Problemler ve Çözümleri

Refail Alizade*
rafailalizade@iyte.edu.tr

Bu, bir yıl sürecek bir yarışmadır. Grup halinde, okul ya da bireysel olarak katılabilirsiniz.

Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Ayrıca lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

Her sorunun çözümünü ayrı bir kâğıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

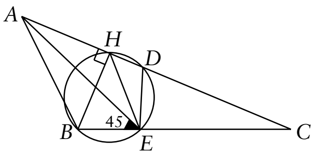
Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenciyseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla İzmir adresine 30.06.2006 tarihine kadar adıma gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A331. x ve y pozitif tamsayılar olmak üzere $x^2 + xy + y^2$ sayısının birler basamağı sıfırdır. Bu sayının onlar basamağının da sıfır olduğunu kanıtlayınız.

A332. A açısı dar açı olmak üzere ABC üçgeninde AE açıortayı ve BH yüksekliği çizilmiştir. $m(AEB) = 45°$ ise, $m(EHC)$'yi bulunuz.



A333. Tahtaya 1'den 2005'e kadar olan pozitif tamsayılar yazılmıştır. Bunlardan herhangi n tanesi silindiğinde, geriye kalan $2005 - n$ sayı arasında toplamı da tahta üzerinde olan en az iki sayı bulunur. n en fazla kaç olabilir?

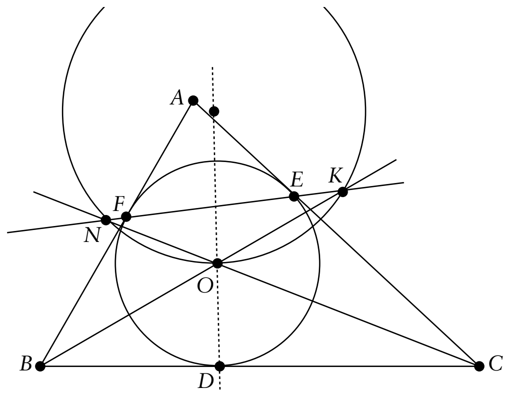
A334. a ve b pozitif gerçel sayıları
$$a^3 + b^4 \le a^2 + b^3$$
eşitsizliğini sağlar. $a^3 + b^3 \le 2$ eşitsizliğini kanıtlayınız.

A335. 2006 tane pozitif tamsayının toplamı çarpımından büyüktür. Bu sayılarıdan en fazla kaçı 1'den farklı olabilir?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y331. x ve y pozitif tamsayılar olmak üzere $x^4 + x^2y^2 + y^4$ sayısı 11'e bölünür. Bu sayının 14641'e de bölündüğünü kanıtlayınız.

Y332. ABC üçgeninin O merkezli içteğet çemberi, üçgenin $[AB]$, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarlarına sırasıyla F, D ve E noktalarında değmektedir. BO ve CO doğruları FE doğrusunu sırasıyla K ve N noktalarında keser. OKN üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin, O ve D noktalarının doğrusal olduğunu kanıtlayınız.



Y333. Tahtaya 1'den 2005'e kadar olan pozitif tamsayılar yazılmıştır. Bunlardan herhangi n tanesi silindiğinde, geriye kalan $2005 - n$ sayı arasında toplamı da tahta üzerinde olan 10 tane sayı bulunur. n en fazla kaç olabilir?

Y334. Her n pozitif tamsayısı için,
$$|\{n/1\} - \{n/2\} + \{n/3\} - \dots + (-1)^{n+1}\{n/n\}| < \sqrt{(2n)}$$
eşitsizliğinin doğru olduğunu kanıtlayınız. (Burada $\{a\} = a - [a]$, a sayısının kesir değeridir.)

Y335. Ali daire şeklinde bir havuzun tam ortasında yüzerken dışarda iştahla onu izleyen bir aslan farkeder. Aslan yüzme bilmiyor ve havuz dışında Ali'den daha yavaş koşuyor. (Yani Ali havuzdan çıktığı anda yakalanmazsa kurtulacak). Ali'nin yüzme hızı aslanın koşma hızının, a) üçte birine, b) dörtte birine eşitse, Ali kurtulur mu?

* İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü öğretim üyesi.

ESKİ SORULARA ÇÖZÜMLER (2005-II)
ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A321. *$x^4 - 2y^2 = 1$ denklemini sağlayan tüm (x, y) tam sayı çiftlerini bulunuz.*

Çözüm: (x, y) çifti çözümse, $(\pm x, \pm y)$ de çözümdür, dolayısıyla negatif olmayan çözümleri bulmamız yeterlidir. x elbette tek sayı olmak zorunda, yani $x = 2m + 1$ şeklinde yazılabilir. O halde,

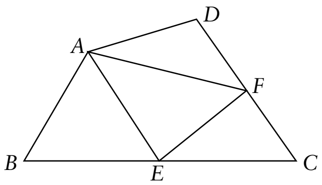
$$2y^2 = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1) = 2m(2m+2)(4m^2+4m+2).$$

Demek ki y çift. $y = 2n$ olsun. Denklem,

$$n^2 = m(m+1)[2m(m+1)+1]$$

şekline dönüşür. m, $m + 1$ ve $2m(m + 1) + 1$ aralarında asal olduğundan bunların herbiri tamkare olmalıdır. Tamkare olan ardışık sayılar sadece 0 ve 1 olduğundan, $m = 0$'dır. Bu durumda $x = 1$, $n = 0$ ve $y = 0$ elde edilir. Çözümler: $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$.

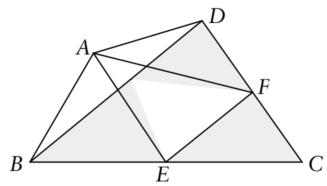
A322. *$ABCD$ dışbükey dörtgeninde BC ve CD kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F'dir. AE, AF ve EF doğruları, dörtgeni, alanları dört ardışık pozitif tamsayıya eşit olan dört üçgene böler. ABD üçgeninin alanı en fazla kaç olabilir?*



Çözüm: Sorudaki üçgenlerin alanları n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ olsun. $A(BCD) = 4A(CEF) \geq 4n$ olduğundan,

$$A(ABD) = A(ABCD) - A(BCD) \leq 4n + 6 - 4n = 6$$

eşitsizliği elde edilir ve sadece $A(CEF) = n$ durumunda eşitlik elde edilir. Tabanları $|AD| = 6$, $|BC| = 4$ ve yüksekliği 2 olan $ABCD$ yamuğu, ABD üçgeninin alanının gerçekten 6 olabileceğini gösterir.



A323. *Satranç tahtasının iki hanesinde bir beyaz ve bir siyah dama bulunur. Her adımda damalardan biri komşu hanelerden (ortak kenarı bulunan hanelere komşu haneler denir) birine götürülebilir. Damalardan ikisi de aynı anda aynı hanede bulunamaz. Bu adımlarla damaların bütün yerleşme durumları, her biri birer kez olmak üzere elde edilebilir mi?*

Çözüm: Damaların aynı renkli hanelerde bulunduğu durumlara *uyumlu*, farklı renkli hanelerde bulunduğu durumlara *uyumsuz durumlar* diyelim. Her adım sonucu damalar uyumlu durumdaysa uyumsuz duruma, uyumsuz durumdaysa uyumlu duruma geçer. Dolayısıyla tüm durumlar birer kez elde edilebilseydi uyumsuz durum sayısıyla uyumlu durum sayısı arasındaki fark en fazla 1 olurdu. Ama uyumsuz durum sayısı $2 \cdot 32^2$, uyumlu durum sayısı da $2 \cdot 32 \cdot 31$ olduğundan tüm durumlar elde edilemez.

