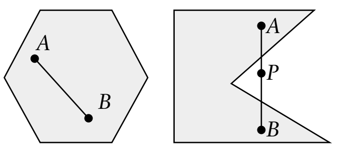
Postane Sanısı ve Çeşitlemeleri©

Alexandre Borovik*
alexandre.borovik@manchester.ac.uk

Bu yazıda bir matematik probleminin şaşırtıcı evrimini izleyeceğiz. Sorunun ezkaza ortaya çıkışından, birbirinden tamamen bağımsız kaynaklarca yeniden ifade edilmesine ve soruların çözümlerinin birbirini beslemesine kadar... Bu soruyu, ortaya çıkışına olan katkımdan, hiç beklenmedik uygulamalarından ve pek yazılı olmayan bir matematik kültürünün parçası olduğundan dolayı seçtim. Sanırım yazı, insanoğlunun merakı sayesinde matematiğin nasıl çok basit ama bir o kadar da estetik güzelliği olan bir sorudan hareketle gelişebildiğini gösterecek.

Bu soru bir ayrıkotunu andırıyor. Matematiğin ana kollarından uzakta, yol kenarında teklifsiz bir şekilde bitiveriyor. Ancak ayrıkotlarının aksine istenmeyen bir misafir değil.

Soru 1977 yılında bitiverdi. Novosibirsk Üniversitesi'nde öğrenciydim. Delinen (`valenki`)lerimi (keçe çizmelerimi[1]) onarmam gerekiyordu. Bu geleneksel Rus keçe çizmelerinin modası daha o zamanlarda bile biraz geçmişti ama bu çizmeler hâlâ bugün sert Sibirya ikliminin olmazsa olmazlarındandır. Onarmak için tek yol, çizmeleri hâlâ daha keçe çizmelerin yamandığı köyüme postalamaktı. Çizmelerimi bir güzel paketledikten sonra postanenin yolunu tuttum. Ancak postane görevlileri beni ilginç bir sebepten dolayı geri postaladılar. Tam olarak bu şekilde ifade etmeseler de öne sürdükleri gerekçe şuydu: Paketim malesef dışbükey değildi.



Dışbükey — Dışbükey değil

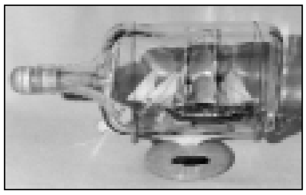
İçindeki her A ve B noktası için AB doğru parçasını da içeren geometrik şekillere dışbükey denir.

Kar fırtınasında yatakhaneye dönmeye çabalarken postane görevlilerinin öne sürdüğü gerekçe üzerinde düşündüm. Paketin geometrisi neden sorun yaratıyordu? Herhalde dışbükey olmayan paketleri birbirinden ayırmak zor oluyordu. 50 tane paket arasından dışbükey olmayan birini çekip çıkarırken diğer paketler yırtılabilir...

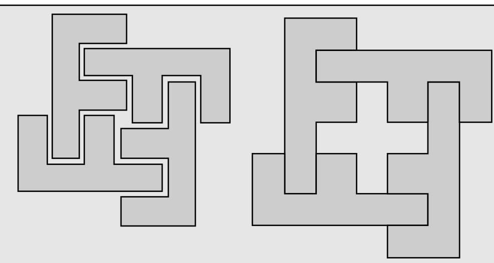
Böylece ilk sanıma ulaştım.

Postane Sanısı. *Sonlu sayıda dışbükey kargodan oluşan bir yığından, her hamlede diğer parçalara dokunmadan bir parça çıkarılarak kargo yığını tamamıyla ayrıştırılabilir.*

Dışbükey olmayan nesnelerin birbirinden her zaman ayrılamayacağı belli. (Şişe içinde dekoratif bir gemiyi düşünün).



