Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü Liseler Yarışması 2005

Soru ve Yanıtlar

1. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 = ?$

Çözüm: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 = (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + ... + (99-100)(99+100) = -(1+2+3+...+100) = -(100\times 101)/2 = -5050$.

2. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} = ?$

Çözüm: $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ olsun.

Demek ki,

$$x^3 = 5+2\sqrt{13}+5-2\sqrt{13} + 3\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right)\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right) = 10-9x.$$

Dolayısıyla x sayısı $x^3 + 9x - 10$ polinomunun bir gerçel köküdür. Ama

$$x^3 + 9x - 10 = (x-1)(x^2+x+10)$$

eşitlğinden, bu polinomun başka kökü olmadığı anlaşılır. Demek ki x bu polinomun tek kökü, yani 1'dir.

3. *$P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan -1 ve bölüm polinomunun katsayılarının toplamı 2'dir. $P(x+1)^2$ polinomunun x^2 ile bölümünden kalan ne olur?*

Çözüm: $P(x) = (x-1)Q(x) - 1$ olsun. Demek ki,

$$P(x+1) = xQ(x+1) - 1$$

ve

$$P(x+1)^2 = x^2Q(x+1)^2 - 2xQ(x+1) + 1.$$

Bölüm polinomunun katsayılar toplamı 2 olarak verildiğinden $Q(1) = 2$ olmalı ve dolayısıyla bir $R(x)$ polinomu için

$$Q(x) = (x-1)R(x) + 2$$

eşitliği sağlanmalıdır. Demek ki

$$Q(x+1) = xR(x+1) + 2.$$

Bu yerine konduğunda

$$P(x+1)^2 = x^2Q(x+1)^2 - 2x(xR(x+1)+2) + 1 = x^2Q(x+1)^2 - 2x^2R(x+1) - 4x + 1$$

bulunur ve x^2 ile bölümünden $-4x+1$ kalır.

4. *$6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11$ eşitliğini sağlayan bütün (x, y) tamsayı ikililerini bulunuz.*

Çözüm: Eşitlikte y, x cinsinden yazıldığında, $y = (6x^2-13x+11)/(3x-5) = 2x - 1 + 6/(3x-5)$ olur. y'nin tamsayı olması için $3x-5$ sayısı 6'nın böleni olmalıdır, yani $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ olmalıdır. Bunu sağlayan x tamsayı değerleri $x = 1$ ve $x = 2$ olur. Aranılan (x, y) sayı ikilileri de $(2, 9)$ $(1, -2)$ olarak bulunur.

5. *a, b ve c üç farklı gerçel sayıdır. x, y gerçel sayılarının*

$$a^3 + ax + y = 0,$$
$$b^3 + bx + y = 0,$$
$$c^3 + cx + y = 0$$

eşitliklerini sağladığı bilindiğine göre $a+b+c$ kaçtır?

Çözüm: a, b ve c sayıları $P(z) = z^3 + xz + y$ polinomunun kökleridir, o halde toplamları z^2'nin katsayısı olmalıdır. Demek ki $a+b+c = 0$.

6. *$y^4 + 9x^2 - 6y^2 - 30x + 34 = 0$ eşitliğini sağlayan x ve y gerçel sayıları için $y^2 + 3x$ toplamı kaçtır?*

Çözüm: Verilen denklemi düzenleyelim:

$$0 = y^4 + 9x^2 - 6y^2 - 30x + 34 = (y^2-3)^2 + 9(x-5/3)^2$$

olarak yazıldığından $y^2 = 3$, $x = 5/3$ bulunur, böylece aranan değer $y^2 + 3x = 3 + 5 = 8$ olur.

7. *Bir x karmaşık sayısı için $x + 1/x = -1$ ise $x^{2005} + 1/x^{2005}$ ifadesinin değeri kaçtır?*

Çözüm: $x + 1/x = -1$ eşitliğinden, $x^2 + x = -1$ ve her iki taraf x ile çarpıldığında $x^3 = -x^2 - x = 1$ çıkar. Elde edilen bu sonuçla

$$x^{2005} + 1/x^{2005} = (x^3)^{668}x + 1/((x^3)^{668}x) = x + 1/x = -1$$

bulunur.

8. $1\cdot1! + 2\cdot2! + ... + 100\cdot100!$ *sayısının 101'e bölümünden elde edilen bölüm ve kalan kaçtır?*

Çözüm: $n = 100$ olsun ve verilen terimi düzenleyelim:

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)! - k!\right] = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n}k!$$
$$= 2! + ... + (n+1)! - (1! + 2! + ... + n!)$$
$$= (n+1)! - 1 = 101! - 1.$$

Demek ki verilen toplam $101! - 1$ dir. Bunu 101'e böldüğümüzde bölüm $100! - 1$ ve kalan 100 bulunur.

