikili ilişkisinin şu iki özelliği olsun:

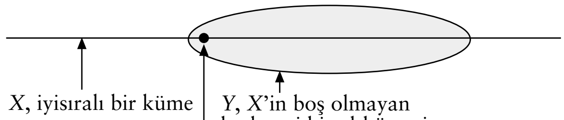
S1. *Hiçbir $x \in X$ için $x < x$ olamaz.*

S2. *Her $x, y, z \in X$ için, eğer $x < y$ ve $y < z$ ise, $x < z$'dir.*

Bazı sıralamaların şu özelliği vardır:

İS. *Her $\emptyset \neq A \subseteq X$ altkümesi için, öyle bir $a \in A$ vardır ki her $x \in A$ için $a \leq x$.*

Yukardaki özellik, X'in boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı olduğunu söylüyor.



İS özelliğini sağlayan (X, <) sıralamalarına ***iyisıralama*** denir. X de < sıralamasıyla ***iyisıralanmıştır***.

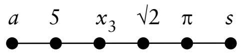
Tanımdan hemen anlaşılacağı üzere, bir iyisıralamanın her altkümesi de bir iyisıralamadır, yani (X, <) bir iyisıralamaysa ve $Y \subseteq X$ ise, (Y, <) de bir

İmkânsız Uğraş

Okur, konunun zevkine daha çok varmak için doğal sayılar kümesinin altkümelerinin kümesi olan $\wp(\mathbb{N})$'nin bir iyisıralamasını bulmaya çalışmalıdır. En az yarım saat kadar. En fazla da bir saat... Bir saati aşmasın çünkü - önceden söyleyelim - başaramayacaktır. $\wp(\mathbb{N})$'nin bir iyisıralaması bulunamaz ama vardır. $\wp(\mathbb{N})$'nin iyisıralanabilceğini (iyisıralamayı bulamadan) bir sonraki sayıda yeni bir belit (aksiyom) yardımıyla kanıtlayacağız.

iyisıralamadır; sonuçta, Y'nin her altkümesi X'in de bir altkümesidir.

İyisıralı kümeler tamsıralıdır, yani iyisıralı bir kümenin herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir. Nitekim, eğer x ve y iyisıralı bir kümenin iki elemanıysa ve İS özelliğinde $A = \{x, y\}$ alırsak, x ve y'den birinin diğerinden küçükeşit olduğunu görürüz.



Sonlu bir iyisıralama:
$a \bullet 5 \bullet x_3 \bullet \sqrt{2} \bullet \pi \bullet s$

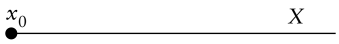
Sonlu her tamsıralama iyisıralama olmak zorundadır elbette. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin doğal sıralamasıyla birlikte bir iyisıralama olduğunu yukardaki teoremde gördük. Doğal sıralamayla iyisıralanmış bir küme olarak görüldüğünde $\mathbb{N}$ yerine ω (omega, Yunan alfabesinin son harfi) yazmak bir gelenektir; biz de bundan böyle $\mathbb{N}$ yerine ω yazacağız.

Bu yazıda iyisıralamaları biraz olsun anlamaya çalışacağız.

$(X, <)$ herhangi bir iyisıralama olsun.

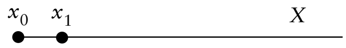
Eğer $X = \varnothing$ ise söylenecek fazla bir şey yok, boşküme hakkında ne söylenebilirse, bu iyisıralama hakkında da o söylenebilir.

Eğer $X \neq \varnothing$ ise, o zaman İS özelliğinde $A = X$ alarak, X'in bir en küçük elemanı olduğunu görürüz. X'in bu en küçük elemanına x_0 diyelim. (Demek ki boş olmayan her iyi sıralamanın bir en küçük elemanı vardır.)



$(X, <)$ iyisıralaması ve X'in en küçük elemanı x_0

Şimdi $X \setminus \{x_0\}$ kümesine bakalım. Eğer bu küme boşsa, o zaman X sadece x_0 elemanından oluşmuştur ve gene söyleyecek fazla bir şey olamaz. Eğer $X \setminus \{x_0\}$ kümesi boş değilse, o zaman İS özelliğinde $A = X \setminus \{x_0\}$ alalım ve bu kümenin en küçük elemanına x_1 diyelim. x_1, x_0'dan sonra gelen ilk elemandır.