Yatakhaneye döndüğümde oda arkadaşlarım Eugene Khukhro ve Sergey Karakozov'a olan biteni anlattım. Ben çizmeleri dışbükey olacak biçimde tekrar paketlerken benim yardımsever arkadaşlarım da postane sanısını kanıtlamaya çalışıyorlardı. Ama nafile... O sıralar fonksiyonel analize yoğunlaşan Sergey sorunun iki boyutlu halini kısa sürede kanıtladı. Ertesi gün Matematik Enstitüsü'nde üst sınıftakilere sorumu sordu. Biraz tartışmadan sonra uzmanlar sanının ikiden büyük boyutlarda muhtemelen yanlış olduğuna karar getirdiler, ancak bir karşıörnek bulamadılar. Oysa



Dışbükey olmayan birbirinin içine geçmiş dört F harfin soldaki şekilde aynı anda sadece birine dokunarak ve masanın üstünde kaydırarak ayırabilirsiniz. (Nasıl?) Ama sağdaki şekilde bunu yapamazsınız. Öte yandan, sağdaki şekilde, iki F'yi aynı anda oynatarak F'leri ayırabilirsiniz.

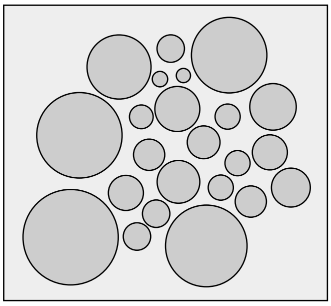
oynadım
xx...

* Manchester Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Telif hakları yazarında olan yazı, Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü ikinci sınıf öğrencisi E. Mehmet Kıral tarafından İngilizceden özgürce çevrilmiştir.

1 Aslında bunlara çizme demek yanlış. Keçeden yapılmış bir tür çorap demek daha doğru olur. Sibirya'da hava ve hatta kar bile çok kuru olduğundan ıslanma tehlikesi yoktur.

sorunun iki boyuta indirgenmiş hali oldukça kolay. Eugene Khukhro'nun gönlü bu sorunun ziyan olmasına elvermedi ve soruyu olimpiadnuü zadaçu, yani bir matematik yarışmasında sorulmak üzere biraz değiştirdi. İşte yarışmada sorulan soru:

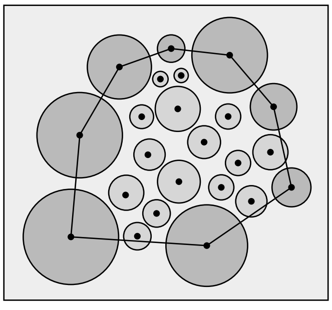
Madeni Para Sorusu. *Bir masanın üzerinde sonlu sayıda yuvarlak (daire şeklinde) madeni para var. Paraların boyutları değişik de olabilir. Madeni paraları diğer paralara değdirmeden masa üzerinde teker teker sürüyerek masanın kenarına sıraya dizmenin mümkün olduğunu kanıtlayın.*



Bugün beni en çok şaşırtan, bu matematiksel sorunun ifade şeklinin o zamanki günlük yaşamımızla örtüşmesidir. Günün her saati odamızda mutlaka biri uyurdu. Khukhro ilke sahibiydi, her gün hiç sektirmeden geceyarısından öğleye kadar uyurdu. Ben okulda gece bekçisi olduğumdan, geceleri dalga geçerdim. İşim sabah saat 9'da biterdi. Aşağı yukarı öğleden sonra 2'ye kadar uyurdum. Ama Karakozov'un her gün bir önceki günden 15 dakika sonra yatmak gibi tuhaf bir alışkanlığı vardı. Gün geldi, ben kalkarken o yattı. Birbirimize saygıda hiç kusur etmezdik. Uyuyan arkadaşlarımız rahatsız olmasınlar diye odamızın ışığını yakmaz, ocakta su kaynatmazdık. Yani biz de sorudaki madeni paralar gibi birbirimize dokunmadan yaşardık.

Probleme dönelim... Bu soru 1979-80'de Sibirya'da yapılan bir matematik olimpiyatında soruldu ve en iyi öğrenciler tarafından çözüldü. Lise seviyesinde çözülebilen bu sorunun çözümünden bahsetmemek olmaz.