A324. *$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ve $Q(x) = x^2 + px + q$ polinomları, uzunluğu 2'den büyük olan bir I aralığının içerisinde negatif, dışarısında da pozitif değerler alıyor. $P(x_0) < Q(x_0)$ olacak şekilde bir x_0 gerçel sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $I = [x_1, x_2]$ olsun.

$$P(x_1) = P(x_2) = Q(x_1) = Q(x_2) = 0$$

olacağı açıktır. O halde

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + Ax + B)$$

ve

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\text{'dir.}$$

Tüm x'ler için $P(x) \geq Q(x)$, yani

$$(x - x_1)(x - x_2)(x^2 + Ax + B - 1) \geq 0$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda $x^2 + Ax + B - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ olmak zorunda. Buradan

$$A = -(x_1 + x_2) \text{ ve } B = x_1x_2 + 1$$

elde edilir. Dolayısıyla $x^2 + Ax + B$ polinomunun diskriminantı

$$\Delta = A^2 - 4B = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4 = (x_1 - x_2)^2 - 4$$

tür ve pozitiftir ($x_2 - x_1 > 2$ olduğunu hatırlayalım). O halde $P(x)$'in x_3, x_4 gibi iki kökü daha vardır. Bu köklerin biri x_1, diğeri de x_2 ile çakışsaydı $P(x)$, hiçbir x için negatif olamazdı; dolayısıyla bunlardan en az biri (diyelim x_3) hem x_1, hem de x_2'den farklıdır. $x_3 \in I$ ise, $P(x)$ polinomu I'nın içerisinde, $x_3 \notin I$ ise, $P(x)$, I'nın dışında hem pozitif hem de negatif değerler alacak. Çelişki! Böylece $P(x_0) < Q(x_0)$ olacak şekilde bir x_0 bulunur.

A325. *Ali tahtaya 5 basamaklı bir A pozitif tamsayısı yazıyor ve bir n pozitif tamsayısı söylüyor. Yıldız'la Zeynep sırayla şu şekilde yeni sayılar oluşturuyorlar: Yıldız son yazılan sayıya sayının rakamlarından birini ekliyor, Zeynep de bu sayıdan sayının rakamlarından birini çıkarıyor. n hamleden sonra tahtadaki n sayıdan en az 2005'i birbirine eşitse Yıldız'la Zeynep kazanıyor, yoksa kaybediyorlar. Herkes en iyi şekilde oynarsa kim kazanır?*

Çözüm: Ali'nin yazdığı A sayısı 99.990'dan küçükse yazılan sayılar hep 100.000'den küçük kalır. Gerçekten de, sayının 100.000'i geçmesi için Yıldız'ın 99.990 sayısını geçmesi gerekir. Ama Yıldız 99.991 ile 99.999 arasında bir $99.99a$ sayısı elde ettiğinde Zeynep'in çıkaracağı sayı en az a olacağından bir sonraki sayı 99991'den küçük olur ve Yıldız 100.000'i aşamaz. O halde Ali $n = 2004 \cdot 10^5 + 1$ alırsa, tahta üzerinde sadece 0, 1, 2, ... , 99.999 sayıları oluşabileceğinden en az 2005 kez tekrarlanan bir sayı bulunacak. Böylece Yıldızla Zeynep oyunu kazanacak.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y321. *p asal sayısı, n ve m negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $p^2 = 2^n \cdot 3^m + 1$ eşitliğini sağlar. p en fazla kaç olabilir?*

Çözüm: $(p-1)(p+1) = 2^n \cdot 3^m$ eşitliğinden dolayı, $n = 0$ ise, $p - 1 = 3^a$, $p + 1 = 3^b$ şeklinde olmalıdır, demek ki $3^b - 3^a = 2$ ve bu eşitlik sadece $b = 1$, $a = 0$ için sağlanır. Bu durumda $p = 4$, asal değil. Eğer $n > 0$ ise $p - 1$ ve $p + 1$ iki ardışık çift sayı olmak zorunda, dolayısıyla biri 4'e bölünür, diğeri bölünmez. Ayrıca sadece biri 3'e bölünür. O halde bu sayılar, $k \geq 2$ olmak üzere, 2 ve $2^k \cdot 3^m$ ya da $2 \cdot 3^m$ ve 2^k şeklindedir. Birinci durumda $p = 3$'tür. İkinci durumda iki altdurum olabilir,