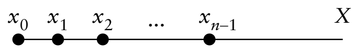


$(X, <)$ iyisıralaması ve X'in en küçük iki elemanı x_0 ve x_1

Eğer $X = \{x_0, x_1\}$ ise, X iyisıralaması için tek söyleyebileceğimiz şey, x_0'ın x_1'den küçük olduğudur. Diyelim X sadece bu iki elemandan ibaret değil. O zaman $X \setminus \{x_0, x_1\}$ kümesi boş olmadığından, İS özelliğine göre bu kümenin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_2 diyelim. x_2, x_1'den sonra gelen ilk elemandır.

$(X, <)$ iyisıralaması ve X'in en küçük üç elemanı x_0, x_1 ve x_2

Bunu böylece sürdürebiliriz. n-inci aşamada, X'in en küçük ilk n elemanını bulduk diyelim. Bu elemanlara (sırasıyla!) $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ diyelim.



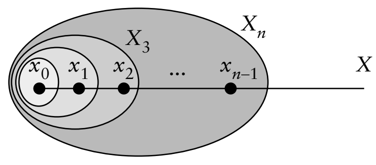
Şimdi,

$$X_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

tanımını yapalım. Demek ki

$$X_0 = \varnothing,$$
$$X_1 = \{x_0\}$$
$$X_2 = \{x_0, x_1\}$$
$$X_3 = \{x_0, x_1, x_2\}$$

vb.



Eğer $X \neq X_n$ ise, yani $X \setminus X_n \neq \varnothing$ ise, o zaman İS özelliğine göre $X \setminus X_n$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_n diyelim. x_n, x_{n-1}'den sonra gelen ilk elemandır.

X'in tüm elemanlarını bu yöntemle sonlu bir zaman sonra tüketirsek, yani belli bir n doğal sayısı için,

$$X = X_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$$

ise, o zaman X sonlu bir kümedir (tam n elemanı vardır) ve sıralaması doğal sıralanmış

$$\{0, 1, ..., 2, n - 1\}$$

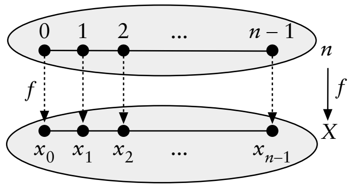
kümesinden pek farklı değildir. Doğal sıralanmış $\{0, 1, ..., 2, n - 1\}$ kümesinin n olarak simgelenmesi okuru şaşırtıyorsa, şaşırtmasın:

$$n = \{0, 1, ..., 2, n - 1\}$$

ve

$$0 < 1 < .... < n - 1.$$

X'in sonlu tane, diyelim n tane elemanı varsa, yukarda da dediğimiz gibi, X iyisıralaması aynen n iyisıralanmasına benzer, elemanların adlarından başka aralarında bir fark yoktur. Daha matematiksel deyişle n'den X'e giden ve sıralamayı koruyan (yani sürekli artan) bir f eşlemesi vardır. Bu f eşlemesi i sayısını x_i elemanına götürür, yani her $i < n$ için, $f(i) = x_i$'dir. (Burada x_i, X'in i-inci elemanıdır.)

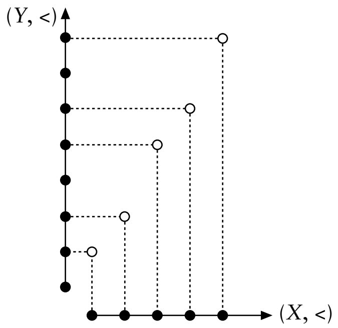


Eğer X'in n elemanı varsa, $X \approx n$

Sıralamayı bozmayan fonksiyonlara ***eşyapı fonksiyonu*** ya da ***sıralama morfizması*** adı verilir; tatil günlerinde kısaca ***morfizma*** dendiği de olur. Matematiksel tanım şöyle: $(X, <)$ ve $(Y, <)$ birer iyisıralama olsunlar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu, her x_1, $x_2 \in X$ için,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

özelliğini sağlasın. O zaman f'ye ***sıralama morfizması*** adı verilir. Okullarda sıralama morfizması daha çok ***artan fonksiyon*** adıyla anılır.



