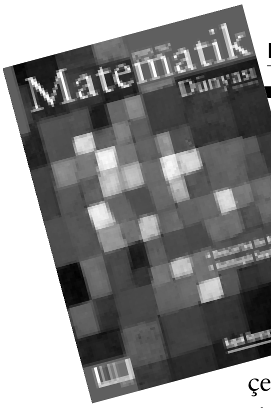
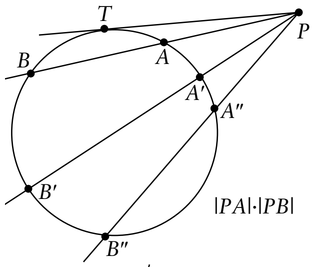
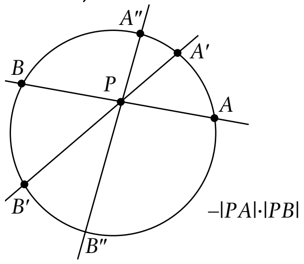


Kapak Konusu: Konikler

Bir Noktanın Bir Çembere Gücü

Bu yazıda özel bir konik olan çemberin çok ilginç bir yönünü işleyeceğiz. Düzlemde herhangi bir çember ve herhangi bir P noktası alalım. P noktasından geçen ve çemberi kesen herhangi bir doğru alalım. Çemberle doğrunun kesişim noktalarına A ve B diyelim. O zaman $PA{\cdot}PB$ çarpımı doğrudan bağımsızdır, yeter ki doğru P noktasından geçsin ve çemberi kessin, her A ve B kesişim noktası için çarpım hep aynı çıkar. Bu yazıda bu olguyu kanıtlayacağız.



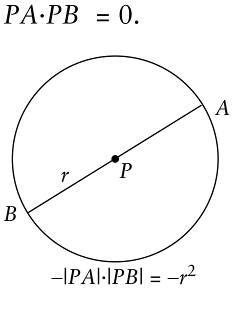


Eğer P noktası A ile B'nin arasındaysa (yani eğer P çemberin içindeyse), o zaman $PA{\cdot}PB$ çarpımını $-|PA|{\cdot}|PB|$ olarak almak bize bazı avantajlar sağlayacak ve biz de böyle yapacağız. Eğer A ve B noktaları P'nin aynı tarafındaysa (yani P noktası çemberin dışındaysa) çarpım pozitif, yani $|PA|{\cdot}|PB|$ olacak.

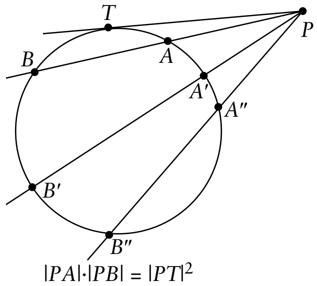
Sadece çembere ve P noktasına göre değiştiğini kanıtlayacağımız bu sayıya P noktasının çembere göre ***gücü*** denir.

Önce olgunun doğru olduğunu **varsayıp** kavramla biraz içli dışlı olalım.

Eğer P noktası çemberin üstündeyse, P'nin bu çembere göre gücü 0'dır elbette, çünkü A ya da B noktalarından biri P olmak zorunda ve dolayısıyla $PA{\cdot}PB = 0$.

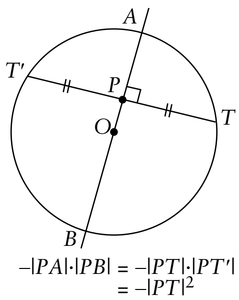


Eğer P noktası r yarıçaplı çemberin merkeziyse, P'nin çembere göre gücü $-r^2$'ye eşittir elbette. Görüldüğü gibi bu durumda sonuç AB kirişine (yani çapına) göre değişmez, merkezden geçen hangi kiriş alınırsa alınsın sonuç $-r^2$ çıkar.



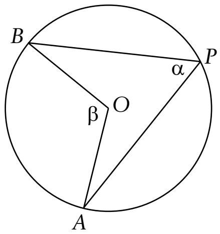
Eğer P noktası çemberin içinde değilse, o zaman P'den çembere iki teğet geçer. Bu teğetlerden biri çembere T noktasında dokunuyorsa, o zaman P'nin çembere göre gücü (madem ki P'den geçen doğruya göre değişmiyor) $|PT|^2$ olur elbette.