İlk önce bütün madeni paraları bulundukları yere merkezlerinden mıhlayın. Çivilerin ucu görünsün ama. Sonra madeni paraların etrafına gergin bir ip geçirin ve ipi en dıştaki çivilere değene dek gerin. Çivisi ipe değen paralar diğer paralara dokunmadan masadan kaydırılarak çıkarılabilir. (Kanıtlayın!) Aynı yöntemi tekrarlayarak tüm paraları masadan teker teker çıkarabiliriz. Görüldüğü gibi kanıt çok basit. Ancak üç mühim noktaya parmak basalım:



1. İpin gerildiğinde aldığı biçim, paraların merkezlerinin dışbükey kapanışının çevresidir.
2. Çivileri çakarken gürültü yapmayın, arkadaşlarınız uyuyor olabilirler.
3. Sadece çivisi çıkmış paraları masadan kaydırabiliriz... Önce çivileri çıkarın!

Sorunun topladığı ilgi Eugene'i soruyu biraz daha değiştirip daha saygın bir yarışmaya, Sovyetler Birliği Matematik Olimpiyatı'na göndermeye yüreklendirdi. İşte o soru:

Dışbükey Çokgen Madeni Para Sorusu. *Bir masanın üzerinde sonlu sayıda dışbükey çokgen şeklinde madeni para var. Paraların boyutları değişik de olabilir. Madeni paraları diğer paralara değdirmeden masa üzerinde teker teker sürüyerek masanın kenarına sıraya dizmenin mümkün olduğunu kanıtlayın.*

İngiltere'de bozuk paralar dışbükey çokgen biçimindedirler. Bu ülkede arabalar da soldan gider!

Arkadaşım Khukhro bu soruyu olimpiyat komitesine sunduğunda olaylar hiç beklenmedik bir şekilde gelişti. Ulusal takım çalıştırıcısı Sergey Konyagin soruyu görür görmez çantasından şu soruyu çıkardı:

***N*-sk Şehri[2] Problemi:** *N-sk şehrinde her bina tabanları dışbükey çokgenler olan dik prizmalardır. Şehre herhangi bir yönden gelen bir yolcunun en azından bir binayı başka binalar tarafından örtülmemiş olarak görebileceğini kanıtlayın.*

2 Omsk, Novosibirsk gibi Rus şehirlerine dokundurm yapan kelime oyunu.

Bu soru 25-30 yıl önce **Quantum** dergisinin şimdi tam referansını veremeyeceğim bir sayısında yayımlanmıştı. Bir zamanlar da bu okuduğunuz yazıyı eşim Anna'nın New Jersey'de çektiği bir fotoğrafla birlikte dağıtmıştım. Muhteşem bir Manhattan manzarası. Önplanda bir sazlık... Kamışların dik durduğu rüzgârsız havada, en az bir sap başka saplar tarafından engellenmeden tamamıyla görünür.

Bu aşamada problemin yarışma değerinin kaybolduğunu okur anlamıştır herhalde: Ciddi matematik yarışmalarında sadece gıcır gıcır problemler sorulur.

Gel zaman, git zaman, bir matematik konferansında, konferans davetlilerinden Victor Ufnarovski tarafından yazılmış olan **Matematiksel Akvaryum** [6] adlı kitabın yayımlanması kutlanıyordu. Kitabı karıştırırken Postane Sanısı'nın bir çeşitlemesiyle daha karşılaşınca nerdeyse küçük dilimi yutacaktım. Bu kadarı da fazlaydı!

Sabun Köpüğü Problemi. *Biri sabundan baloncuklar üflüyor. (Elbette baloncuklar küre şeklinde.) Herhangi bir yerden bakıldığında baloncuklardan birinin tamamıyla görüneceğini kanıtlayın. (Yani nerden bakılsa bakılsın baloncuklardan en az biri baloncuk tutulmasına uğramaz.)*

Jean-Baptiste Siméon Chardin

Ufnarovski'ye Postane Sanısı'nı anlattığımda o da çok şaşırdı. Bu problem çocuğuyla gerçekten sabundan baloncuklar yaparken aklına gelmiş. Daha önce de hiç böyle bir problemle karşılaşmamış.

