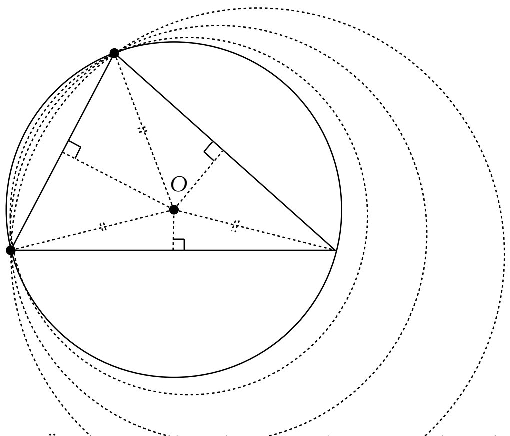
Geometri Köşesi

Mustafa Yağcı / *yagcimustafa@yahoo.com*
www.mustafayagci.com

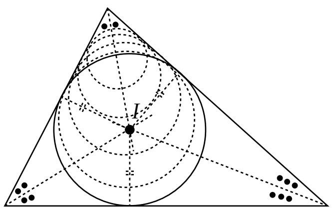
Dokuz Nokta (ya da Feuerbach) Çemberi

Üçgenin çemberleri deyince akla ilk gelen üçgenin ***çevrel çemberi*** ve ***iç çemberi*** olur. Çevrel çember, üçgenin üç köşesinden de geçen çemberdir; iç çemberse üçgenin üç kenarına da içten teğet olan çemberdir.



Üçgenin çevrel çemberinin varlığına az sözle şöyle ikna olabiliriz: İki sabit köşeden geçen büyük bir çember çizip bu çemberi gene aynı köşelerden geçecek biçimde yavaş yavaş küçültelim. Bu çemberler bir zaman sonra üçüncü kenardan geçecektir.

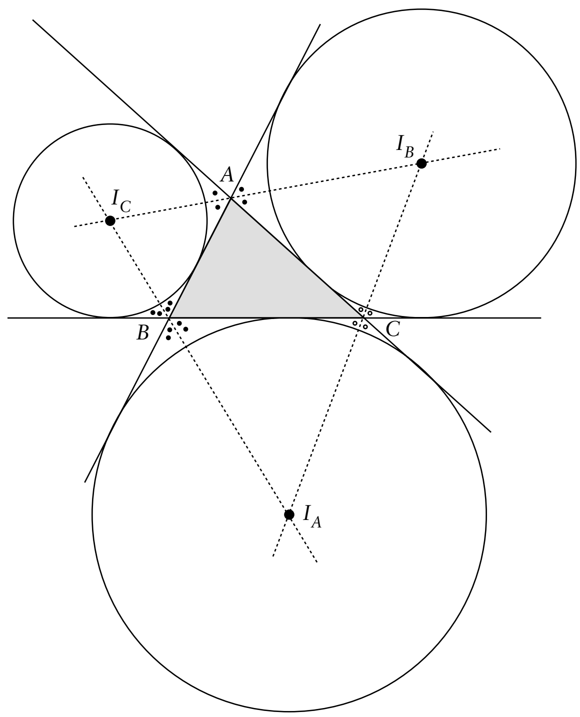
Üçgenin çevrel çemberinin merkezi, üç köşeye eşit uzaklıkta olduğundan, üç kenarın ortadikmelerinin kesişimindedir.



Üçgenin iç çemberinin varlığına (gene az sözle) şöyle ikna olabiliriz: İki kenara teğet olan küçük bir çember çizip bu çemberi gene aynı kenarlara teğet olacak biçimde yavaş yavaş büyütelim. Bu çemberler bir zaman sonra üçüncü çembere teğet olacaktır.

Üçgenin iç çemberinin merkezi, her köşenin iki kenarına eşit uzaklıkta olduğundan, içaçıortayların kesişimindedir.

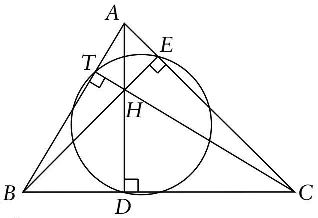
İlk anda akla gelmeyebilir ama üçgenin başka özel çemberleri de vardır. Hem de "sürüsüne bereket" derler ya, o kadar. Örneğin, üçgenin kenarlarına dıştan teğet çemberler vardır. Üç tane olan bu çemberlere de üçgenin ***dış teğet çemberleri*** veya kısaca ***dış çemberleri*** denir. Bu çemberler özel olduklarından merkezlerine de özel isimler verilmiştir. Çevrel çember merkezi O'yla, iç çember merkezi I'yla, dış çember merkezleri de I_A, I_B ve I_C simgeleriyle gösterilirler. İşte resim:



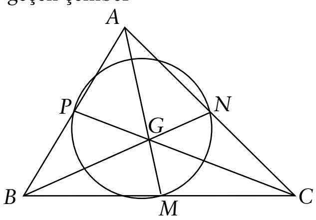
Bu yazımızda bunlar kadar çok bilinmeyen ama en az bunlar kadar önemli bir başka çemberi ve merkezini konu edeceğiz: Dokuz nokta çemberini ve merkezini. Adından da anlaşılabileceği üzere, bu çember, üzerinde üçgenin 9 özel noktasını barındırır. Hangi noktalar mı? Az sonra...

