



Doğuş Üniversitesi Matematik Kulübü

Liseler Yarışması 2005

Soru ve Yanıtlar

1. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 = ?$

Çözüm: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 = (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (99-100)(99+100) = -(1+2+3+\dots+100) = -(100 \times 101)/2 = -5050.$

2. $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}} = ?$

Çözüm: $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ olsun.

Demek ki,

$$x^3 = 5 + 2\sqrt{13} + 5 - 2\sqrt{13} + 3\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right)\left(\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}\right) = 10 - 9x.$$

Dolayısıyla x sayısı $x^3 + 9x - 10$ polinomunun bir gerçel köküdür. Ama

$$x^3 + 9x - 10 = (x-1)(x^2 + x + 10)$$

eşitliğinden, bu polinomun başka kökü olmadığı anlaşılır. Demek ki x bu polinomun tek kökü, yani 1'dir.

3. $P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan -1 ve bölüm polinomunun katsayılarının toplamı 2 'dir. $P(x+1)^2$ polinomunun x^2 ile bölümünden kalan ne olur?

Çözüm: $P(x) = (x-1)Q(x) - 1$ olsun. Demek ki,
 $P(x+1) = xQ(x+1) - 1$

ve

$$P(x+1)^2 = x^2Q(x+1)^2 - 2xQ(x+1) + 1.$$

Bölüm polinomunun katsayılar toplamı 2 olarak verildiğinden $Q(1) = 2$ olmalı ve dolayısıyla bir $R(x)$ polinomu için

$$Q(x) = (x-1)R(x) + 2$$

eşitliği sağlanmalıdır. Demek ki

$$Q(x+1) = xR(x+1) + 2.$$

Bu yerine konduğunda

$$P(x+1)^2 = x^2Q(x+1)^2 - 2x(xR(x+1) + 2) + 1 = x^2Q(x+1)^2 - 2x^2R(x+1) - 4x + 1$$

bulunur ve x^2 ile bölümünden $-4x + 1$ kalır.

4. $6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11$ eşitliğini sağlayan bütün (x, y) tamsayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: Eşitlikte y , x cinsinden yazıldığında,
 $y = (6x^2 - 13x + 11)/(3x - 5) = 2x - 1 + 6/(3x - 5)$

olur. y 'nin tamsayı olması için $3x - 5$ sayısı 6 'nın böleni olmalıdır, yani $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ olmalıdır. Bunu sağlayan x tamsayı değerleri $x = 1$ ve $x = 2$ olur. Aranılan (x, y) sayı ikilileri de $(2, 9)$ $(1, -2)$ olarak bulunur.

5. a, b ve c üç farklı gerçel sayıdır. x, y gerçel sayılarının

$$a^3 + ax + y = 0,$$

$$b^3 + bx + y = 0,$$

$$c^3 + cx + y = 0$$

eşitliklerini sağladığı bilindiğine göre $a + b + c$ kaçtır?

Çözüm: a, b ve c sayıları $P(z) = z^3 + xz + y$ polinomunun kökleridir, o halde toplamları z^2 'nin katsayısı olmalıdır. Demek ki $a + b + c = 0$.

6. $y^4 + 9x^2 - 6y^2 - 30x + 34 = 0$ eşitliğini sağlayan x ve y gerçel sayıları için $y^2 + 3x$ toplamı kaçtır?

Çözüm: Verilen denklemleri düzenleyelim:

$$0 = y^4 + 9x^2 - 6y^2 - 30x + 34 = (y^2 - 3)^2 + 9(x - 5/3)^2$$

olarak yazıldığından $y^2 = 3$, $x = 5/3$ bulunur, böylece aranan değer $y^2 + 3x = 3 + 5 = 8$ olur.