Eğer P noktası çemberin içindeyse ama çemberin merkezi değilse, o zaman P'den PO'ya dik çıkalım. (O çemberin merkezi olsun. Bkz. yandaki şekil.) Bu dik doğru çemberi T noktasında kessin. O zaman P'nin çembere göre gücü (madem ki P'den geçen doğruya göre değişmiyor) $-|PT|^2$ olur.

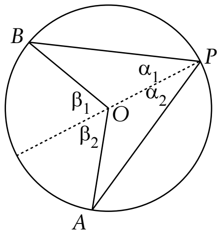


Şimdi kanıta başlayalım. Yavaş yavaş kanıtlayacağız. Kanıtlayacağımız ilk sonuçları lise seviyesindeki bir okurun görmüş olması gerekir.

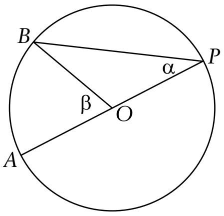
Önsav 1. *Yandaki şekilde, eğer* O*, çemberin merkeziyse, o zaman* $\alpha = \beta/2$*'dir.*

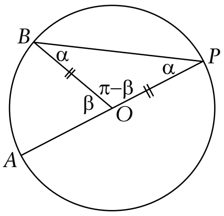


Kanıt: PO doğrusunu çizerek α ve β açılarını ikinci şekildeki gibi ikiye bölelim. Şimdi, teoremdeki eşitliğin α_1, β_1 ve α_2, β_2 açıları için geçerli olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bir başka deyişle, P, O ve A noktalarının, bir sonraki sayfadaki üçüncü şekildeki gibi doğrusal olduklarını varsayabiliriz. Öyle yapalım.



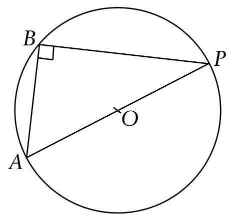
O noktası çemberin merkezi olduğundan, $|OB| = |OP|$. Dolayısıyla OBP ikizkenar bir üçgen. De-





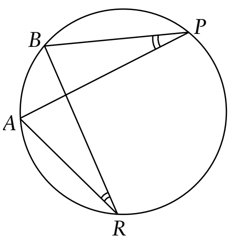
mek ki B açısı P açısına, yani α'ya eşit. (Bkz. bir sonraki sayfadaki, şimdi bu sayfadaki şekil.) OBP üçgeninin iç açılarının toplamı 180 derece olduğundan, POB açısı $180 - 2\alpha$'ya eşit. Ama POB açısı BOA açısının da tümleyeni aynı zamanda, yani $180 - \beta$'ya eşit. Demek ki, $180 - 2\alpha = 180 - \beta$, yani $2\alpha = \beta$. □

Bunun son derece verimli bir önsav olduğunu göreceğiz.



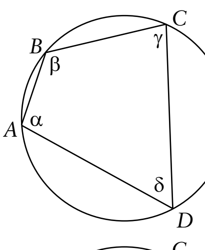
Sonuç 2. *O noktası çemberin merkeziyse yandaki şekildeki ABP üçgeni P noktasında diktir.*

Kanıt: Bir önceki önsavdan, $m(ABP) = m(AOP)/2 = 180/2 = 90$ derece olduğunu biliyoruz. □

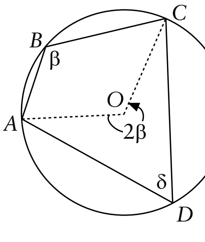


Sonuç 3. *A ve B bir çemberin üstünde iki nokta olsun. Çemberin üstündeki herhangi iki P ve R noktası için $m(APB) = m(ARB)$.*

Kanıt: Eğer O çemberin merkeziyse, Önsav 1'den dolayı her iki açı da $m(AOB)/2$'ye eşit. □



Sonuç 4. *Eğer bir dörtgen bir çemberin üstündeyse, o zaman dörtgenin karşılıklı açılarının toplamı 180 derecedir, yani yandaki şekildeki yazılımla, $\alpha + \gamma = 180° = \beta + \delta$'dır.*