Doğrusal olmayan her üç noktadan tek bir çemberin geçtiğini biliyoruz. O halde, üçgenin üç özel noktasından geçen bir çember üçgenin özel bir çemberidir.

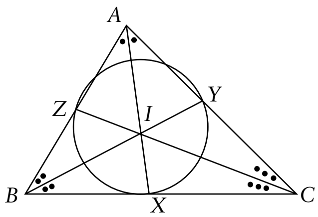
Örneğin eğer üçgen dik değilse, üçgenin üç yüksekliğinin ayağından geçen çember, üçgenin özel bir çemberidir. Bu üçgeni bir sonraki sayfada çizdik. Şekilde T noktasına F deseydik daha iyi olurdu. Ancak F harfi geleneksel olarak (bu yazıda göreceğimiz) bir başka nokta için kullanılır.



Üçgenin üç yükseklik ayağından geçen çember



Üçgenin üç kenarortay noktalarından geçen çember



Üçgenin üç içaçıortay ayağından geçen çember

Aynı üçgenin (üçgen dik olsa da!) üç kenarortay ayağından geçen çemberi de çizebiliriz. Üçgenin üç içaçıortay ayağından geçen çemberi de... Bu üç çember yukarda görünüyor.

İlk iki çember ne kadar da birbirine benziyor... (Mikroskapla bakmak lazım!) Bizimki de laf! Sanki birbirine benzemeyen iki çember olabilirmiş gibi... Ama bunlar bir başka benziyorlar, sanki benzemekten de öte eşitler. Evet öyleler...

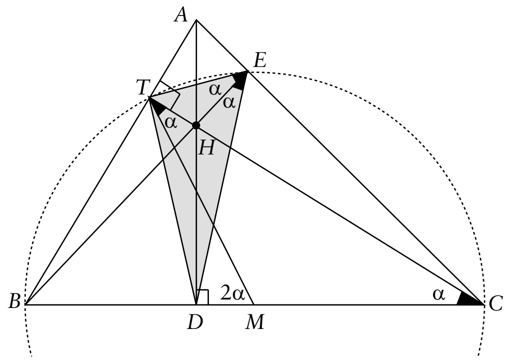
Bu eşliği ilk olarak Euler 1765'da farketmiş: Bir üçgenin yükseklik ayaklarından geçen çember kenarortay noktalarından da geçer.

Bu çemberin üzerinde şu an 6 özel nokta var. Tahmin ettiğiniz gibi 3 özel noktadan daha geçtiğini bulacağız ama önce şu ilk kısmı bir kanıtlayalım.

Altı Nokta Çemberinin Kanıtı. ABC üçgeninin yükseklik ayakları sırasıyla D, E ve T olsun. ABC üçgeninin yüksekliklerinin DET üçgeninin iç açıortayları olduğunu MD-2004-III, sayfa 57'de kanıtlamıştık. (DET üçgenine ABC üçgeninin ***ortik üçgeni*** denir.)

$[BC]$ kenarının orta noktası M olsun. T, D, M, E noktalarının çembersel olduğunu kanıtlayabilirsek, aynı kanıtı $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarının orta noktaları için de yapabileceğimizden kanıt bitecek.

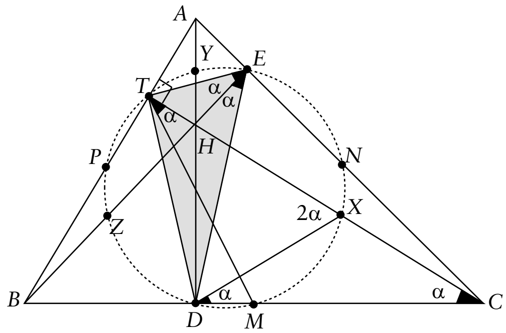
BTC ve BEC diküçgen olduklarından, $BTEC$



dörtgeni M merkezli BM yarıçaplı çemberin üstündedir. Demek ki $TM = MC$'dir. $m(TCM) = \alpha$ olsun. O zaman $m(CTM) = m(TCM) = \alpha$ ve $m(TMB) = 2\alpha$ olur. Aynı zamanda $m(TED) = 2\alpha$ olduğundan, $TDME$'nin bir kiriş dörtgeni olduğu çıkar. İstediğimiz oldu. □

Unutmadan söyleyelim, Euler de ancak bu kadarını bulabilmiş; birazdan bulacağımız diğer üç noktayı o da fark edememiş.