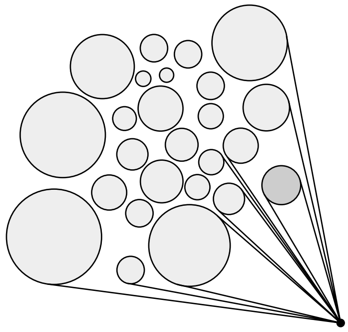
Aslında bu problemin bir çeşitlemesi daha var. Bu çeşitleme Gutenmacher and Vasilyev'in **Doğrular ve Eğriler** adlı kitabında yer alıyor. 1989'da, Postane Sanımı ortaya attıktan 11 yıl sonra gördüm.

Gravyer Peyniri Problemi: *Büyük bir peynirin içinde küresel delikler var. Bu peyniri her parça tam tamına bir delik içerecek biçimde dışbükey çokyüzlülere kesebileceğinizi kanıtlayın.*

ÇÖZÜMLER

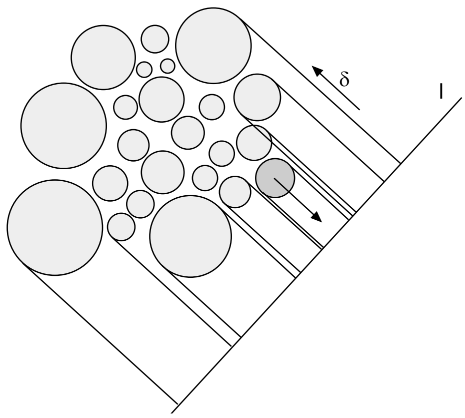
Şimdi sıra soruların çözümlerine geldi. Sabun Köpüğü Problemi'nden başlayalım. İşte iki satırlık yanıt:

Sabun Köpüğü Teoremi. *Bakılan noktadan en kısa teğete sahip baloncuk diğer baloncuklar tarafından kapatılamaz.*



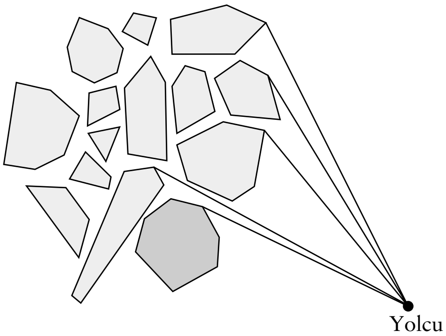
Kanıt: En kısa teğeti olan küre ile gözümüz arasında bir koni oluşturacak şekilde tüm teğetleri çizelim. Eğer bu koninin içine haddini bilmeyen başka bir baloncuk girseydi bu durumda bu baloncuğun teğeti bizimkinden daha kısa olurdu. □

Madeni Para Sorusunun Yanıtı: Yukardaki çözüm aslında madeni para sorusuna başka bir çözüm sunuyor. Bu soru baloncuk sorununun üç yerine iki boyutlusu. Herhangi bir δ yönü seçelim. Bu yöne dik bir l doğrusu çizelim. Paralara δ'ye paralel teğetler çizelim. Bu teğetlerin dokunma noktasının l'ye en kısa mesafede olan para δ istikametinin ters yönünde başka hiçbir paraya dokunmadan çıkartılabilir. Bunu istediğimiz her δ istikametinde yapabiliriz elbet. □



Ayrıca biraz uğraşla bu çözümü *N*-sk problemine de uyarlayabiliriz. Yukardaki sorudan aldığımız ilham bize önemli olanın gezginin gözünden çıkan ve binaların sağı ve solu olmak üzere iki uç noktasına giden ışınlar olduğunu söylüyor.