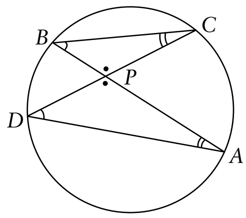


Kanıt: Önsava göre, eğer O çemberin merkeziyse, $\beta = m(AOC)/2$ ve $\delta = m(COA)/2$. (Açıları saatin ters yönünde yazıyoruz.) Demek ki $\beta + \delta$, $m(AOC) + m(COA)$ açısının yarısı. Ama $m(AOC) + m(COA) = 360°$. Kanıt bitmiştir. □

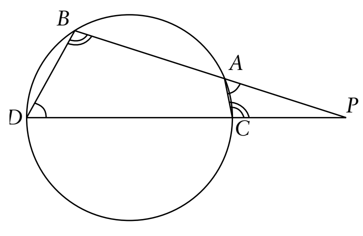
Şimdi artık girişte sözettiğimiz teoremi kanıtlamak için yeterince donanımlıyız.

Teorem 1. *Düzlemde herhangi bir çember ve herhangi bir P noktası alalım. P'den geçen doğru ne olursa olsun, eğer A ve B noktaları doğruyla çemberin kesişim noktalarıysa, $|PA||PB|$ sayısı bir sabittir.*

Kanıt: Önce P noktasının çemberin içinde olduğunu varsayalım. P'den geçen AB ve CD doğrularını çizelim. Yandaki şekilden takip edelim. A ve C açılarının eşit olduklarını yukardaki sonuçtan biliyoruz. Aynı nedenden B ve D açıları da eşit. Ve son olarak da ADP ve BCP üçgenlerinin P açıları birbirine eşit. Demek ki ADP ve CBP benzer üçgenler. Buradan da $|PA|/|PD| = |PC|/|PB|$ çıkar, yani $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$. Bu durumda teorem kanıtlanmıştır.



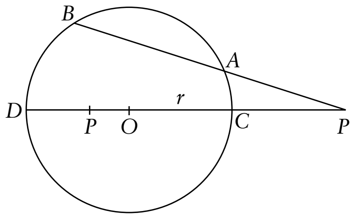
Şimdi de P noktasının çemberin dışında olduğunu varsayalım. Aşağıdaki şekilden takip edelim. $|PA||PB| = |PC||PD|$ eşitliğini göstereceğiz ve böylece $|PA||PB|$ sayısının BAP doğrusundan bağımsız olduğunu kanıtlamış olacağız. $ABDC$ dörtgenine Sonuç 4'ü uygulayarak, $m(CDB) = 180° - m(BAC) = m(CAP)$ eşitliğini elde ederiz. Aynı nedenden $m(DBA) = m(PCA)$. Bundan da PCA ve PBD üçgenlerinin benzer oldukları çıkar. Dolayısıyla $|PA|/|PC| = |PD|/|PB|$, yani $|PA||PB| = |PC||PD|$. □



Yukardaki teoremde sadece P noktasına ve çembere göre değiştiğini kanıtladığımız $|PA||PB|$ sayısına, "P noktasının $\mathcal{C}$ çemberine göre gücü" denmez! Bir P noktasının $\mathcal{C}$ ***çemberine göre gücü***,

$$\pi(P,\mathcal{C}) = \begin{cases} |PB|\cdot|PA| & \text{eğer } P \text{ çemberin içindeyse} \\ -|PB|\cdot|PA| & \text{eğer } P \text{ çemberin dışındaysa} \end{cases}$$

olarak tanımlanan cebirsel ifadedir, noktanın konumuna göre negatif ya da pozitif olabilir. Burada A ve B, P'den geçen ve çemberi kesen herhangi bir doğrunun çemberi kestiği noktalardır. Yukardaki teoremden $\pi(P,\mathcal{C})$ sayısının P'den geçen ve çemberi kesen doğrudan bağımsız olduğunu biliyoruz.