Bir sıralama morfizması

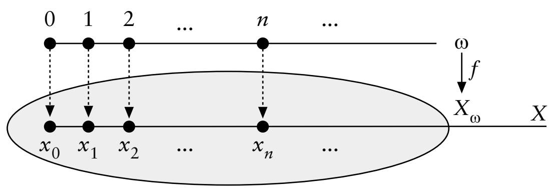
İyisıralanmış kümeler üzerine sıralama morfizmaları birebir olmak zorundadır, çünkü iyisıralı bir küme tamsıralıdır. Nitekim, $f(x_1) = f(x_2)$ ise ne $x_1 < x_2$ ne de $x_2 < x_1$ doğru olabilir, dolayısıyla, tamsıralamadan dolayı, $x_1 = x_2$ olmalı.

Eğer f sıralama morfizması ayrıca örtense, o zaman f'ye ***sıralama eşlemesi*** denir. Aralarında bir eşyapı eşlemesi olan $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iyisıralamalarına ***eşyapısal*** (ya da ***izomorfik***) denir ve bu olgu $(X, <) \approx (Y, <)$ ya da kısaca $X \approx Y$ olarak gösterilir.

Demek ki tam n tane elemanı olan iyisıralı bir kümeyle $n = \{0, 1, ..., 2, n - 1\}$ iyisıralaması eşyapısaldır. Böylece sonlu iyisıralamaları anlamış olduk. Sıra geldi sonsuz iyisıralamalara...

Bundan böyle X sonlu olmasın. O zaman her n doğal sayısı için X'in n-inci elemanı vardır. Bu elemana x_n demiştik.

X'in sonlu olmadığını varsayalım bundan böyle ve bu x_n elemanlarından ($n \in \mathbb{N}$) oluşan kümeye X_ω adını verelim. X_ω'nın aynen $\mathbb{N}$'ye (daha doğrusu ω'ya) benzediğini okur anlamıştır herhalde, yani X_ω ile ω (yani doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$) arasında bir sıralama eşlemesi vardır: $X_\omega \approx \omega$.

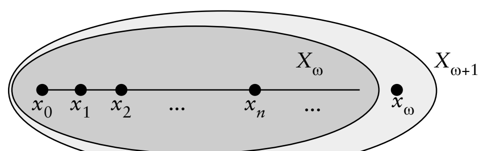


$X_\omega = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \approx \omega$

> X_ω'nın gerçekten bir küme olduğu pek bariz olmayabilir. MD-2003-IV sayımızın 49'uncu sayfasında kümeler kuramının birkaç basit belitini vermiştik. Bu belitlere dayanarak X_ω'nın küme olduğunu kanıtlayabiliriz:
>
> $\varphi(x)$ şu özellik olsun: "$\{y \in X : y < x\}$ kümesiyle bir doğal sayısı arasında bir eşleme var."
>
> Şimdi, $X_\omega = \{x \in X : \varphi(x)\}$ eşitliğinden dolayı, X_ω bir kümedir. (Bkz. Tanımlanabilir Altküme Beliti, MD-2003-IV, sayfa 49.)

İki seçenek var. Ya $X = X_\omega \approx \omega$ ya da $X \neq X_\omega$. Birinci şıkta X'in neye benzediği belli, ω'ya benzer. İkinci şıkta yoğunlaşalım. O zaman $X \setminus X_\omega$ boşküme değildir, dolayısıyla en küçük bir elemanı vardır. Bu elemana x_ω diyelim. x_ω elemanı daha önce bulduğumuz bütün x_n ($n \in \mathbb{N}$) elemanlarından **hemen** sonra gelen **ilk** elemandır, yani x_ω elemanı, her n doğal sayısı için, $x_n < x$ eşitsizliğini sağlayan X'in en küçük elemanıdır.

$X_{\omega+1} = X_\omega \cup \{x_\omega\}$ olsun. Burada $\omega+1$ simgesine özel bir anlam vermeye çalışmayın, $\omega+1$'i daha sonra tanımlayacağız. Şimdilik $\omega+1$ simgesini tek bir simge gibi algılayıp $X_{\omega+1}$ iyisıralamasına yoğunlaşın: $X_{\omega+1}$ iyisıralaması, X_ω iyisıralamasının 'sonuna' x_ω elemanı eklenerek elde edilmiştir.