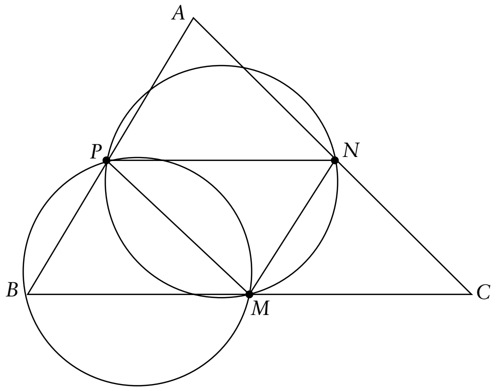
Şimdi bu dörtgenin çevrel çemberini çizip, kanıtın ikinci kısmına geçiyoruz.

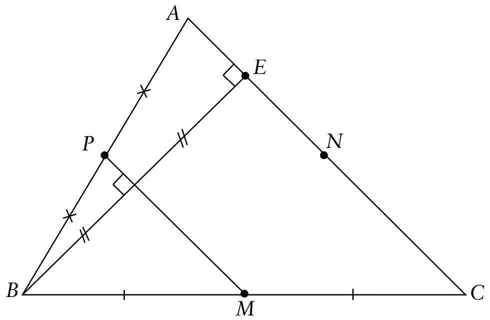


Dokuz Nokta Çemberinin Kanıtı. $TDME$ kiriş dörtgeninin çevrel çemberi CH doğrusunu X'te kessin. TED açısıyla TXD açısı aynı çember üzerinde aynı yayı gören çevre açılar olduğundan eşittirler. $m(XCD) = \alpha$ ve $m(TXD) = 2\alpha$ olduğundan XDC açısının ölçüsü de α'dır. Dolayısıyla $DX = XC$. Dolayısıyla, HDC diküçgen olduğundan, X noktası $[HC]$'nin orta noktası. Benzer şekilde Y noktası $[HA]$'nın, Z noktası da $[HB]$'nin orta noktasıdır. Böylelikle 9 noktayı bulmuş olduk. Sayalım: ABC üçgeninin yükseklik ayakları D, E, T, kenarortay noktaları M, N, P ve diklik merkezini köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları X, Y, Z.

İkinci Kanıt. Eğer ABC üçgeninin dokuz nokta çemberini kenarortay noktaları olan M, N, P noktalarından geçen çember olarak tanımlasaydık, bu durumda bu çemberin D, E, T ve X, Y, Z noktalarından geçtiğini kanıtlamalıydık. Şimdi bunun son derece sade bir kanıtını sunuyoruz:

Önce ABC üçgeninin orta üçgeni olan MNP üçgenini çizelim. $BMNP$ paralelkenar olduğundan MNP ile MBP üçgenlerinin eşliği aşikâr.

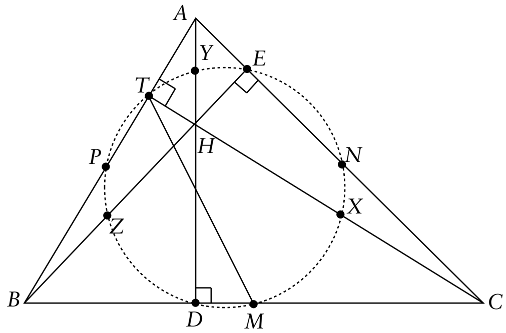




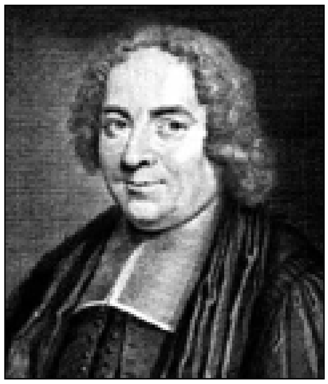
O halde MNP ile MBP üçgenlerinin çevrel çemberleri de eştir. Hem de MP doğrusuna göre simetriktirler. Bu durumda B noktasının PM'ye göre simetriği olan E noktası da MNP üçgeninin çevrel çemberinin üstünde olmalıdır. Ayrıca, PM, ABC üçgeninin kenarortaylarını birleştirdiğinden, E noktası AC kenarının üstünde olmalıdır. Simetrinin tanımından dolayı, BE doğrusu PM'yi ve dolayısıyla AC'yi dik keser. Demek ki E, B'ye ait yükseklik ayağıdır. Aynı işlemleri ANP ve MNC üçgenleri için de yaparsak, D ve T noktalarının da dokuz nokta çemberi üzerinde olacağını anlayabiliriz.

Şimdi bu kanıtladığımızı kullanarak çemberin ayrıca X, Y, Z noktalarından da geçtiğini kanıtlayalım. Bir sonraki şekilden takip edin.

AHB, BHC ve CHA üçgenlerine odaklanıyoruz. Bu üçgenlerin yükseklik ayaklarının ABC üçgenininkilerle aynı olduğunda yatıyor kanıt. O halde bu üçgenlerin dokuz nokta çemberleri, ABC üçgeninin dokuz nokta çemberiyle aynı olur. Sonuç olarak, bu çemberler, yukarda gördüğümüz üzere, AHB, BHC ve CHA üçgenlerinin kenarortay noktalarından da geçmeliler. Kanıt tamamlanmıştır.