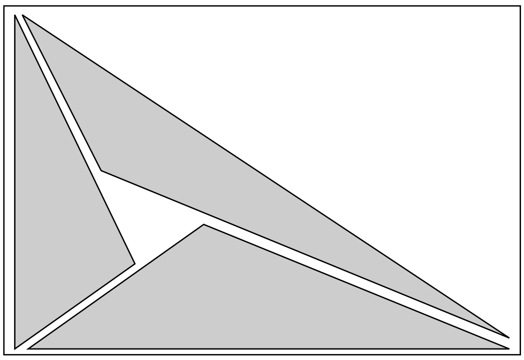
N-sk Şehri Teoremi. *Görülebilen sağ köşelerden en soldaki başka hiçbir bina tarafından kapatılmayan binalardan birine aittir.* □



oynadım
xx

Gravyer Peyniri Problemi'nin bir çözümü sabun köpüğü problemini de çözer. Nitekim sabun baloncuklarını kocaman bir peynirin küresel delikleri olarak görelim. Gözlemciyi de peynir atomu olarak peynire dahil edelim. Peyniri, herbiri bir baloncuk içeren dışbükey çokyüzlülere ayıralım. Gözlemci, kendisini içeren çokyüzlünün içindeki küreyi rahatlıkla görecektir.

Burada dikkat etmemiz gereken başka bir durum da var. Peynirin içindeki deliklerin küresel değil de sadece dışbükey oldukları durumda önermemiz geçerliliğini korumaz. Düzlemde bir karşıörnek bulmak kolay; üç boyutta da düzlemdeki örneği genelleştirmek pek zor değil.



Bu dikdörtgen, her biri bir üçgeni içerecek şekilde üç dışbükey parçaya ayrılmaz.

Demek ki küreyi diğer dışbükey cisimlerden ayıran metrik özellikler önemli. Bu düşünce bizi aşağıdaki teoreme yöneltti:

Teorem. *Birkaç küre verilmiş olsun. Bu kürelerden birine A diyelim. A'ya teğetin diğer teğetlerden daha uzun olmadığı noktalar kümesi dışbükey bir bölgedir ve bu bölgenin sınırları düzlemseldir.*

Kanıt: Sadece iki küre verilmişse savın kanıtı kolay. Nitekim, her iki küreye de teğetlerin uzunluklarının eşit olduğu noktalar kümesi, adına ***radikal düzlem*** ya da ***eşgüç düzlemi*** denilen düzlemdir. (eşgüç doğrusu için bkz. MD-2005-II, sayfa 41) Düzlemin ayırdığı A'yı içeren yarımuzay aranan ve elbette dışbükey olan bölgedir.

Eğer n tane küre verilmişse, savdaki bölge elbette yukarda bulunan $n - 1$ tane yarımuzayın kesişimidir. Dolayısıyla bölge, dışbükey bölgelerin kesişimi olduğu için, dışbükeydir. □

Teoremin kanıtında metriği kullandığımıza dikkatinizi çekerim. Başka türlü olmayacağını biliyoruz.

Peynir problemini şimdi şöyle de çözebiliriz. Her küresel delik çifti için teğetlerinin eşit olduğu radikal düzlemleri çizelim ve bu düzlemlerin oluşturduğu yarımuzayları düşünelim. Bir küreyi içeren tüm yarımuzayların kesişimi bize dışbükey çokyüzlümüzü verir.

BİRAZ DA FELSEFE

Postane Sanısı'yla başlayan yolculuğumuzun neredeyse sonuna geldik. Sanının çeşitlemelerini kolaylıkla çözdük, ama bu sizi yanıltmasın. Sorular tek başına ele alındıklarında oldukça zordur. Diğer problemlerden edindiğimiz öngörüler soruları çözmede bize yardımcı oldular.

Gördüğünüz gibi bir problem yerine bu problemin çeşitlemeleri üzerinde ya da başka matematiksel dillere çevrilmiş biçimleriyle çalışmak büyük kolaylık sağlıyor. Bu genelde eğitimde es geçilen önemli bir noktadır. Ne yazık ki bir problemin bir matematiksel dilden bir diğerine çevrilmesi konusuna sadece lisede değil, üniversitede bile pek değinilmez. Dikkat ederseniz, problemleri değişik dillerde ifade ederek problemlerin ortak matematiksel özünü anlamış olduk ve böylece çözüme rahat ulaştık. Genellemeler problemi daha iyi anlamamızı sağlıyorlar, yanlış bile olsalar... Böylece çözümde neyi kullanmamız gerektiğini daha iyi anlıyoruz. Örneğin madeni para problemini çemberden dışbükey n-gen'e başarıyla genişlettik. Aynı şekilde peynirin içindeki küreleri de dışbükey şekillere genişletmeye çalıştık ama bu sefer genelleştirmenin doğru olmadığını gördük. Buradan da kürenin, küreyi dışbükey çokyüzlülerden ayıran bir özelliğini kullanmamız gerektiğini anladık.