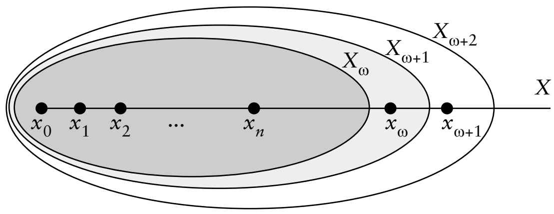


Eğer x_ω, X'in son elemanıysa, yani X'te x_n'lerden ve x_ω'dan başka eleman kalmamışsa, o zaman $X = X_\omega \cup \{x_\omega\} = X_{\omega+1}$'dir. Bu durumda, X'i ve sıralamasını anladık: X, sonuna bir eleman eklenen ω'ya benziyor. (Bir sonraki yazıda bir iyisıralamanın sonuna bir eleman eklemenin ne demek olduğunu daha ayrıntılı bir biçimde anlatacağız.)

Eğer x_ω, X'in son elemanı değilse, yani $X \neq X_{\omega+1}$ ise, o zaman $X \setminus X_{\omega+1} \neq \emptyset$ ve $X \setminus X_{\omega+1}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana, tahmin edeceğiniz gibi, $x_{\omega+1}$ diyelim. $x_{\omega+1}$, x_ω'dan sonra gelen ilk elemandır. Gene tahmin edeceğiniz gibi

$$X_{\omega+2} = X_{\omega+1} \cup \{x_{\omega+1}\} = X_\omega \cup \{x_\omega, x_{\omega+1}\}$$

olsun.



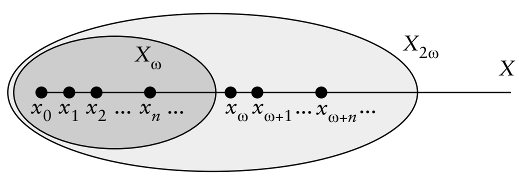
Genel olarak, bir n doğal sayısı için, X'in

$$X_{\omega+n} = X_\omega \cup \{x_\omega, x_{\omega+1}, ..., x_{\omega+n-1}\}$$

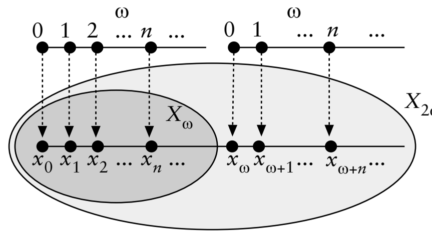
altkümesini bulduğumuzu varsayalım. Eğer belli bir n doğal sayısı için $X = X_{\omega+n}$ ise ne âlâ, X'i anladık demektir. Eğer $X_{\omega+n} \neq X$ ise $X \setminus X_{\omega+n}$ kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana $x_{\omega+n}$ diyelim. Eğer hiçbir n doğal sayısı için $X \neq X_{\omega+n}$ ise o zaman bu yöntemle X'i tüketemeyiz ve sürekli $x_{\omega+n}$ elemanlarını buluruz.

$$X_{2\omega} = X_\omega \cup \{x_{\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun.

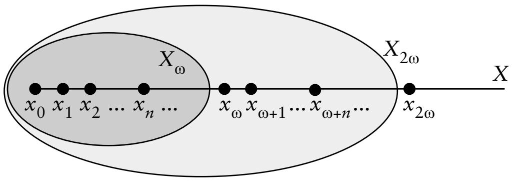


$X_{2\omega}$ sıralamasının nasıl bir sıralama olduğu belli. Başında ω (yani $\mathbb{N}$) var. Bir de sonunda ω var. Demek ki $X_{2\omega}$, ω'nın (yani doğal sayılar kümesinin) iki ayrık kopyasından oluşuyor, biri ba-



şında (küçükler), diğeri sonunda (büyükler).

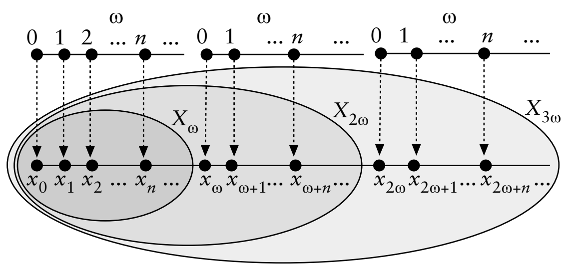
Eğer $X = X_{2\omega}$ ise, işimiz bitti, o zaman X'i ve iyisıralamasını anladık. Eğer $X \neq X_{2\omega}$ ise, o zaman $X \setminus X_{2\omega}$ kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana $x_{2\omega}$ diyelim.