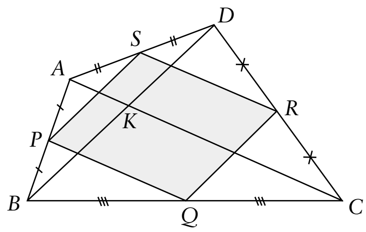


Üçüncü Kanıt. Önce, üçüncü kanıtımızda kullanacağımız bir teoremi sunup kanıtlayalım. Fransız matematikçi Pierre Varignon'a (1654-1722) ait olan bu ilginç teoremin mutlaka bilinmesi gerekir.



Pierre Varignon (1654-1722)

Varignon Teoremi. *Bir dörtgenin kenarortay noktaları bir paralelkenar belirtir ve bu paralelkenarın kenarları köşegenlere paraleldir.*

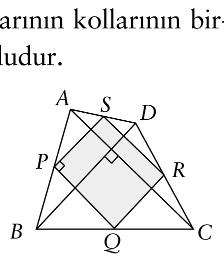


Kanıt: Dörtgenimiz $ABCD$ ve bu dörtgenin AB, BC, CD, DA kenarlarının orta noktaları da sırasıyla P, Q, R, S olsun. P ve S orta noktalar olduğundan ABD üçgeninde $[PS]$ orta tabandır. Benzer şekilde $[PQ]$, $[QR]$ ve $[RS]$'nin de orta taban olduğunu buluruz. Orta tabanlar, ilgili tabanlara paralel olacağından $PQRS$ dörtgeni bir paralelkenardır. □

Bu paralelkenara ***Varignon paralelkenarı*** denir.

Varignon paralelkenarının iç açı ölçüleri, dörtgenin köşegenlerinin belirttiği açıların ölçüleriyle aynıdır. Bunu, DKC ile SPQ açılarının kollarının birbirlerine paralel olmasına borçludur.

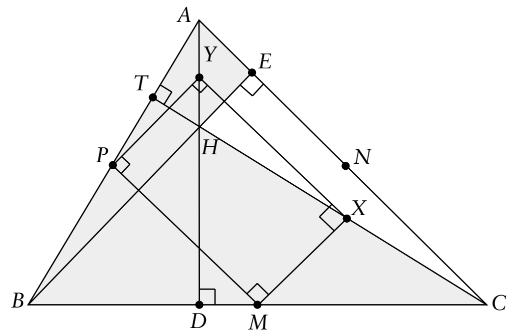
O halde bir dikgenin, yani köşegenleri dik olan bir dörtgenin Varignon paralelkenarı bir dikdörtgendir.

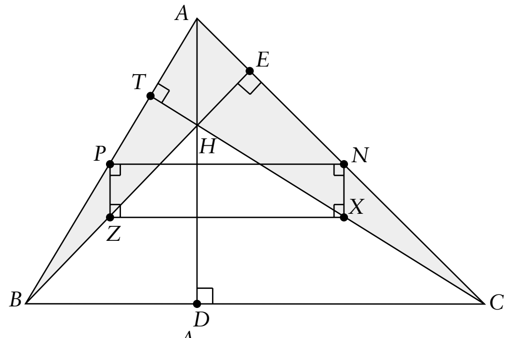


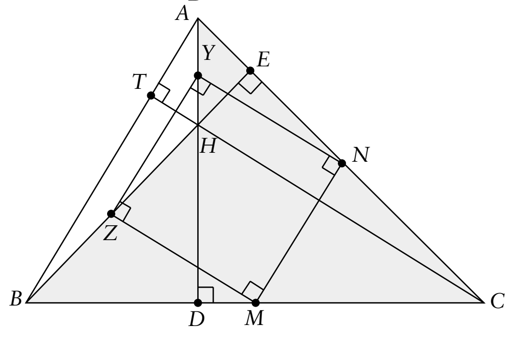
Varignon teoremi sadece dışbükey dörtgenler için değil, tüm dörtgenler için geçerlidir. Dörtgenin içbükey, çapraz ya da aykırı olması önermenin doğruluğunu bozmaz. Dışbükeye yapılan kanıtın işlemleri aynen uygulanırsa bu görülür. Şimdi tekrar dokuz nokta çemberine dönüyoruz.

Bir *ABC* üçgeni ve bu üçgenin *AD*, *BE*, *CT* yüksekliklerini çizelim. Yüksekliklerin kesiştiği yere, yani diklik merkezine her zamanki gibi *H* diyelim. *HA*, *HC* ve *HB*'nin ortanoktaları da sırasıyla *X*, *Y* ve *Z* olsun.