7. Bir x karmaşık sayısı için $x + 1/x = -1$ ise $x^{2005} + 1/x^{2005}$ ifadesinin değeri kaçtır?

Çözüm: $x + 1/x = -1$ eşitliğinden, $x^2 + x = -1$ ve her iki taraf x ile çarpıldığında $x^3 = -x^2 - x = 1$ çıkar. Elde edilen bu sonuçla

$$x^{2005} + 1/x^{2005} = (x^3)^{668}x + 1/((x^3)^{668}x) = x + 1/x = -1$$

bulunur.

8. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 100 \cdot 100!$ sayısının 101 'e bölümünden elde edilen bölüm ve kalan kaçtır?

Çözüm: $n = 100$ olsun ve verilen terimi düzenleyelim:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = \sum_{k=1}^n (k+1)! - \sum_{k=1}^n k! = 2! + \dots + (n+1)! - (1! + 2! + \dots + n!) = (n+1)! - 1 = 101! - 1.$$

Demek ki verilen toplam $101! - 1$ dir. Bunu 101 'e böldüğümüzde bölüm $100! - 1$ ve kalan 100 bulunur.

9. 0,1625 ondalık sayısının pozitif tamsayı olan tam katlarının en küçüğü kaçtır?

Çözüm: Sayıyı çarpanlara ayırırsak,
 $1625/10^4 = 5^3 \cdot 13 / (5^4 \cdot 2^4) = 13 / (5 \cdot 2^4) = 13/80$
 elde ederiz. Yanıt 80'dir.

10. (ab) ve (ba) iki basamaklı sayılardır.

$$(ab) - (ba) = a^2 - b^2$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (ab) sayısı vardır?

Çözüm: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = (ab) - (ba)$
 $= (10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$. Buradan $a = b$ veya $a + b = 9$ bulunur. Bunun tersi de doğrudur, yani $a = b$ veya $a + b = 9$ ise istenilen $(ab) - (ba) = a^2 - b^2$ eşitliği elde edilir. İlk durum için 9, ikinci durum için ise 8 çözüm söz konusudur. Eşitliği sağlayan toplam 17 çözüm vardır.

11. $A = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ kümesinin elemanlarından oluşan iki elemanlı bir altkümenin elemanlarından birinin diğerinin yarısı olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: Biri diğerinin iki katı olan iki elemanlı altkümeler, $\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$, ..., $\{100, 200\}$ olup, 100 tanedir. O halde aranan olasılık,

$$P(A) = \frac{100}{\binom{200}{2}} = \frac{1}{199}$$

bulunur.

12. p ve q pozitif tamsayılar ve $p = q + 2$ ise

$$p^2 + q^2 \equiv x \pmod{72}$$

denkliğini sağlayan en küçük $x > 0$ tamsayısı kaçtır?

Çözüm: $p = q + 2$ koşulu p ve q sayılarının ikisinin de tek ya da ikisinin de çift olduğunu gösterir. Her iki durumda da $p^2 + q^2$ ifadesi çifttir, yani x en az 2 olabilir. Gerçekten de $q = 5$, $p = 7$ alındığında $p^2 + q^2 = 25 + 49 = 74 \equiv 2 \pmod{72}$ bulunur.

13. 2 ve 3'e bölünen bir pozitif tamsayının tam 21 tane pozitif böleni varsa, bu sayının 10'a bölünmünden kalan nedir?

Çözüm: 21'in sadece iki böleni olduğundan aranan sayının sadece iki asal böleni vardır. Demek ki aranan sayının asal bölenleri yalnızca 2 ve 3'tür. Buna göre sayı ya $2^2 \cdot 3^6 = 2916$ ya da $2^6 \cdot 3^2 = 576$ olacaktır. Her iki durumda da sayıların 10'a bölümünde kalan, yani birler basamağı, 6 olur.

14. $n \geq 1$ olmak üzere

$$1! + 2! + 3! + \dots + n! = 2m$$

eşitliğini sağlayan kaç farklı (m, n) sıralı tamsayı ikilisi vardır?