9. 0,1625 *ondalık sayısının pozitif tamsayı olan tam katlarının en küçüğü kaçtır?*

Çözüm: Sayıyı çarpanlara ayırırsak,

$$1625/10^4 = 5^3 \cdot 13/(5^4 \cdot 2^4) = 13/(5 \cdot 2^4) = 13/80$$

elde ederiz. Yanıt 80'dir.

10. (ab) *ve* (ba) *iki basamaklı sayılardır.*

$$(ab) - (ba) = a^2 - b^2$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (ab) *sayısı vardır?*

Çözüm: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = (ab) - (ba) = (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$. Buradan $a = b$ veya $a + b = 9$ bulunur. Bunun tersi de doğrudur, yani $a = b$ veya $a + b = 9$ ise istenilen $(ab) - (ba) = a^2 - b^2$ eşitliği elde edilir. İlk durum için 9, ikinci durum için ise 8 çözüm söz konusudur. Eşitliği sağlayan toplam 17 çözüm vardır.

11. $A = \{1, 2, 3, ..., 200\}$ *kümesinin elemanlarından oluşan iki elemanlı bir altkümenin elemanlarından birinin diğerinin yarısı olma olasılığı kaçtır?*

Çözüm: Biri diğerinin iki katı olan iki elemanlı altkümeler, $\{1, 2\}, \{2, 4\}, \ldots, \{100, 200\}$ olup, 100 tanedir. O halde aranılan olasılık,

$$P(A) = \frac{100}{\binom{200}{2}} = \frac{1}{199}$$

bulunur.

12. p *ve* q *pozitif tamsayılar ve* $p = q + 2$ *ise*

$$p^2 + q^2 \equiv x \pmod{72}$$

denkliğini sağlayan en küçük $x > 0$ *tamsayısı kaçtır?*

Çözüm: $p = q + 2$ koşulu p ve q sayılarının ikisinin de tek ya da ikisinin de çift olduğunu gösterir. Her iki durumda da $p^2 + q^2$ ifadesi çifttir, yani x en az 2 olabilir. Gerçekten de $q = 5$, $p = 7$ alındığında $p^2 + q^2 = 25 + 49 = 74 \equiv 2 \pmod{72}$ bulunur.

13. 2 *ve* 3'*e bölünen bir pozitif tamsayının tam* 21 *tane pozitif böleni varsa, bu sayının* 10'*a bölümünden kalan nedir?*

Çözüm: 21'in sadece iki böleni olduğundan aranan sayının sadece iki asal böleni vardır. Demek ki aranan sayının asal bölenleri yalnızca 2 ve 3'tür. Buna göre sayı ya $2^2 \cdot 3^6 = 2916$ ya da $2^6 . 3^2 = 576$ olacaktır. Her iki durumda da sayıların 10'a bölümünde kalan, yani birler basamağı, 6 olur.

14. $n \geq 1$ *olmak üzere*

$$1! + 2! + 3! + ... + n! = 2m$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (m, n) *sıralı tamsayı ikilisi vardır?*

Çözüm: $1! + 2! = 3$'tür ve $n > 2$ için

$$3! + 4! + \ldots + n!$$

bir çift sayıdır. O halde $1! + 2! + 3! + ... + n!$ sayısı her zaman tektir. $2m$ bir çift sayı olduğundan verilen koşulu sağlayan (m, n) sayı ikilileri bulunamaz. Yanıt 0'dır.

15. *Satranç tahtası üzerindeki* 64 *karenin her birinin alanı birim karedir. Satranç tahtası üzerinde rastgele seçilen bir dikdörtgenin alanının bir birim kareden büyük olma olasılığı nedir?*

Çözüm: Satranç tahtasındaki dikdörtgen sayısı,

$$s(E) = \binom{9}{2}\binom{9}{2} = 1296$$

dır. Bunlardan 64 tanesi birim karedir. O halde olasılık $1 - 64/1296 = 1232/1296 = 77/81$ olur.

16. *Rakamları birbirinden farklı olan ve* 8'*e kalansız bölünen beş basamaklı en küçük sayı kaçtır?*

Çözüm: İlk üç basamağı 102 yapıp son iki basamağı bu sayının 8'e kalansız bölünmesini sağlayacak şekilde yazdığımızda istenilen sayı bulunmuş olur. Aranan sayı $102ab = 10200 + (ab)$ şeklinde olmalıdır. İlk terim 8'e bölünebildiğinden ab iki basamaklı sayısı, 8'e bölünebilen ve 0, 1 ve 2 rakamlarını içermeyen en küçük sayı, yani 48 olmalıdır. Böylece istenilen koşulları sağlayan sayı 10.248 olur.