Çemberin merkezi O, yarıçapı r ise,

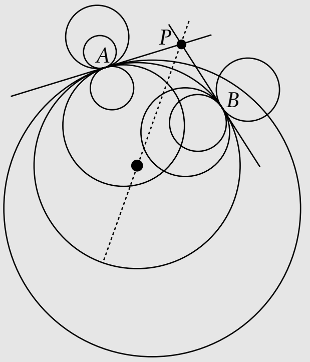
$$\pi(P,\mathcal{C}) = |PO|^2 - r^2$$

eşitliği geçerlidir, çünkü, aşağıdaki şekilden takip edilerek görüleceği üzere, eğer P çemberin dışındaysa,

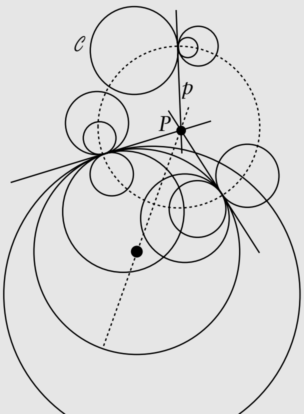
$$\begin{aligned}\pi(P,\mathcal{C}) &= |PC||PD|\\ &= (|PO| + |OC|)(|OD| - |OP|)\\ &= (|PO| + r)(r - |PO|) = |PO|^2 - r^2\end{aligned}$$

bulunur. Eğer P çemberin içindeyse de aynı türden bir hesap aynı sonucu verir.

Aşağıdaki gri karede, verilmiş bir P noktası ve P'yi içermeyen bir $\mathcal{C}$ çemberi için $\pi(P, \mathcal{C}) = \pi(P, \mathcal{C}')$ eşitliğini veren tüm $\mathcal{C}'$ çemberlerini bulduk. Aşağıdaki gri karede de, P'nin $\mathcal{C}$ çemberinin içinde olduğu durumda aynı problemi çözdük.



P noktasının gücü şekilde görülen tüm çemberlere göre aynıdır. Çünkü $|PA| = |PB|$ ve her çember ya PA ya da PB doğrusuna A ya da B'den teğettir.



Bir P noktası ve pozitif bir sayı verilmiş olsun. Pozitif sayıyı $p > 0$ için p^2 olarak yazalım. P'nin $\mathcal{C}$'ye göre gücünün p^2 olduğu $\mathcal{C}$ çemberleri, yukarda görüldüğü gibi P merkezli ve p yarıçaplı çemberin üstündeki herhangi bir A noktası için, PA doğrusunun A'da teğet olduğu $\mathcal{C}$ çemberleridir, çünkü $\pi(P, \mathcal{C}) = |PA^2| = p^2$.

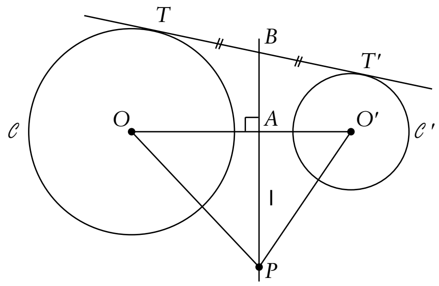
Şimdi çözümü daha ilginç bir probleme el atalım. Herhangi iki $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ çemberi alalım ve $\pi(P, \mathcal{C}) = \pi(P, \mathcal{C}')$ eşitliğini sağlayan P noktalarını bulalım.

Teorem 2. *Birbirine teğet olmayan iki $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}'$ çemberi verilmiş olsun. O zaman,*

$$\{P : \pi(P, \mathcal{C}) = \pi(P, \mathcal{C}')\}$$

kümesi, OO' doğru parçasına dik bir doğrudur.

Kanıt: Çemberlerin merkezleri O ve O' ve yarıçapları r ve r' olsun. Her iki çembere de teğet olan bir doğru alalım. Bu doğru çemberleri T ve T' noktalarında kessin. B, TT' doğru parçasının orta noktası olsun.



Elbette,

$$\pi(B, \mathcal{C}) = |BT|^2 = |BT'|^2 = \pi(B, \mathcal{C}').$$

B'den OO' doğrusuna inen ℓ dik doğrunun üstünden herhangi bir P noktası alalım. Yukarda teoremden hemen önce gördüğümüzü ve ayrıca bir de Pisagor Teoremi'ni kullanarak,

$$\pi(P, \mathcal{C}) = |PO|^2 - r^2 = |PA|^2 + |AO|^2 - r^2$$

elde ederiz. Aynı nedenden,

$$\pi(P, \mathcal{C}') = |PO'|^2 - r'^2 = |PA|^2 + |AO'|^2 - r'^2$$

eşitliği doğrudur. Birinciden ikinciyi çıkarırsak,

$$\pi(P, \mathcal{C}) - \pi(P, \mathcal{C}') = |AO|^2 - |AO'|^2 - r^2 + r'^2$$

elde ederiz. Sağ taraf P'den bağımsız... P, AB dik doğrusu üzerinde hangi nokta olursa olsun