Profesyonel matematikçi bu yazıdaki soruları kolaylıkla dışbükey geometrinin terimleriyle ifade edebilir, ama sorular bu daha soyut ifadeyle gerçekten daha kolay anlaşılır bir hale geliyorlar mı?

Sanırım maksat vasıl oldu. Postane Sanısı matematiksel düşünmenin en önemli unsurlarından birini ortaya çıkardı: Sorunun özünü ortaya koyan elverişli dil arayışı. Aslında sorunun matematiksel ya da günlük terimlerle ifade edilmesi önemli değildir. Önemli olan soruda sözedilen nesneler arasında hissettiğimiz ilişkilerin doğru biçimde ifade edilebilmesidir.

Valenki hikâyesini Postane Sanısı'nı oluşturduktan 15 yıl sonra tekrar hatırladım. Kombinatorikle ilgili bir projeye dalmıştım. Dışbükeylik kavramını analizden koparıp cebirselleştirmeye çalışıyordum. Uğraşımın, 'bu para diğer paraların dışında' gibi gündelik bir cümleyi matematiksel olarak ifade edebilmekten başka bir şey olmadığını kavrayıverdim birden. "Dışarısı", "en dışarıda", "dışlanan" gibi en basit kavramlar paraların çeşitli dizilişlerini irdelemeye başlayınca sarpa sarıyordu.

Matematiksel dille günlük dil arasındaki benzeşmeyi daha da ileri götürebiliriz. Problemlerimizde 'sol köşelerin en sağındaki' gibi sıralamanın dilini ve 'en kısa teğet' gibi metrik geometrinin dilini kullandık. Sıralı kümelerin matematiksel dili gizlenmişti, çünkü günlük dilimiz 'sağ-sol' gibi kavramları tam olarak ifade edebiliyor. 'İleri' matematikte de her şey sorunun ifade edileceği için uygun bir dil arayışıyla başlar.

Neden uzaklık kavramını kullanmaya karar verdiğimizi anımsayalım. Madeni (ve dairesel) para problemini daireden dışbükey çokgen'e genelleştirebildik. Benzer biçimde peynirin içindeki küresel delikleri de dışbükey çokgen deliklere genelleştirmeye çalışınca bu sefer savın bu genelleşmiş haliyle doğru olmadığını gördük. Buradan da kürenin (küreyi çokgenlerden ayıran) bir özelliğini kullanmamız gerektiğini anladık. Bu arada bu yaptığımız tipik bir 'meta-argüman' örneğidir: Matematiksel bir teoriye dışarıdan (ya da tepeden) bakıp matematiği ya da matematiksel mantığı kullandık ve böylece onun temel özelliklerini kavradık.

Bence, matematik eğitiminde, öğrencilerimize matematiğin bu dilsel yönünü olabildiğince erken göstermeliyiz.

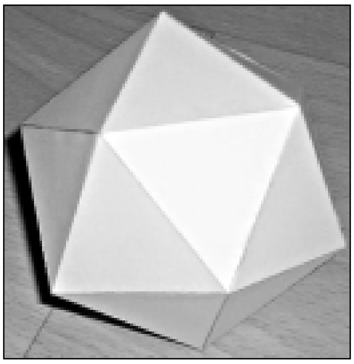
Bu yazıda ele alınan sorular birbirinden tamamen bağımsız dört kaynaktan kaynaklanmaktadır. Ancak soruların yazarları hemen hemen aynı matematiksel eğitimden geçmişlerdir ve matematiksel yapıların işleyişi hakkında aynı genel görüşe sahiptirler.