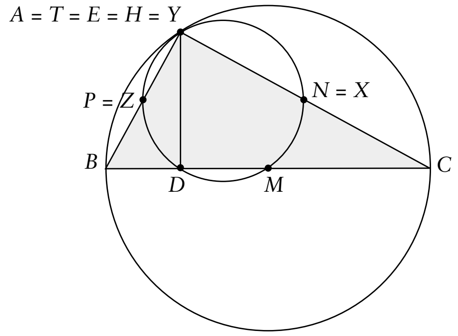
Üstteki şekillerden de görüldüğü üzere, *ABCH*, *ABHC* ve *AHBC* içbükey dörtgenleri dikgendir. O halde Varignon Teoremi gereği *PMXY*, *PZXN* ve *YZMN* dörtgenleri birer dikdörtgendir. Buraya dikkat! Bu dikdörtgenlerin çevrel çemberleri tek bir çemberi işaret eder. Zira dikdörtgenlerin köşegeni çemberin çapı olacaktır ve köşegenlere bakılırsa *YM* = *PX* = *ZN* olduğu görülür. Bu durumda *Y*, *P*, *M*, *X*, *Z*, *N* noktalarının çemberdeş olduğunu anlarız. Diğer yandan *YDM*, *XTP* ve *NEZ* dik üçgenlerinin hipotenüsleri de dikdörtgenlerin köşegen uzunluklarına eşit olduğundan *D*, *E*, *T* noktaları da aynı çember üzerindedir. Sonuçta *Y*, *T*, *P*, *Z*, *D*, *M*, *X*, *N*, *E* noktalarından geçen çember *ABC* üçgeninin dokuz nokta çemberidir. □





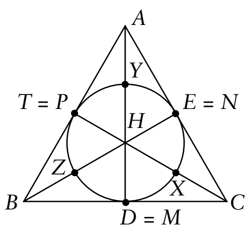


Diküçgende Ne Oluyor? Eğer üçgen dikse, o zaman noktalardan bazıları eşitleniyor ve geriye sadece beş nokta kalıyor. Bu durum üçgenlerin dik

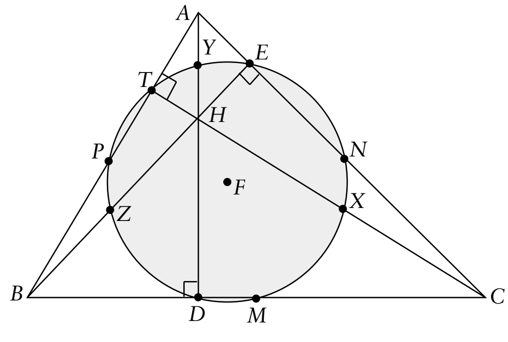


olmadığı diğer durumların limiti olduğundan, üçgenler dikleştikçe dokuz nokta çemberleri giderek bu beş noktadan geçen bir başka çembere, üstelik çevrel çembere içten teğet olan bir çembere yakınsarlar.

Eşkenar Üçgende Ne Oluyor? Bir başka ilginç durum da üçgen eşkenar olduğunda ortaya çıkıyor. İlginç dediğimize bakmayın siz, aslında en ilginç olmayan durum. Bu durumda, dokuz noktadan altısı ikişer ikişer özdeşleşerek geriye sadece altı nokta kalıyor ve dokuz nokta çemberi içteğet çemberine dönüşüyor. Kanıtı çok kolay.

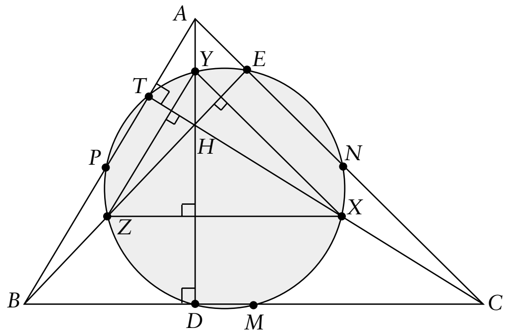


Dokuz Nokta Merkezi. Dokuz nokta çemberinin merkezi genelde *F* veya *N* ile gösterilir. Biz bu noktayı *F* ile göstereceğimizi yazının başlarında ima ettik, çünkü nokta Napoléon noktasıyla karışsın istemiyoruz.



Dokuz Nokta Çemberinin Yarıçapını Bulmak. Madem her üçgenin sadece bir tane dokuz nokta çemberi var, o çemberin yarıçapı üçgenin boyutlarına göre ifade edilebilmeli. Şimdi bu yarıçapın nasıl hesaplanacağını göreceğiz. Hesabın ne kadar uzun süreceğini baştan söyleyeyim. Çevrel çember yarıçapının hesaplanma süresinden en çok 1 saniye daha uzun sürecek, eğer aşağıdaki teoremi biliyorsanız...