Çözüm: $1! + 2! = 3$ 'tür ve $n > 2$ için

$$3! + 4! + \dots + n!$$

bir çift sayıdır. O halde $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ sayısı her zaman tektir. $2m$ bir çift sayı olduğundan verilen koşulu sağlayan (m, n) sayı ikilileri bulunmaz. Yanıt 0'dır.

15. Satranç tahtası üzerindeki 64 karenin her birinin alanı birim karedir. Satranç tahtasında rastgele seçilen bir dikdörtgenin alanının bir birim kareden büyük olma olasılığı nedir?

Çözüm: Satranç tahtasındaki dikdörtgen sayısı,

$$s(E) = \binom{9}{2} \binom{9}{2} = 1296$$

dır. Bunlardan 64 tanesi birim karedir. O halde olasılık $1 - 64/1296 = 1232/1296 = 77/81$ olur.

16. Rakamları birbirinden farklı olan ve 8'e kalansız bölünen beş basamaklı en küçük sayı kaçtır?

Çözüm: İlk üç basamağı 102 yapıp son iki basamağı bu sayının 8'e kalansız bölünmesini sağlayacak şekilde yazdığımızda istenilen sayı bulunmuş olur. Aranan sayı $102ab = 10200 + (ab)$ şeklinde olmalıdır. İlk terim 8'e bölünebildiğinden ab iki basamaklı sayısı, 8'e bölünebilen ve 0, 1 ve 2 rakamlarını içermeyen en küçük sayı, yani 48 olmalıdır. Böylece istenilen koşulları sağlayan sayı 10.248 olur.

17. a, b ve c gerçel sayıları için $a + b + c = 4$ ve $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ ise c 'nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ olduğundan,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$$

bulunur. Bundan ve denklemlerden,

$$8 - c^2 = a^2 + b^2 \geq (a + b)^2/2 = (4 - c)^2/2 \\ = 8 - 4c + c^2/2$$

elde edilir, yani $c(3c - 8) \leq 0$. Eşitsizliği çözdüğümüzde $0 \leq c \leq 8/3$ bulunur. Böylece c 'nin en büyük değerinin $8/3$ olabileceği görülür. Denklemlerde $c = 8/3$ koyarsak, a ve b 'nin,

$$a + b = 4 - c = 4 - 8/3 = 4/3$$

$$a^2 + b^2 = 8 - c^2 = 8 - (4/3)^2 = 56/9$$

denklemlerinin çözümü olmaları gerektiği görülür. Bu denklemlerin çözümü kolaylıkla bulunabilir. Yanıt $8/3$ 'tür.

18. Birbirine bölünmeyen iki sayının OBEB'i 32, toplamları 384'tür. Bu sayıları bulunuz.

Çözüm: $x = 32k$ ve $y = 32n$ olsun.

$$x + y = 32(k + n) = 384$$

olduğundan $k + n = 12$ bulunur. $k < n$ varsayarak, aralarında asal (k, n) ikilisi $(1, 11)$ ve $(5, 7)$ ikililerinden biri olmalıdır. Sayılar birbirine bölünmediğinden $(k, n) = (5, 7)$ olur. Buna göre sayılardan biri $5 \cdot 32 = 160$ ve ikincisi $7 \cdot 32 = 224$ bulunur.

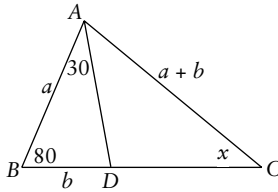
19. Pozitif k ve n tamsayılarının, $k \cdot n! = ((3!)!) / 3!$ eşitliğini sağladığı biliniyor. k 'nin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm: $((3!)!) = ((6)!) = 720! = 720 \cdot 719!$ eşitliğinden dolayı $3! \cdot n! = 720 \cdot 719!$ olmalı. Böylece n sayısının en büyük değeri 719 ve buradan da $k = 720/3! = 120$ bulunur.