17. a, b *ve* c *gerçel sayıları için* $a + b + c = 4$ *ve* $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ *ise* c'*nin alabileceği en büyük değer kaçtır?*

Çözüm: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ olduğundan,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$$

bulunur. Bundan ve denklemlerden,

$$8 - c^2 = a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2 = (4 - c)^2/2$$
$$= 8 - 4c + c^2/2$$

elde edilir, yani $c(3c - 8) \leq 0$. Eşitsizliği çözdüğümüzde $0 \leq c \leq 8/3$ bulunur. Böylece c'nin en büyük değerinin 8/3 olabileceği görülür. Denklemlerde $c = 8/3$ koyarsak, a ve b'nin,

$$a + b = 4 - c = 4 - 8/3 = 4/3$$
$$a^2 + b^2 = 8 - c^2 = 8 - (4/3)^2 = 56/9$$

denklemlerinin çözümü olmaları gerektiği görülür. Bu denklemlerin çözümü kolaylıkla bulunabilir. Yanıt 8/3'tür.

18. *Birbirine bölünmeyen iki sayının* OBEB'*i* 32, *toplamları* 384'*tür. Bu sayıları bulunuz.*

Çözüm: $x = 32k$ ve $y = 32n$ olsun.

$$x + y = 32(k + n) = 384$$

olduğundan $k + n = 12$ bulunur. $k < n$ varsayarak, aralarında asal (k , n) ikilisi $(1, 11)$ ve $(5, 7)$ ikililerinden biri olmalıdır. Sayılar birbirine bölünmediğinden $(k, n) = (5, 7)$ olur. Buna göre sayılardan biri $5·32 = 160$ ve ikincisi $7·32 = 224$ bulunur.

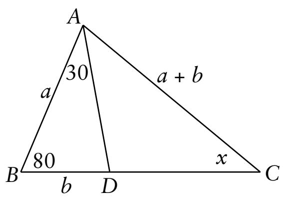
19. *Pozitif k ve n tamsayılarının, $k·n! = ((3!)!)!/3!$ eşitliğini sağladığı biliniyor. k'nin en küçük değeri kaçtır?*

Çözüm: $((3!)!)! = ((6)!)! = 720! = 720·719!$ eşitliğinden dolayı $3!·y·n! = 720·719!$ olmalı. Böylece n sayısının en büyük değeri 719 ve buradan da $k = 720/3! = 120$ bulunur.

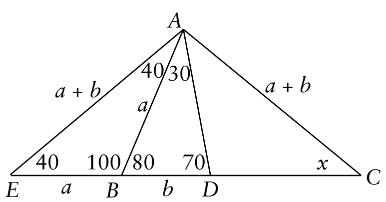
20. 1'*den* 1000'*e kadar sayılar bir çember üzerinde sıralanıyor.* 1'*den başlayarak her* 15'*inci sayı işaretleniyor* (1, 16, 31, ...) *gibi. Bu işlem ilk işaretlenen sayının üzerine gelene kadar devam ediyor. Bu işlemin sonunda işaretlenmemiş kaç sayı kalır?*

Çözüm: 15'le 1000'in OKEK'i 3000'dir. Bu yüzden $3000/15 = 200$ tane sayı işaretlenmiştir. Kalan 800 sayı işaretlenmemiştir.

21. *ABC bir üçgen, $D \in [BC]$, $m(BAD) = 30°$, $m(ABD) = 80°$, $|AB| = a$, $|BD| = b$, $|AC| = a + b$ Yukardaki verilere göre $m(ACB) = x$ kaç derecedir?*



Çözüm: Belli ki ADB açısı 70°'dir. $|BE| = a$ olacak şekilde $[BC]$'yi uzatalım. $|EB| = a = |AB|$ olduğundan, ABE ikizkenardır. Demek ki, EBA açısı 100° olduğundan, AEB açısı 40°'dir. Dolayısıyla EDA ve EAD açıları 70°'dir. Demek ki AED üçgeni ikizkenardır. O zaman AEC üçgenide ikizke-

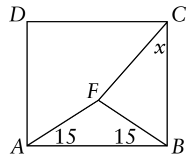


nar olur. Demek ki $|EA| = a + b = |AC|$. Yani EAC ikizkenardır. Demek ki ACE açısı 40°'dir.