Teorem 1. *Dokuz nokta çemberinin yarıçapı, çevrel çember yarıçapının yarısıdır.*



Kanıt: Y, Z, X noktaları sırasıyla $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$ doğru parçalarının orta noktaları olduğundan $YZ \parallel AB$, $ZX \parallel BC$, $XY \parallel CA$ olur. O halde $YZX \approx ABC$ olur. Benzerlik oranının 1:2 olduğu sanırım aşikâr. ABC üçgeninin dokuz nokta çemberi YZX üçgeninin çevrel çemberi olduğundan teorem kanıtlanmış oldu. □

İkinci Kanıt: Şöyle de düşünebiliriz: ABC üçgeniyle MNP üçgeninin 1:2 oranında benzer olduğunu biliyoruz. ABC üçgenine göre dokuz nokta çemberi olan çember, MNP üçgenine göre çevrel çemberdir. Bu son çemberin yarıçapı da ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarısıdır. □

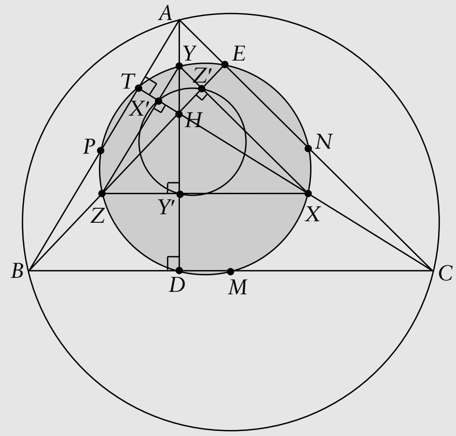
Dik üçgenler için hesap çok daha basit oluyor. Dik üçgenlerde hipotenüs çevrel çember çapına eşit olduğundan, dik üçgenlerin dokuz nokta çemberlerinin yarıçapları hipotenüslerinin 1/4'üdür.

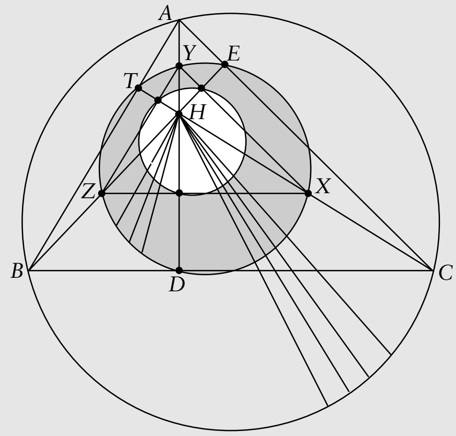
***F* üçgenin neresinde?** Şimdi de dokuz nokta merkezinin üçgenin neresinde konumlandığına bir göz atalım. Aşağıdaki teoremle birlikte F'yi elimizle koymuş gibi bulabileceğiz.

Teorem 2. *Dokuz nokta çemberinin merkezi F, üçgenin diklik merkezi H ile çevrel çember merkezi olan O'yu birleştiren doğru parçasının orta noktasıdır. Yani* $|HF| = |FO|$.

Ek Olarak...

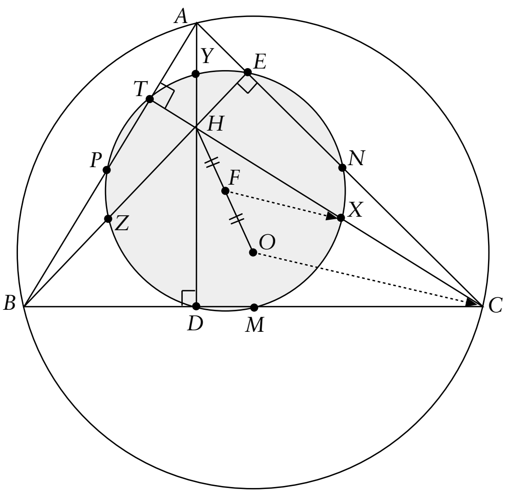
Diklik merkezi H'den üçgenin çevrel çemberine çizilen tüm doğru parçalarını dokuz nokta çemberi iki eşit uzunlukta parçaya ayırır. Örneğin, $|HY| = |YA|$, $|HZ| = |ZB|$ ve $|HX| = |XC|$. H'den çevrel çembere çizilecek tüm doğru parçaları için bu eşitliklerin sağlanacağının kanıtını okura bırakıyoruz.





Diğer yandan ABC'nin dokuz nokta çemberi XYZ'nin çevrel çemberi olduğundan ve $X'Y'Z'$ üçgeninin çevrel çemberi XYZ üçgeninin dokuz nokta çemberi olduğundan, biraz önce gördüğümüzden, $|HX'| = |X'T|$, $|HY'| = |Y'D|$ ve $|HZ'| = |Z'E|$ çıkar.

Kanıt: HOC üçgenini çizelim. Dokuz nokta çemberinin HC'yi kestiği nokta X olsun. $|HX| = |XC|$ olduğunu biliyoruz. X'ten OC'ye paralel çizilen doğrunun HO'yu kestiği nokta aranan F noktasıdır, çünkü X orta nokta olduğundan HOC üç-



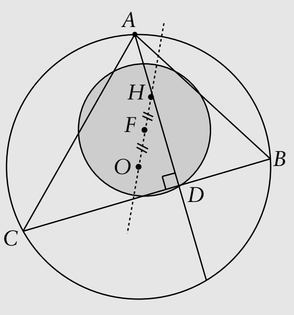
geninde $[FX]$ orta taban olur ve boyu da çevrel çember yarıçapının yarısı kadar olur. X için yaptığımızı Y (ve Z) için de yapabileceğimizden F gerçekten 9 nokta çemberinin merkezidir. □

Alıştırma. Çevrel çember yarıçapı R olan bir ABC üçgeninde $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FH^2 = 3R^2$'dir.