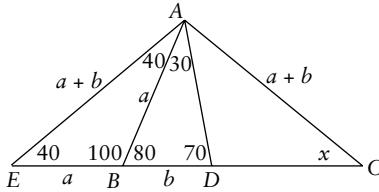
20. 1'den 1000'e kadar sayılar bir çember üzerinde sıralanıyor. 1'den başlayarak her 15'inci sayı işaretleniyor $(1, 16, 31, \dots)$ gibi. Bu işlem ilk işaretlenen sayının üzerine gelene kadar devam ediyor. Bu işlemin sonunda işaretlenmemiş kaç sayı kalır?

Çözüm: 15'le 1000'in OKEK'i 3000'dir. Bu yüzden $3000/15 = 200$ tane sayı işaretlenmiştir. Kalan 800 sayı işaretlenmemiştir.

21. ABC bir üçgen, $D \in [BC]$, $m(\angle BAD) = 30^\circ$, $m(\angle ABD) = 80^\circ$, $|AB| = a$, $|BD| = b$, $|AC| = a + b$ Yukarıdaki verilere göre $m(\angle ACB) = x$ kaç derecedir?



Çözüm: Belli ki $\angle ADB$ açısı 70° 'dir. $|BE| = a$ olacak şekilde $[BC]$ 'yi uzatalım. $|EB| = a = |AB|$ olduğundan, ABE ikizkenardır. Demek ki, $\angle EBA$ açısı 100° olduğundan, $\angle EAD$ açısı 40° 'dir. Dolayısıyla $\angle EDA$ ve $\angle EAD$ açıları 70° 'dir. Demek ki $\triangle AED$ üçgeni ikizkenardır. O zaman $\triangle AEC$ üçgeninde ikizke-

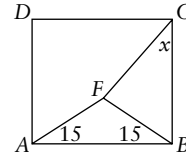


nar olur. Demek ki $|EA| = a + b = |AC|$. Yani $\triangle EAC$ ikizkenardır. Demek ki $\angle ACE$ açısı 40° 'dir.

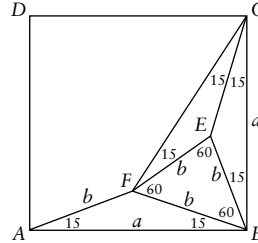
22. $ABCD$ kare,

$$m(\angle FAB) = m(\angle ABF) = 15^\circ$$

Bu verilere göre $m(\angle BCF) = x$ kaç derecedir?



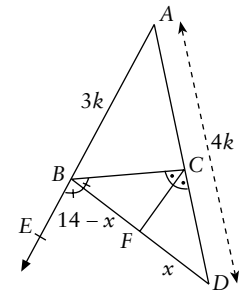
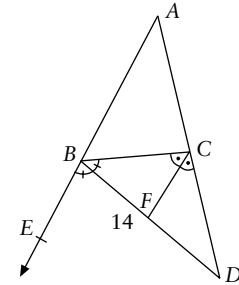
Çözüm: $\triangle AFB \approx \triangle BEC$ olacak şekilde E noktası alalım. Kolayca görüleceği üzere $\triangle EFB$ eşkenar üçgen olur. Demek ki $m(\angle FEB) = 60^\circ$. Dolayısıyla $m(\angle CEB)$



$= 150^\circ$ olduğundan, $m(\angle FEC)$ de 150° olur ve $\triangle FEC$ ikizkenar olduğundan, $m(\angle EFC) = m(\angle ECF) = 15^\circ$ olur. Sonuç olarak $m(\angle BCF) = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$ olur.

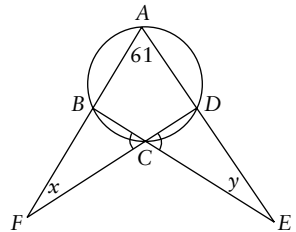
23. $\triangle ABD$ üçgen, $C \in [AD]$, $F \in [BD]$, $m(\angle DBE) = m(\angle CBD)$, $m(\angle BCF) = m(\angle DCF)$, $3|AD| = 4|AB|$ ve $|DB| = 14$ cm. Bu verilere göre $|DF| =$ kaç cm dir?