1) $p + 1 = 2^k$, $p - 1 = 2 \cdot 3^m$. Bu durumda k çiftse,

$$p = 2^k - 1 = (2^{k/2} - 1)(2^{k/2} + 1)$$

eşitliğinden dolayı sadece $k = 2$ durumunda p asal sayıdır, $p = 3$. Öte yandan, k tekse,

$$3^m = (p-1)/2 = 2^{k-1} - 1$$
$$= (2^{(k-1)/2} - 1)(2^{(k-1)/2} + 1)$$

eşitliğinin sağ tarafındaki çarpanlar arasındaki fark 2 olduğundan, $k = 3$, $m = 1$, $p = 7$ olmak zorunda.

2) $p + 1 = 2 \cdot 3^m$, $p - 1 = 2^k$. Bu durumda

$$2^k + 1 = 2 \cdot 3^m - 1,$$

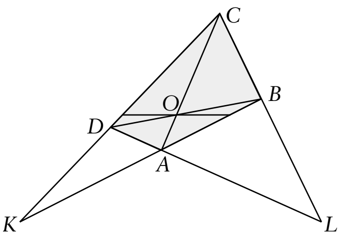
buradan da $2^{k-1} + 1 = 3^m$ elde edilir. Bizi sadece $p > 7$ durumu ilgilendirdiği için $k > 2$ alabiliriz. Bu durumda sol taraf 4'e bölündüğünde 1 kalan verdiğinden m çift olmalıdır. O halde,

$$2^{k-1} = (3^{m/2} - 1)(3^{m/2} + 1)$$

eşitliğinden iki ardışık çift sayı olan $3^{m/2} - 1$ ve $3^{m/2} + 1$ sayıları 2'nin kuvvetleri olmak zorunda. Bu da sadece $3^{m/2} - 1 = 2$, yani $m = 2$, $k = 4$, dolayısıyla $p = 17$ durumunda olabilir. Böylece koşulu sağlayan en büyük p asal sayısı 17'dir.

Çözenler: Oktay Balkış (Aksaray Anad. Öğr. L.), Murat Bozan (Bahçelievler, Ank.), Alper Çay (Uzman D., Kayseri), Hasan Denker (Feneryolu, İst.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Küt.), Ayhan Gündüz (Derviş Paşa L., Osmaniye), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Anar Hüseyin (Anadolu Ü., Esk.), Fehmi Emre Kadan (İzm. Fen L.). Umut Varolgüneş (İzm. Fen L.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Y322. *Bir dışbükey dörtgenin karşı kenarlarının uzantıları K ve L noktalarında kesişiyorlar. Dörtgenin köşegenlerinin O kesişim noktasından geçen ve KL'ye paralel olan doğrunun dörtgenin içerisinde kalan parçasının orta noktasının O olduğunu kanıtlayınız.*



Ekrem Emre'nin Çözümü: Genelliği bozmadan O'dan geçen ve KL'ye paralel olan doğru parçasının şekildeki gibi $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarını (U ve T noktalarında) kestiğini varsayabiliriz. $PB \| DN \| KL$ olmak üzere $[AB]$ üzerinde N ve $[CD]$ üzerinde P noktalarını alalım. R, S ve M şekildeki gibi olsunlar. CPR ile CKM ve CRB ile CML üçgenlerinin benzerliğinden,