Bunu böylece sürdürebiliriz. X'te $x_{2\omega}$'dan daha büyük bir eleman varsa, $x_{2\omega}$'dan daha büyük elemanların en küçüğüne $x_{2\omega+1}$ diyelim. Varsa, malum yöntemle $x_{2\omega+2}$, $x_{2\omega+3}$, ... elemanlarını bulalım. Eğer X'in sonuna varırsak işimiz biter. Yoksa,

$$X_{3\omega} = X_{2\omega} \cup \{x_{2\omega+n} : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Eğer $X = X_{3\omega}$ ise o zaman X, ω'nın üç kopyasından oluşuyor demektir: küçük kopya, ortanca kopya, üçüncü kopya.



Kendimizi biraz fazla tekrarlamaya başladık... k-inci seviyeye kadar, yani $X_{k\omega}$'ya kadar geldiğimizi varsayalım. $X_{k\omega}$, sıralama olarak ω'nın k tane kopyasına benzer: 1'inci kopya, 2'inci kopya, ..., k-

$X_{2\omega}$'nın bir küme olduğu MD-2003-IV'teki belitler yardımıyla kanıtlanabilir. Konumuzdan sapmamak için bunu kanıtlamayacağız. Ama ilerde $\omega 2$ ordinalinin tanımını okuyan okur, X_ω'nın bir küme olduğunu gösterdiğimiz yöntemle $X_{2\omega}$'nın da küme olduğunu kanıtlayabilir.

Başlangıç Dilimi

$(X, <)$ bir tamsıralama olsun. $I \subseteq X$ bir altküme olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

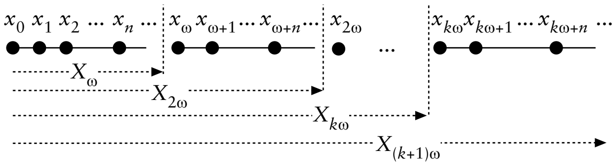
$$y < x \in I$$

koşulları doğru olduğunda,

$$y \in I$$

oluyorsa, I'ye ***başlangıç dilimi*** (İngilizcesi *initial segment*) adı verilir. Yukarda bulunan her X_α kümesi X'in bir başlangıç dilimidir.

inci kopya. Her kopya kendi içinde doğal sıralanmıştır ve her kopyanın tüm elemanları daha sonraki kopyaların tüm elemanlarından daha küçüktür. Örneğin üçüncü kopyanın 25'i, dördüncü kopyanın 2'sinden daha küçüktür.



Eğer $X_{k\omega} = X$ ise işimiz bitti. Yoksa $X \setminus X_{k\omega}$ kümesinin en küçük bir elemanı olmalı. Bu elemana $x_{k\omega}$ diyelim. $x_{k\omega}$'dan hemen sonra gelen elemana $x_{k\omega+1}$ diyelim. (Eğer $x_{k\omega}$, X'in en büyük elemanı değilse böyle bir eleman vardır.) Devam edip $x_{k\omega+2}$, $x_{k\omega+3}$, ... elemanlarını da (varsa!) bulabiliriz. X'te eleman kaldığı sürece devam edelim. Eğer $x_{k\omega+n}$ elemanlarının hiçbiri X'in en büyük elemanı değilse (k sabit, n değişiyor) bu yöntemi hiç durmadan sürdürebiliriz. $X_{(k+1)\omega}$ şimdiye kadar bulduğumuz tüm elemanların kümesi olsun. ($X_{(k+1)\omega}$ bir kümedir, güvenin bana!) Eğer $X = X_{(k+1)\omega}$ ise, durmak zorundayız ve bu durumdan pek yakınmıyoruz herhalde. Ama eğer $X \neq X_{(k+1)\omega}$ ise, o zaman boş olmayan $X \setminus X_{(k+1)\omega}$ kümesinin en küçük elemanına $x_{(k+1)\omega}$ diyelim ve mümkün olduğu sürece bu yöntemle yolumuza devam edelim. Böylece her k doğal sayısı için $X_{k\omega}$ kümelerini elde ettiğimizi ama X'in bu yöntemle tükenmediğini varsayalım.

X_{ω^2}, tüm bu $X_{k\omega}$ kümelerinin birleşimi olsun:

$$X_{\omega^2} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_{k\omega}.$$

Eğer $X_{\omega^2} = X$ ise sorun yok. Eğer $X_{\omega^2} \neq X$ ise $X \setminus X_{\omega^2}$ kümesinin en küçük elemanına x_{ω^2} diyelim. $X_{\omega^2+1} = X_{\omega^2} \cup \{x_{\omega^2}\}$ olsun.