Çözüm: $3|AD| = 4|AB|$ ise $|AB| = 3k$, $|AD| = 4k$ yazabiliriz. $[BF]$ ve $[CF]$, $\triangle ABC$ üçgeninin dışaçıortayları olduğundan üçüncü köşeden çıkan $[AF]$ de açıortay olmak zorundadır. O halde $\triangle ABD$ üçgeninde içaçıortay teoremini yazarsak, $3/4 = (14 - x)/x$ yani $3x = 56 - 4x$ ve $x = 8$ olduğunu görürüz.

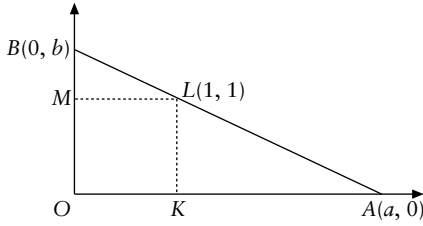


24. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $[AD] \cap [BC] = \{E\}$, $[AB] \cap [DC] = \{F\}$, $s(\angle A) = 61^\circ$ ise $m(\angle AEB) + m(\angle AFD)$ kaç derecedir?

Çözüm: $m(\angle F) = x$ ve $m(\angle E) = y$ olsun. $ABCD$ kirişler dörtgeni olduğundan, $(180 - x - 61) + (180 - y - 61) = m(\angle CBA) + m(\angle CDA) = 180^\circ$. Demek ki $122 + x + y = 180^\circ$ ve $x + y = 180 - 122 = 58$ bulunur.



25. OAB diküçgen, $[OA] \perp [OB]$, $|AB| = 4\sqrt{10/3}$. OAB diküçgeninin içine şekildeki biçimde $OKLM$ birim karesi yerleştirildiğine göre OAB üçgeninin alanı kaç birim karedir?



Çözüm: Analitik çözüm verelim. AB doğrusunun denklemi $x/a + y/b = 1$ biçimindedir. L bu doğru üzerinde bulunduğu için, $1/a + 1/b = 1$, yani $a + b = ab$.

Ayrıca $|AB| = 4\sqrt{10/3}$ olduğundan, $a^2 + b^2 = 160/9$.

Bu iki bağıntıdan $x = ab$ için, $x^2 = a^2b^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 160/9 + 2ab = 160/9 + 2x$, ve buradan $x(x - 2) = 16/3 \times 10/3$, $x = 16/3$ bulunur. Demek ki istenen alan $A = 8/3 \text{ br}^2$ 'dir.

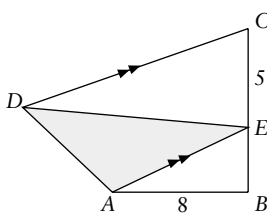
26. $a^2 + b^2 + c^2$ toplamı 21 sayısını kalansız bölüyor. Bu koşulu sağlayan kaç tane üç basamaklı (abc) sayısı bulunur.

Çözüm: $a^2 + b^2 + c^2$ toplamının 21 sayısını kalansız bölmesi için bu toplamın 1, 3, 7 ya da 21 olması gerekir. Bu koşulu sağlayan (abc) sayıları da 100, 111 124, 142, 214, 241, 412 ve 421'dir.

27. n pozitif tamsayısı için, k sayısı 1, 2, ..., n sayılardan biri olmak üzere, $(1 + 2 + \dots + n) + k = 2005$ eşitliği sağlanıyor. k kaçtır?

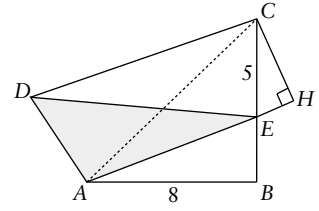
Çözüm: Aşağıdaki eşitsizliğe göz atalım: $n(n+1)/2 < (1 + 2 + \dots + n) + k = 2005 \leq n(n+1)/2 + n = n(n+3)/2$.