$$|PR|:|KM| = |CR|:|CM| = |RB|:|ML|$$

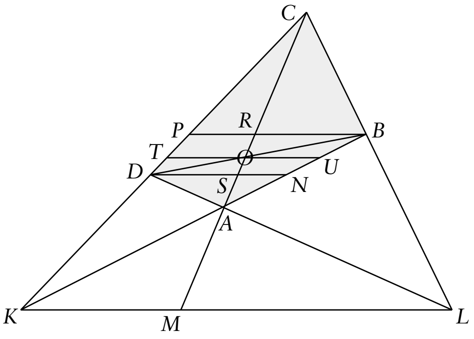
eşitlikleri; DAS ile LAM ve NAS ile KAM üçgenlerinin benzerliğinden de,

$$|DS|:|ML| = |SA|:|MA| = |SN|:|KM|$$

eşitlikleri çıkar. Bunlardan da,

$$|PR|:|BR| = |KM|:|ML| = |SN|:|DS|$$

elde edilir. Bundan ve BOR ile DOS üçgenlerinin benzerliğinden, $|PR|:|SN| = |BR|:|DS| = |RO|:|OS|$ elde edilir. Bu ve $m(PRO) = m(NSO)$ eşitliğinden PRO ve NSO üçgenlerinin benzerliği çıkar. Dolayısıyla $m(POR) = m(NOS)$'dir, yani P, O ve N noktaları doğrusaldır. Şimdi BDP ile ODT, PBO ile



NDO ve BNP ile UNO üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\begin{aligned}|BP|/|OT| &= |BD|/|OD| = |OB|/|OD| + 1\\ &= |OP|/|ON| + 1 = |PN|/|ON|\\ &= |BP|/|OU|\end{aligned}$$

buradan da $|OT| = |OU|$ elde edilir.

Çözenler: Hasan Denker (Feneryolu, İst.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Kütahya), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.)

Y323. *Birinde* 51, *ikincisinde* 49 *ve üçüncüsünde* 5 *bilye bulunan üç küme verilmiştir. Her hamlede birkaç kümedeki bilyeler bir kümeye birleştirilebilir veya çift sayıda bilye bulunan bir küme eşit sayıda bilye içeren iki kümeye bölünebilir. Bu işlemlerle her birinde birer bilye bulunan* 105 *küme elde edilebilir mi*?

Çözüm: Bir işlemden sonra her kümedeki bilye sayısı bir n tek sayısına bölünürse, bundan sonraki her işlem sonucu da her kümedeki bilye sayısının n'ye bölüneceği açıktır. İlk hamleden sonra üç durum olabilir,

1) 100 ve 5 bilyeden oluşan iki küme (her iki sayı 5'e bölünür.)

2) 56 ve 49 bilyeden oluşan iki küme (ikisi de 7'ye bölünür.)

3) 51 ve 54 bilyeden oluşan iki küme (ikisi de 3'e bölünür.)

Dolayısıyla hangi işlem yapılırsa yapılsın ikinciden başlayarak her hamle sonucu her kümedeki bilyelerin sayısı 5, 7 ve 3 sayılarından birine bölünecek ve böylece 1 olamaz.

Çözenler: Hasan Denker (Feneryolu, İst.), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), Levent Mustafa Koçoğlu (Süleyman Demirel Fen L., Kahramanmaraş).

Y324. $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *polinomunun üç gerçel kökü bulunur*, $Q(x) = x^2 + 2x + 2005$ *olmak üzere* $P(Q(x))$ *polinomunun gerçel kökleri yok*. $P(2005) > 1$ *olduğunu kanıtlayınız*.

Çözüm: $P(x)$'in kökleri x_1, x_2, x_3 ise,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

buradan da,

$$P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$$

elde edilir. O halde $Q(x) - x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ polinomunun gerçel kökü yok. Dolayısıyla,

$$\Delta_i = 4 - 4(2005 - x_i) < 0.$$

Burdan da $2005 - x_i > 1$ elde edilir. Demek ki $P(2005) = (2005 - x_1)(2005 - x_2)(2005 - x_3) > 1$.