Eğer X'te başka eleman kalmamışsa o zaman $X = X_{\omega^2+1}$'dır. Kalmışsa, x_{ω^2}'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_{ω^2+1} adını verelim. Eğer X'in elemanları bitmezse, X'in

$$x_{\omega^2+1},\ x_{\omega^2+2},\ x_{\omega^2+3},\ x_{\omega^2+4},\ \ldots$$

elemanlarını bulabiliriz.

$X_{\omega^2+\omega}$ kümesi X'in şimdiye kadar bulabildiğimiz tüm elemanları olsun.

$$x_{\omega^2+\omega},\ x_{\omega^2+\omega+1},\ x_{\omega^2+\omega+2},\ x_{\omega^2+\omega+3},\ \ldots$$

elemanlarının nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir: Her biri bir öncekinden hemen sonra gelen elemandır. Bu $x_{\omega^2+\omega+k}$ elemanlarının sonu gelmiyorsa, tüm bu elemanlar kümesine $X_{\omega^2+2\omega}$ diyelim.

Okur herhalde, eğer X tükenmezse,

$$X_{\omega^2+3\omega},\ X_{\omega^2+4\omega},\ X_{\omega^2+5\omega},\ \ldots$$

kümelerinin nasıl bulunduklarını anlamıştır. Bunların birleşimine $X_{2\omega^2}$ diyelim. Gidebildiğimiz kadar gidelim. Eğer X tükenmezse, sırayla

$$X_{2\omega^2},\ X_{3\omega^2},\ X_{4\omega^2},\ \ldots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların birleşimine de X_{ω^3} diyelim. Eğer X daha önce tükenmezse, X'in

$$X_{\omega^3},\ X_{\omega^4},\ X_{\omega^5},\ \ldots$$

kümelerini elde ederiz. Bunların birleşimine de X_{ω^ω} diyelim.

Ardından sırayla X_{ω^ω}, $X_{2\omega^\omega}$, $X_{3\omega^\omega}$, ... altkümelerini de bulabiliriz. Bunların birleşimine $X_{\omega\omega^\omega}$, ya da $X_{\omega^{\omega+1}}$ diyelim. Bundan sonra $X_{\omega^{\omega+2}}$, $X_{\omega^{\omega+3}}$, $X_{\omega^{\omega+4}}$ altkümeleri (başlangıç dilimleri) bulunur. Devam edelim ve tüm bu altkümelerin birleşimine $X_{\omega^{\omega+\omega}}$ ya da $X_{\omega^{2\omega}}$ diyelim. Devam edelim. Sırayla $X_{\omega^{3\omega}}$, $X_{\omega^{4\omega}}$, $X_{\omega^{4\omega}}$,... altkümelerini de bulruuz. Bunların birleşimine $X_{\omega^{\omega\omega}}$ ya da $X_{\omega^{\omega^2}}$ diyelim. Eğer X'i hala daha bitirememişsek, $X_{\omega^{\omega^3}}$, $X_{\omega^{\omega^4}}$, $X_{\omega^{\omega^5}}$, ... altkümelerini de bulabiliriz. Bunların birleşimine $X_{\omega^{\omega^\omega}}$ diyelim. X'in hala daha bitmediğini varsayalım.

$$\alpha_1 = \omega,$$
$$\alpha_2 = \omega^\omega,$$
$$\alpha_3 = \omega^{\omega^\omega},$$
$$\alpha_4 = \omega^{\omega^{\omega^\omega}},$$
$$\alpha_5 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}$$

olsun. Genel olarak,

$$\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$$

olarak tanımlansın (α_n^ω olarak değil!) Bu tanımlar şimdilik biçimsel, yani α_n'ler anlamsız şeyler. α_n'leri gösterge (endis, indeks) olarak kullanacağız. X_{α_1}, X_{α_2}, X_{α_3} altkümelerinin nasıl bulunabileceğini okur tahmin etmiştir. Eğer X izin verirse, devam edip, her $n \in \mathbb{N}$ için, X'in X_{α_n} altkümelerini de bulabiliriz. X'in hiç bitmediğini varsayarak, X_{α_n} altkümelerinin birleşimine X_{ε_0} diyelim.

X'te yer kalmışsa devam edebiliriz. İsteyen devam etsin. Ben sıkıldım. ♣