$$\pi(P, \mathcal{C}) - \pi(P, \mathcal{C}')$$

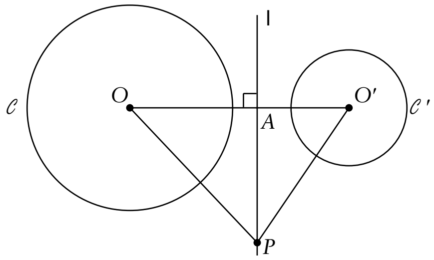
hep aynı sayı oluyor. B de AB dik doğrusu üzerinde olduğundan,

$$\pi(P, \mathcal{C}) - \pi(P, \mathcal{C}') = \pi(B, \mathcal{C}) - \pi(B, \mathcal{C}') = 0.$$

Demek ki ℓ'nin üstündeki her P noktası $\pi(P, \mathcal{C}) = \pi(P, \mathcal{C}')$ eşitliğini sağlıyor.

Şimdi tersini kanıtlayacağız. Ama önce A noktasının OO' doğrusunun, $\pi(A, \mathcal{C}) = \pi(A, \mathcal{C}')$ eşitliğini sağlayan tek noktası olduğunun farkına varalım. (Bunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.)

P, düzlemde, $\pi(P, \mathcal{C}) = \pi(P, \mathcal{C}')$ eşitliğini sağlayan herhangi bir nokta olsun. P'den OO' doğrusuna dik inelim. Bu dik OO' doğrusunu A'da kessin. (Birazdan bu A noktasının biraz önceki A noktası



olduğunu kanıtlayacağız.) Şimdi hesaplayalım:

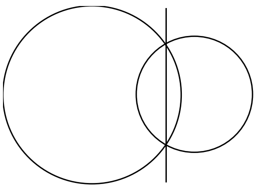
$$\pi(P, \mathcal{C}) = |PO|^2 - r^2 = |PA|^2 + |AO|^2 - r^2$$
$$= |PA|^2 + \pi(A, \mathcal{C}).$$

Aynı nedenden,

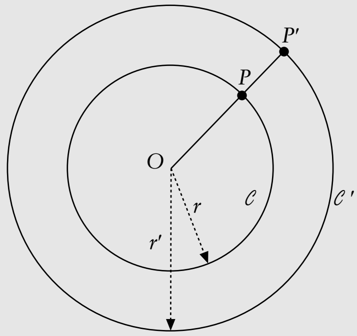
$$\pi(P, \mathcal{C}') = |PA|^2 + \pi(A, \mathcal{C}').$$

Dolayısıyla, $\pi(A, \mathcal{C}) = \pi(A, \mathcal{C}')$ eşitliği geçerli olmalı. Demek ki A, kanıtın birinci kısmında alınan nokta, dolayısıyla P noktası l'nin üstünde. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Bu doğruya iki çemberin ***eşgüç doğrusu*** ya da daha yaygın adıyla *kuvvet ekseni* ya da ***radikal doğrusu*** adını verelim. Demek ki eşgüç doğrusu çemberlerin merkezlerini birleştiren doğruya diktir. Eşmerkezli çemberlerin eşgüç doğrusu yoktur.



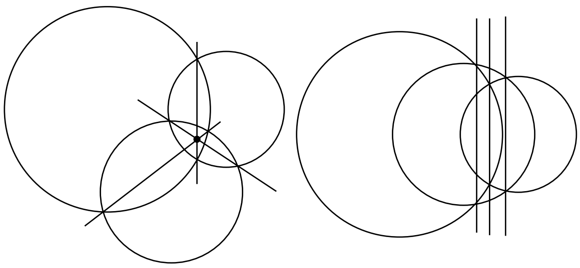
Eğer iki çember kesişiyorsa, kesişim noktalarının her iki çembere göre güçleri 0'dır. Demek ki bu iki çemberin eşgüç doğrusu bu iki kesişim noktasından geçer (eğer çemberler teğetse, o zaman eşgüç doğrusu çemberlerin ortak teğetidir.)