Çözenler: Oktay Balkış (Aksaray Anad. Öğr. L.), Hasan Başpınar (İnönü Ü., Malatya), Ömer Boynukalın (Karaman Milli Piyango Fen L.), Hasan Denker (Feneryolu, İst.), Mustafa Dönmez (Turgutlu Halil Kale Fen L.) ve Yaşar Dönmez (Turgutlu L.), Uğurcan Gümüş (Sentez D., İzm.), Ayhan Gündüz (Derviş Paşa L., Osmaniye), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.).

Y325. *Ardışık olmayan iki a ve b pozitif tamsayısı sırasıyla* $b^2 - 1$ *ve* $a^2 - 1$ *sayılarını bölerse*, a *ve* b'*ye yakın sayılar diyelim* (*örneğin* 3 *ve* 8 *yakın sayılardır*). *Her* $n \geq 4$ *tamsayısı için* $[n, 8n - 17]$ *aralığında yakın sayı çiftinin bulunduğunu kanıtlayınız*.

Çözüm: $\{4, 15\}$ yakın sayı çifti $[4, 15]$ aralığındadır. $5 \leq n \leq 8$ ise, $8n - 17 \geq 23$ olduğundan $\{8, 21\}$ yakın sayı çifti $[n, 8n - 17]$ aralığındadır. $9 \leq n \leq 21$ durumunda da benzer şekilde $[n, 8n - 17]$ aralığında $\{21, 55\}$ yakın sayı çifti bulunur. $n > 21$ olsun. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ve her $a \geq 3$ için $a_k = 3a_{k-1} - a_{k-2}$ olarak tanımlanan $\{a_k\}$ dizisini alalım. Bu dizinin n'den küçük olan en büyük terimi a_t olsun.

$$21 = a_4 \leq a_t < n$$

ve

$$a_{t+2} = 8a_t - 3a_{t-1} \leq 8a_t - 3a_3 < 8n - 24$$

olduğundan $a_{t+1}, a_{t+2} \in [n, 8n - 17]$'dir. O halde her k için a_k ve a_{k+1} sayılarının yakın olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Önce tümevarımla

$$a_{k+1}{}^2 - a_k a_{k+2} = 1$$

olduğunu gösterelim.

Eğer $k = 1$ ise, $a_2{}^2 - a^1a^2 = 9 - 1{\cdot}8 = 1$'dir.

Şimdi $a_{k+1}{}^2 - a_k a_{k+2} = 1$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\begin{aligned}a_{k+2}{}^2 - a_{k+1}a_{k+3} &= a_{k+2}{}^2 - a_{k+1}(3a_{k+2} - a_{k+1})\\ &= a_{k+2}{}^2 - 3a_{k+1}a_{r+2} + a_k a_{k+2} + 1\\ &= a_{k+2}{}^2 + a_{k+2}(a_r - 3a_{k+1}) + 1\\ &= a_{k+2}{}^2 - a_{k+2}{}^2 + 1 = 1,\end{aligned}$$

yani eşitlik $k + 1$ için de doğrudur. Bu durumda her k için $a_k|(a_{k+1}{}^2 - 1)$ ve $a_k{}^2 - a_{k-1}a_{k+1} = 1$ eşitliğinden, $a_{k+1}|(a_k{}^2 - 1)$ elde edilir.

Şimdi a_k ve a_{k+1} sayılarının ardışık olmadığını, yani $a_{k+1} - a_k > 1$ olduğunu da tümevarımla kanıtlayalım. $a_2 - a_1 = 2 > 1$'dir. Eğer $a_{k+1} - a_k > 1$ ise,

$$\begin{aligned}a_{k+2} - a_{k+1} &= 3a_{k+1} - a_k - a_{k+1}\\ &= 2a_{k+1} - a_k > a_{k+1} - a_k > 1\end{aligned}$$

dir. Tümevarım bitti. Böylece a_{t+1} ve a_{t+2} yakın sayılardır.

Çözenler: Hasan Denker (Feneryolu, İst.), Ekrem Emre (Dumlupınar Ü., Kütahya), Zekeriya Güney (Muğla Ü.), İsmail Yılmaz (DPT, Ank.). ♣