Sorularla uğraşanların ne dereceye kadar matematiğin iyi bilinen yapı ve kavramlarından yola çıktıkları (bu örnekte, dışbükey bir kümenin biçimsel tanımı) ve nereye kadar makalelerde ya da kitaplarda olmayıp usta-çırak ilişkisiyle hocadan öğrenciye doğrudan geçen bilgilerle yönlendirildikleri oldukça ilginç bir sorudur.

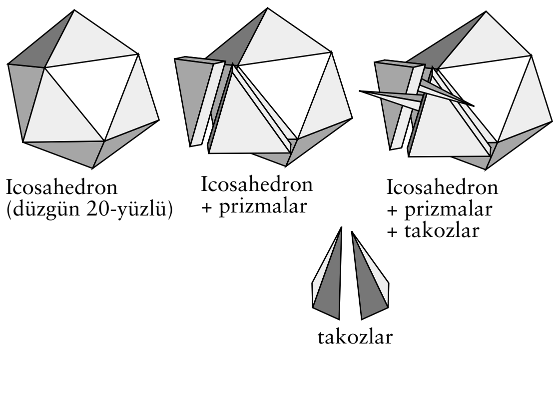
Kendi deneyimlerimi gereğinden fazla genelleştiriyor olmaktan korkarak söylüyorum: Bence bir matematikçi önce kuramının tüm günlük yaşamdaki yorumlarını kullanır ve problemi çözdükten sonra bulduklarını kaydetmek için formel matematik diline başvurur.

POSTANE SANISI DOĞRU MU?

Maalesef... Soruyu sorduktan birkaç sene sonra Kuz'minykh bir karşıörnek sundu. Komşu yüzleri arasındaki açı geniş olan bir çokyüzlü ele alın, örneğin 20 yüzlü bir platonik cisim olan *icosahedron*'u. Bunun yüzlerinin hemen üzerine, tabanı, üzerinde durduğu yüzün şeklinde olan ince dik prizmalar yerleştirin. Sonra da piramit şeklindeki takozları da örgü gibi birbirinin içine geçecek biçimde yerleştirin. Burada hiçbir parçanın başkalarını rahatsız etmeden oynamayacağı bariz.



30 kenarlı, 20 yüzlü, 12 köşeli icosahedron



Kuz'minykh'in karşıörneği problemin göründüğünden çok daha derin olduğunu gösteriyor. Karşıörneği tam anlamasanız da sezgileriniz size böyle bir karşıörnek olabileceğini söyleyebilir. Ama sezgilerinize aşırı güvenmeyin, problemin doğru olmadığı, yani bir karşıörnek olduğu hiç de bariz değil. Eğer Kuz'minykh'in karşıörneği sizi problemin yanlışlığına (gayet doğal olarak) ikna ettiyse, şimdi bu özgüveninizi yıkacağım.

Teorem (Guennady Noskov, ~1988). *Eğer birden çok parçayı aynı anda oynatma hakkımız varsa, dışbükey nesnelerden oluşan bir yığın ayrıştırılabilir.*

Bunun Kuz'minykh'in örneğinde neden geçerli olduğunu görebiliyor musunuz?

Kanıt şaşırtıcı derecede basit: Nesneleri yavaş yavaş birbirinden uzaklaştırın, yani aralarındaki mesafe giderek artsın. Bir zaman sonra mesafe o kadar büyür ki nesnelerden herhangi birini diğerlerine değdirmeden kümeden ayrıştırabiliriz.

Daha günlük bir dilde anlatalım: Her nesnenin bir tür esnek bir zarla kaplı olduğunu düşünün, bir tür balon. Tüm balonlardan içeri hava üfleyelim. Balonlar şişmeye başlayacaktır, birbirlerini itecekler ve her bir balonun içindeki nesneyi oynatabiliriz. Çok basit değil mi?

Ne yazık ki, günlük dilin ifadesinin yetersiz kaldığı bir noktaya geldik. Balonlar birbirini neden itiyorlar? Eğer balonları farklı hızlarla şişirirsek başka bir sonuç mu elde ederiz? Bu tip soruları düşünmeye başladığınız zaman 'balon' çözümü balon oluyor. Noskov'un kullandığı ve aşağıda açıkladığımız genleşme her balonun eşit miktarda şişirilmesini sağlıyor.