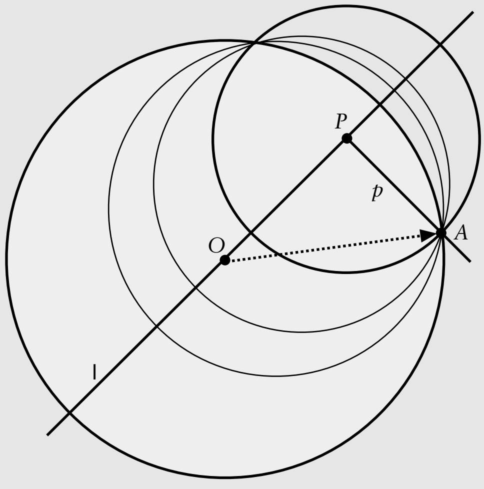
Eğer iki çemberin merkezi aynıysa, birinin üstündeki her noktanın diğerine göre gücü aynıdır:

$$\pi(P', \mathcal{C}) = r'^2 - r^2,$$
$$\pi(P, \mathcal{C}') = r^2 - r'^2.$$

Teorem 3. *Üç çemberin eşgüç doğruları ya bir noktada kesişirler ya birbirlerine paraleldirler ya da çakışırlar.*



Kanıt: İki eşgüç doğrusunun kesiştiğini varsayalım. Bu kesişim noktasının üç çembere de gücü aynıdır, dolayısıyla üçüncü eşgüç doğrusu da bu noktada geçer. □

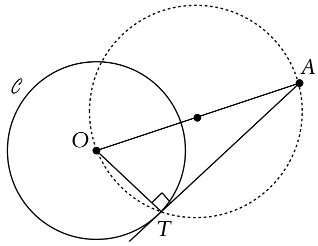


Herhangi bir P noktası ve negatif bir sayı verilmiş olsun. $p > 0$ için negatif sayıyı $-p^2$ olarak yazalım. P merkezli p yarıçaplı çemberi çizelim. P'den geçen herhangi bir l doğrusu alalım. P'den l'ye dik çıkalım. l'ye dik doğru çemberi A'da kessin. Son olarak, l'den herhangi bir O noktası alalım. P'nin O merkezli OA yarıçaplı çembere göre gücü $-|PA|^2 = -p^2$'dir. Ayrıca $\pi(P, \mathcal{C}) = -p^2$ eşitliğini sağlayan tüm $\mathcal{C}$ çemberleri bu şekilde elde edilir.

Dikkat: Yukardaki teoremde çemberlerden ikisi kesişmeyebileceği gibi teğet de olabilirler.

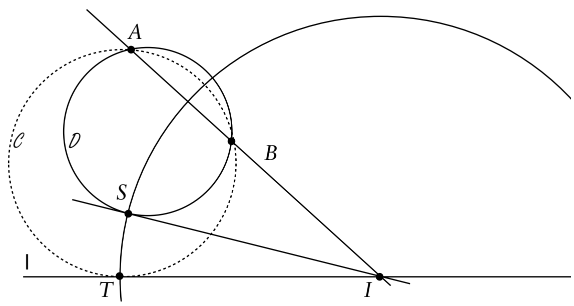
Uygulamalar. Şimdi yukarda yaptıklarımızın birkaç uygulamasını görelim. Aşağıda pergel ve (işaretsiz) cetvel kullanarak çeşitli inşalar yapacağız. İnşaatlarımızın hepsi Nazmi İlker ve Nâzım Terzioğlu'nun **Konikler** adlı kitabından alınmıştır.

Verilen bir $\mathcal{C}$ çemberine bir A noktasından teğet çizmek. A noktası çemberin içindeyse çözüm yoktur. Eğer A noktası çemberin üstündeyse çözüm kolaydır ve okura bırakılmıştır. Bundan böyle A'nın çemberin dışında olduğunu varsayalım.



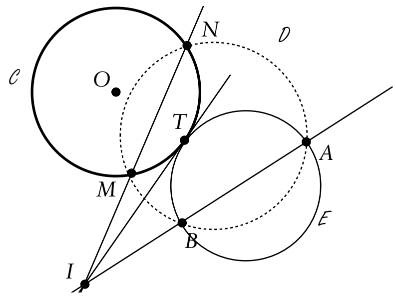
Çemberin merkezi O olsun. OA doğru parçasının orta noktası merkezli ve OA yarıçaplı çember $\mathcal{C}$ çemberini T noktasında kessin. AT doğrusu $\mathcal{C}$'ye teğettir.