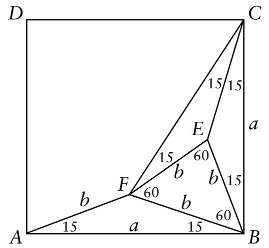
22. *$ABCD$ kare,*

$m(FAB) = m(ABF) = 15°$

Bu verilere göre $m(BCF) = x$ kaç derecedir?

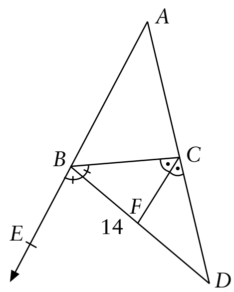


Çözüm: $AFB \approx BEC$ olacak şekilde E noktası alalım. Kolayca görüleceği üzere EFB eşkenar üçgen olur. Demek ki $m(FEB) = 60°$. Dolayısıyla $m(CEB)$

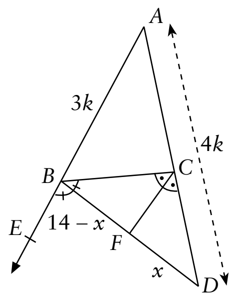


$= 150°$ olduğundan, $m(FEC)$ de 150° olur ve FEC ikizkenar olduğundan, $m(EFC) = m(ECF) = 15°$ olur. Sonuç olarak $m(BCF) = 15° + 15° = 30°$ olur.

23. *ABD üçgen, $C \in [AD]$, $F \in [BD]$, $m(DBE) = m(CBD)$, $m(BCF) = m(DCF)$, $3|AD| = 4|AB|$ ve $|DB| = 14$ cm. Bu verilere göre $|DF|$ = kaç cm dir?*

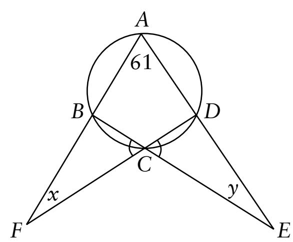


Çözüm: $3|AD| = 4|AB|$ ise $|AB| = 3k$, $|AD| = 4k$ yazabiliriz. $[BF]$ ve $[CF]$, ABC üçgeninin dışaçıortayları olduğundan üçüncü köşeden çıkan $[AF]$ de açıortay olmak zorundadır. O halde ABD üçgeninde içaçıortay teoremini yazarsak, $3/4 = (14 - x)/x$ yani $3x = 56 - 4x$ ve $x = 8$ olduğunu görürüz.

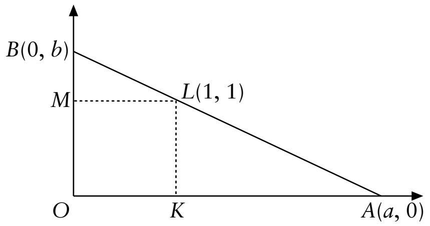


24. *Köşeleri bir çember üzerinde bulunan $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $[AD] \cap [BC] = \{E\}$, $[AB] \cap [DC] = \{F\}$, $s(A) = 61°$ ise $m(AEB) + m(AFD)$ kaç derecedir?*

Çözüm: $m(F) = x$ ve $m(E) = y$ olsun. $ABCD$ kirişler dörtgeni olduğundan, $(180 - x - 61) + (180 - y - 61) = m(CBA) + m(CDA) = 180°$. Demek ki $122 + x + y = 180°$ ve $x + y = 180 - 122 = 58$ bulunur.



25. *OAB diküçgen,* $[OA] \perp [OB]$, $|AB| = 4\sqrt{10}/3$. *OAB diküçgeninin içine şekildeki biçimde OKLM birim karesi yerleştirildiğine göre OAB üçgeninin alanı kaç birim karedir?*



Çözüm: Analitik çözüm verelim. AB doğrusunun denklemi $x/a + y/b = 1$ biçimindedir. L bu doğru üzerinde bulunduğundan, $1/a + 1/b = 1$, yani

$$a + b = ab.$$

Ayrıca $|AB| = 4\sqrt{10}/3$ olduğundan,

$$a^2 + b^2 = 160/9.$$

Bu iki bağıntıdan $x = ab$ için,

$$x^2 = a^2b^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$= 160/9 + 2ab = 160/9 + 2x,$$

ve buradan $x(x - 2) = 16/3 \times 10/3$, $x = 16/3$ bulunur. Demek ki istenen alan $A = 8/3$ br^2'dir.