Matematiksel kanıt aşağı yukarı şöyle: Yığına $1 + \lambda$ katsayılı bir genleşme dönüşümü uygulayalım. Başlangıçta $\lambda = 0$ olsun (özdeşlik fonksiyonu) ve sonra λ giderek artsın. Nesneler büyür, ancak birbirlerine göre konumları sabit kalır. Tüm bu genleşme olurken, özgün nesneleri (yani nesnelerin genleşmemiş hallerini) genleşmiş nesnenin (genleşen şeyleri başlangıçta kolileri kaplayan bir tür zar olarak düşünebiliriz) içinde öteleme marifetiyle birbirlerine değdirmeden oynatabiliriz.

Bu ilerlemiş aşamada günlük dilin işe yaramaması hayalkırıklığı yaratmamalı. Bu çok doğal. Şiir gibi matematik de sıradan dille ifade edemediğimiz düşünce ve duyguları ifade etmek için vardır.

ASKERİ UYGULAMALAR

Çok ilginç bir şekilde eş platonik çokyüzlüler birbirlerine kenetlenecek ve kolay kolay birbirinden ayrıştırılamayacak biçimde bir araya getirilebilirler [2, 3]. Doğadaki en sert maddeler platonik cisim şeklinde olduklarından ve maalesef ancak oldukça küçük boyutlarda üretilebildiklerinden, böyle bir düzenlemenin neden çok önemli olduğu hemen anlaşılır: Ayrık ama kenetlenmiş kristallerden sert madde yapımı.

Noskov'un genleştirme yöntemi tersine çevrilip üretim sürecinin bir parçası haline getirilebilir. Kristalleri uygun bir şekilde ayrılmış yuvaların içine (düşük yoğunluklu süngerimsi bir madde içine) yerleştirelim. Sonra bir çözücü döküp süngeri sıkıştıralım. Kristaller kenetlendikleri konuma ulaşacaklardır.

Meslektaşım Alexey Kanel-Belov bu fikrin tank zırhlarının yapımında kullanılması için reklam yaptı bir ara. Başarıp başarmadığını bilmiyorum. Postane Sanım çok şaşılacak bir şekilde rota değiştirmişti. Kanel-Belov şu çılgın soruyu sordu: Kenetlenmiş yığın tek tür düzgün cisimlerden oluşabilir mi? Hakikaten de uygun düzenlemeler buldu. Ancak anlaşılan biraz geç kalmıştı. Hollandalı yol mühendisleri kenetlenmiş dörtyüzlülerden oluşan çok sağlam bir temel zeminini oluşumu bulmuşlardı. ♣

Kaynakça

[1] A. V. Borovik, I. M. Gel'fand and N. White, **Coxeter Matroids**, Birkhäuser, Boston 2003.

[2] A. V. Dyskin, Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov ve E. Pasternak, *A new concept in design of materials and structures : Assemblies of interlocked tetrahedron-shaped elements*, Scripta Materialia 44 (2001) 2689-1694.

[3] A. V. Dyskin, Y. Estrin, A. J. Kanel-Belov ve E. Pasternak, *Toughening by fragmentation - How topology helps*, Advanced Engineering Materials 3 Issue 11 (2001) 885-888.

[4] V. Gutenmacher ve N. B. Vasilyev, **Lines and Curves**, Birkhäuser, Boston 2004.

[5] U. H. Kortenkamp ve J. Richter-Gebert, **The Interactive Geometry Software Cinderella**, Springer Verlag 1999, ISBN 350147195.

[6] V. Ufnarovski (V. Ufnarovski`), Matematiçeski` Akvarium. Nauçnoizdatel¤ski` centr "Regulqrnaq i haotiçeskaq dinamika" Moscow, 2000.

[7] M. Glickman, *The G-block system of vertically interlocked paving*, Proc. Second Internat. Conf. on Concrete Block Paving, Delft, Nisan 10-12, 1984, sayfa 345-348.