Ayrıca...

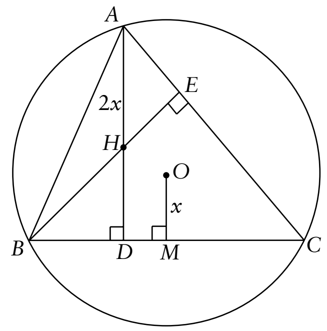
Bir üçgenin çevrel çemberinin üstüne, diklik merkezi ABC üçgenininkiyle aynı olan üçgenler yerleştirilirse, bu üçgenlerin hepsinin dokuz nokta çemberleri aynı olur.

Biri diğerinin yarısı ve O ve F merkezli içi içe iki çember verilsin. Ayrıca OF üstünde $|OF| = |FH|$ eşitliğini sağlayan bir $H \neq O$ noktası verilsin. Diklik merkezi H, çevrel çemberi büyük çember, 9 nokta çemberi küçük çember olan bir ABC üçgeni şöyle bulunur: A, büyük çember üstünde herhangi bir nokta olsun. AH doğrusu küçük çemberi D'de kessin. D'den AD'ye çekilen dik, büyük çemberi B ve C noktalarında kessin. İşte istenen ABC üçgeni. Kanıtı okura bırakıyoruz.

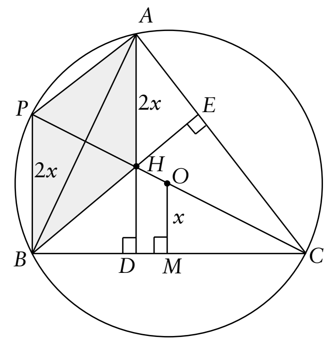


Euler Doğrusu. F'nin H ve O'ya eşit uzaklıkta olması ilginç ama aynı zamanda bu üç noktanın doğrusal olması F'ye başka bir ilginçlik katmakta. MD 2004-III, sayfa 60'da kanıtladığımız şu önsavı bir daha kanıtlayacağız:

Önsav. *Herhangi bir ABC üçgeni verilsin ve bu üçgenin çevrel çemberi çizilsin. Üçgenin herhangi bir köşesinin diklik merkezine olan uzaklığı, çevrel çember merkezinin seçilmiş köşenin karşısındaki kenara olan uzaklığının iki katıdır. Yani yandaki şekle göre,* $|AH| = 2 \cdot |OM|$.



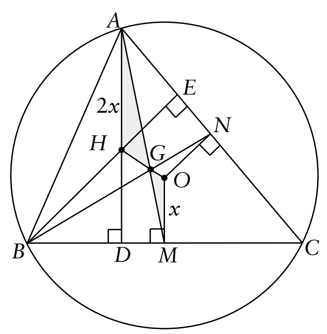
Kanıt: C'den geçen çap, çevrel çemberi P'de kessin. Tales'in ünlü teoremi gereği çapı gören çevre açılar dik olacağından, $m(CAP) = m(CBP) = 90^o$.



$|PO| = |OC|$ ve $|BM| = |MC|$ olduğundan, PBC üçgeninde OM orta tabandır. $|OM| = x$ ise $|PB| = 2x$ olur. Diğer yandan PB // AD ve PA // BE olduğundan (çünkü $m(PBC) = m(PAC) = 90^o$), $PBHA$ bir paralelkenardır. O halde $|AH| = |PB| = 2x$'dir. □

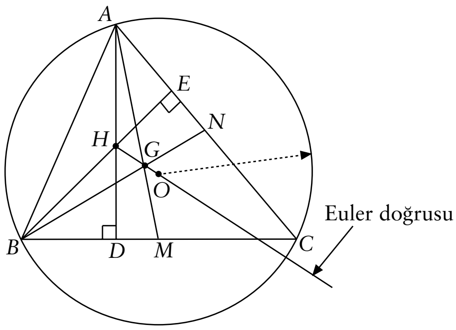
Teorem 3. *Bir üçgende diklik merkezi H, kenarortayların kesişimi (ağırlık merkezi) G ve çevrel çember merkezi O doğrusaldır.*

Kanıt: Şekilden takip edelim. AM kenarortaydır. Diğer yandan AH // OM olduğundan kelebek oluşur. Önsavdan dolayı $|AH| = 2|OM|$ olduğundan kelebekteki benzerlik oranı 2:1'dir. O halde BN'nin AM'yi kestiği nokta, 2:1 oranından dolayı, ABC üçgensel bölgesinin ağırlık merkezidir. Böylelikle kanıt tamamlanır. □