26. $a^2 + b^2 + c^2$ *toplamı 21 sayısını kalansız bölüyor. Bu koşulu sağlayan kaç tane üç basamaklı (abc) sayısı bulunur.*

Çözüm: $a^2 + b^2 + c^2$ toplamının 21 sayısını kalansız bölebilmesi için bu toplamın 1, 3, 7 ya da 21 olması gerekir. Bu koşulu sağlayan (abc) sayıları da 100, 111 124, 142, 214, 241, 412 ve 421'dir.

27. *n pozitif tamsayısı için, k sayısı 1, 2, ..., n sayılarından biri olmak üzere,*

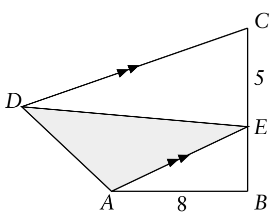
$$(1 + 2 + ... + n) + k = 2005$$

eşitliği sağlanıyor. k kaçtır?

Çözüm: Aşağıdaki eşitsizliğe göz atalım:

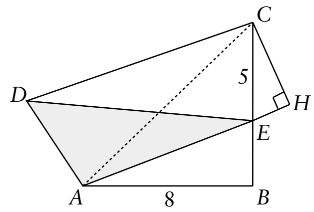
$$n(n+1)/2 < (1 + 2 + ... + n) + k$$
$$= 2005 \leq n(n+1)/2 + n = n(n+3)/2.$$

Demek ki $n^2 + n < 4010 \leq n^2 + 3n$ sağlanmalı. Birinci eşitsizlik $n \leq 62$ için sağlanır. İkinci eşitsizlik $n \geq 62$ için sağlanır. Demek ki her iki eşitliği birden sadece $n = 62$ sağlar. Dolayısıyla $k = 2005 - 1953 = 52$ bulunur.



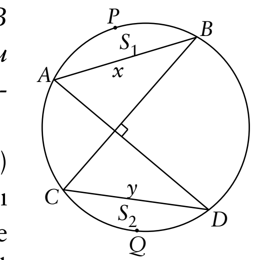
28. *ABCD dışbükey dörtgen,* $E \in [BC]$, $AB \perp BC$, $AE \parallel DC$, $|AB| = 8$, $|EC| = 5$ *ise AED taralı alanı kaç birim karedir?*

Çözüm: C'den AE'ye indirdiğimiz dikme ayağı H olsun. AED ve ACE üçgenlerinin AE kenarları ortak ve $DC \parallel AE$ olduğundan $A(ADE) = A(ACE)$ olur.

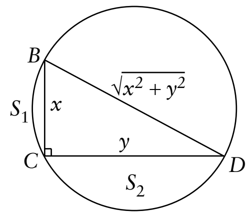


ACE üçgeninde $|CE| = 5$ ve bu tabana ait yükseklik $|AB| = 8$ olduğundan $A(ADE) = A(ACE) = 5\times8/2 = 20$ olur.

29. *Şekildeki çemberde* $CB \perp AD$, $|AB| = x$, $|CD| = y$*'dir. Bu verilere göre taralı alanlar toplamı x ve y cinsinden nedir?*

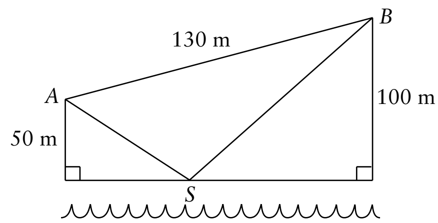


Çözüm: $m(APB) + m(CQD) = 180°$ olduğundan A noktası çember üzerinden C üzerine kaydırılabilir ve aşağıdaki şekil elde edilebilir. Bu durumda $m(BCD) = 90°$ ve $[BD]$ çap olur. Şimdi $S_1 + S_2$ toplamını hesaplamak kolaydır:



$$S_1 + S_2 = \pi(x^2 + y^2)/8 - xy/2.$$

30. *Şekilde bir nehrin aynı yanında bulunan A ve B evleri görülmektedir. A'nın nehre uzaklığı 50 m, B'nin nehre uzaklığı 100 m, A'nın B'ye uzaklığı ise 130 m'dir. Nehir üzerindeki bir noktaya konulacak S su motoruyla A ve B'ye su verilecektir. Bu iş için en az kaç metre su borusu gereklidir?*



Çözüm: B'nin nehre göre simetriği B_1 olsun. A'dan nehire çizilen paralel BB_1'i H'de kessin. Pisagor bağıntısından $|AH| = 3x = 120$, $x = 40$ $|AS| = 10\sqrt{41}$, $|SB_1| = |SB| = 20\sqrt{41}$ olur. Gerekli boru miktarı $30\sqrt{41}$ m. olarak bulunur. ♣