Demek ki $n^2 + n < 4010 \leq n^2 + 3n$ sağlanmalı. Birinci eşitsizlik $n \leq 62$ için sağlanır. İkinci eşitsizlik $n \geq 62$ için sağlanır. Demek ki her iki eşitliği birden sadece $n = 62$ sağlar. Dolayısıyla $k = 2005 - 1953 = 52$ bulunur.



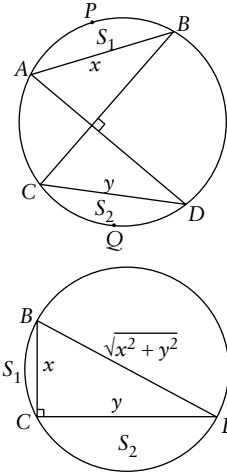
28. $ABCD$ dışbükey dörtgen, $E \in [BC]$, $AB \perp BC$, $AE \parallel DC$, $|AB| = 8$, $|EC| = 5$ ise AED taralı alanı kaç birim karedir?

Çözüm: C 'den AE 'ye indirdiğimiz dikme ayağı H olsun. AED ve ACE üçgenlerinin AE kenarları ortak ve $DC \parallel AE$ olduğundan $A(ADE) = A(ACE)$ olur. ACE üçgeninde $|CE| = 5$ ve bu tabana ait yükseklik $|AB| = 8$ olduğundan $A(ADE) = A(ACE) = 5 \times 8/2 = 20$ olur.

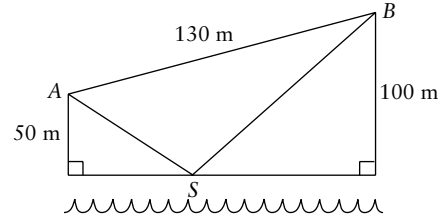


29. Şekildeki çemberde $CB \perp AD$, $|AB| = x$, $|CD| = y$ 'dir. Bu verilere göre taralı alanlar toplamı x ve y cinsinden nedir?

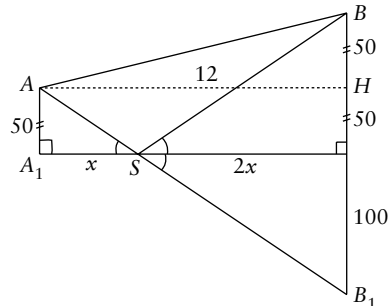
Çözüm: $m(\angle APB) + m(\angle CQD) = 180^\circ$ olduğundan A noktası çember üzerinden C üzerine kaydırılabilir ve aşağıdaki şekil elde edilebilir. Bu durumda $m(\angle BCD) = 90^\circ$ ve $[BD]$ çap olur. Şimdi $S_1 + S_2$ toplamını hesaplamak kolaydır: $S_1 + S_2 = \pi(x^2 + y^2)/8 - xy/2$.



30. Şekilde bir nehrin aynı yanında bulunan A ve B evleri görülmektedir. A 'nın nehre uzaklığı 50 m, B 'nin nehre uzaklığı 100 m, A 'nın B 'ye uzaklığı ise 130 m'dir. Nehir üzerindeki bir noktaya konulacak S su motoruyla A ve B 'ye su verilecektir. Bu iş için en az kaç metre su borusu gereklidir?



Çözüm: B 'nin nehre göre simetrisi B_1 olsun. A 'dan nehre çizilen paralel BB_1 'i H 'de kessin. Pi-



sagor bağıntısından $|AH| = 3x = 120$, $x = 40$ $|AS| = 10\sqrt{41}$, $|SB_1| = |SB| = 20\sqrt{41}$ olur. Gerekli boru miktarı $30\sqrt{41}$ m. olarak bulunur. ♣