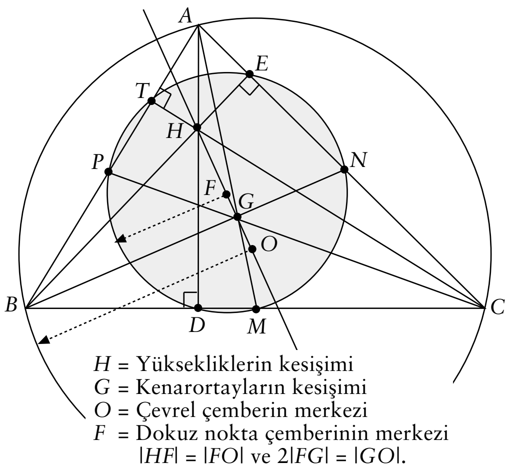


Doğrusallığın yanısıra $|HG| = 2|GO|$ eşitliğini de kanıtladığımızı fark ettiniz mi?

H, G, O noktalarının üzerinde bulundukları bu doğruya ***Euler Doğrusu*** denir. Bu doğru daha



onlarca özel noktayı da üzerinde barındırır. Örneğin Teorem 2'de F'nin de Euler doğrusu üzerinde olduğunu öğrendik.



Şimdi tüm bu yazıyı uğruna yazdığımız bir teoreme geldik.

Harmonik Sıra

W, Y, X, Z noktaları doğrusal dört nokta olsun. Eğer $|WY|/|YX| = |WZ|/|ZX|$ ise Y ve Z noktalarına W ve X noktalarının ***harmonik eşlenikleri*** denir. Bu dört noktanın da ***harmonik sırada*** oldukları söylenir.

$|HG| = 2|GO|$ ve $|HF| = |FO|$ eşitliklerinden $|HF| : |FG| : |GO| = 3 : 1 : 2$ olduğunu buluruz.

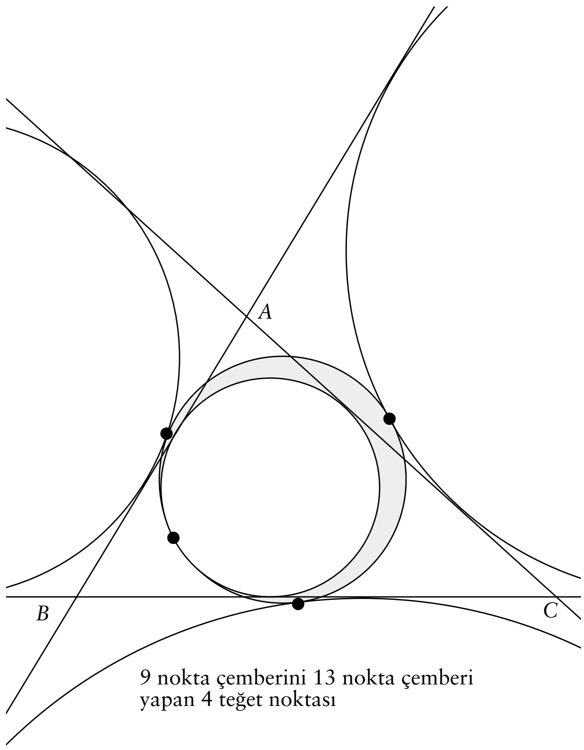
$$|OG|/|GF| = |OH|/|HF| = 2$$

olduğundan, G ve H noktaları, O ve F noktalarının harmonik eşlenikleridir. Bundan dolayı da O, G, F, H noktaları harmonik sıradadırlar.

Peki, İççember Merkezi Nerde?

I noktası da bu Euler doğrusunun üstünde mi diye merak ettiyseniz söyleyeyim, her zaman değil! Üçgen ikizkenar ise üstünde, değilse değil... Üçgenin çeşitkenar olduğunu varsayalım. O halde herhangi bir köşesinden geçen yükseklik, iç açıortay ve kenarortayın o köşe dışında ortak bir noktaları yoktur. Bu durum diğer köşeler için de geçerli olduğundan diklik merkezi, iç çember merkezi ve ağırlık merkezi bir üçgen oluştururlar. Ama üçgen ikizkenar olursa, tepeye ait yükseklik, iç açıortay ve kenarortay çakışıktır. Yani H, I, G doğrusaldır. HG doğrusu zaten Euler doğrusu olduğundan I da üstünde olur.

Feuerbach Teoremi. *Bir üçgenin dokuz nokta çemberi, o üçgenin iç çemberine içten, dış çemberlerine dıştan teğettir.*



Bu teoremi Feuerbach (1800-1834) bulmuş ve kanıtlamıştır. Onun anısına bu noktalara ***Feuerbach Noktaları*** denir. Hatta bu teğet noktalarının belirttikleri üçgenlere de Feuerbach üçgenleri. (Şimdi ***onüç nokta çemberi*** oldu!)

Feuerbach Teoremi'ni kanıtlayacak yerimiz kalmadı. Mecburen gelecek sayıyı bekleyeceksiniz. ♣