Verilen bir l doğrusuna teğet ve verilen A ve B noktalarından geçen bir çember çizmek. Eğer A ve B noktaları doğrunun ayrı taraflarındaysa böyle bir çember yoktur elbet. Bundan böyle A ve B noktalarının doğrunun aynı tarafında olduğunu varsayalım. AB doğrusu l'ye paralelse, çözüm oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır. Bundan böyle bir de ayrıca AB doğrusunun l doğrusunu I noktasında kestiğini varsayalım. Bir an için istediğimiz gibi



bir $\mathcal{C}$ çemberi (resimde noktalı) bulduğumuzu varsayalım. Bu çemberin l doğrusuna değme noktasına T diyelim. Amacımız işte bu T noktasını bulmak. Böylece aradığımız $\mathcal{C}$ çemberinin üstünde üç nokta (A, B ve T) bulmuş olacağız; bundan sonra $\mathcal{C}$ çemberini bulmak oldukça kolay. $|IT|^2 = \pi(I, \mathcal{C}) = |IA||IB|$ olmak zorunda. $|IT|^2$ uzunluğunu bulmak için A ve B noktalarından geçen herhangi bir $\mathcal{D}$ çemberi çizelim. I noktasından $\mathcal{D}$ çemberine teğet $\mathcal{D}$'ye S noktasında dokunsun. O zaman, $|IS|^2 = \pi(I, \mathcal{D}) = |IA||IB| = |IT|^2$ eşitlikleri doğrudur. Şimdi I merkezli $|IS|$ yarıçaplı çemberin ℓ doğrusunu kestiği iki noktadan biri T olsun. Görüldüğü gibi problemin iki değişik çözümü vardır.

Verilen A ve B noktalarından geçen ve verilen bir $\mathcal{C}$ çemberine teğet çember çizmek. Eğer noktalardan biri çemberin içinde biri dışındaysa çözüm yoktur. Bundan böyle her iki noktanın da çemberin ya içinde ya da dışında olduğunu varsayalım. Çemberin merkezine O diyelim. Eğer $|OA| = |OB|$ ise çözüm oldukça kolay ve okura bırakılmıştır. Bundan böyle $|OA| \neq |OB|$ eşitsizliğini varsayalım.



Bir an için çözümü bulduğumuzu varsayalım. Çözüm çemberine $\mathcal{E}$ diyelim. $\mathcal{E}$ çemberiyle $\mathcal{C}$ çemberinin değme noktası T olsun. T'den geçen teğet AB doğrusunu bir noktada kesmek zorunda çünkü $|OA| \neq |OB|$ eşitsizliğini varsayıyoruz. Bu kesişim noktasına I diyelim. O zaman

$$\pi(I, \mathcal{C}) = |IT|^2 = \pi(I, \mathcal{E}) = |IA|\cdot|IB|.$$

Bu bilgiler ışığında, AB doğrusu üstünde ve

$$\pi(I, \mathcal{C}) = |IA|\cdot|IB|$$

eşitliğini sağlayan bir I noktası bulalım. Bunun için A ve B noktalarından geçen ve $\mathcal{C}$ çemberini iki noktada kesen herhangi bir $\mathcal{D}$ çemberini çizelim. $\mathcal{D}$'nin $\mathcal{C}$ çemberini kestiği noktalara M ve N diyelim. MN doğrusuyla AB doğrusu paralel olamazlar. (Neden?) MN doğrusuyla AB doğrusunun kesişim noktası I olsun. O zaman,

$$\pi(I, \mathcal{C}) = |IM|\cdot|IN| = \pi(I, \mathcal{D}) = |IA|\cdot|IB|.$$

İstediğimiz gibi bir I noktası bulduk. Şimdi I'den $\mathcal{C}$'ye bir teğet çizelim. Bu teğetin $\mathcal{C}$'ye değme noktası T olsun. T, A ve B'den geçen $\mathcal{E}$ çemberi $\mathcal{C}$ çemberine T'de teğet olacaktır, çünkü,

$$|IT|^2 = \pi(I, \mathcal{C}) = |IA|\cdot|IB| = \pi(I, \mathcal{C}). ♥$$