



Akdeniz Üniversitesi

X. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI

Birinci Seçme Sınavı Soru ve Yanıtları

İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Mutlu Güloğlu, Ramazan Tınaztepe
 ialiev@akdeniz.edu.tr / mozdemir@akdeniz.edu.tr / guloglu@akdeniz.edu.tr / rtinaztepe@akdeniz.edu.tr

1. 30 kişilik bir satranç turnuvasında, şampiyon, "3 kez yenilen elenir" kuralıyla belirlenecektir. Buna göre en az kaç maç yapılabilir?

Çözüm: En az maç yapılması için, şampiyon olacak kişi hiç yenilmemelidir. Şampiyon olacak kişi A, ikinci B ve üçüncü de C olsun. A herkesi; B, A dışında herkesi ve C de, A ile B dışında herkesi yensin. Bu durumda $29 + 28 + 27 = 84$ maç yapılmış olur ve böylece A, B, C dışındaki tüm yarışmacılar elenir. C iki kez ve B de bir kez yenildiğinden, her ikisinin de elenmesi için 3 maç yeterlidir. Dolayısıyla $84 + 3 = 87$ maç yapılmalıdır.

2. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ pozitif tam sayılarının ikişer ikişer toplanmasıyla elde edilen sayı kümesinin $\{18, 26, 29, 34, 36, 37, 44, 45, 52, 55\}$ olduğu bilindiğine göre, x_2 sayısının rakamlarının toplamı kaçtır?

Çözüm: Sayıların ikişer ikişer toplanmasıyla elde edilen tüm eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,
 $4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 18 + \dots + 55 = 376$
 olur. Buradan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 94$ bulunur. Diğer taraftan, $x_1 + x_2 = 18$ ve $x_4 + x_5 = 55$ olduğundan, $x_3 = 94 - 18 - 55 = 21$ olur. $x_1 + x_3 = 26$ eşitliğinden $x_1 = 5$ ve $x_1 + x_2 = 18$ eşitliğinden $x_2 = 13$ bulunur. O halde, x_2 sayısının rakamları toplamı $1 + 3 = 4$ bulunur.

3. $\text{OKEK}(x, y) + \text{OBEB}(x, y) = x + y + 4$ denklemini sağlayan kaç (x, y) pozitif tamsayı çifti vardır?

Çözüm: $\text{OBEB}(x, y) = m$ olsun. Bu durumda, birbirine asal a ve b sayıları için, $x = ma$ ve $y = mb$ yazılabilir. $\text{OKEK}(x, y) = mab$ olduğu da gözönüne alınır, denklem,

$$m + mab = ma + mb + 4$$

olur. Buradan, $m(a-1)(b-1) = 4$ elde edilir. $m = 1, 2, 4$ durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

$$m = 1 \text{ için } (a = 5, b = 2) \text{ veya } (a = 2, b = 5),$$

$m = 2$ için $(a = 3, b = 2)$ veya $(a = 2, b = 3)$ çözümleri bulunur. $m = 4$ için çözüm yoktur. O halde denklemin 4 tane pozitif tamsayı çözümü vardır.

4. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{Z}$ için $f(f(n+1) - 7) = n - 1$ ve $f(f(n)) = n$ eşitliklerini sağlıyor. $f(0) = 1$ ise, $f(2005)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

Çözüm: Birinci eşitliği, $n = f(f(n+2) - 7)$ şeklinde yazıp, her iki taraftan f ile (soldan) bileşkesi alınır, $f(f(n)) = n$ kullanılarak, $f(n) = f(n+2) - 7$ bulunur. Böylece, $f(n+2) = f(n) + 7$ eşitliği kullanılarak $f(2005)$ hesaplanabilir.

Öncelikle, $f(f(n)) = n$ eşitliğinde $n = 0$, $f(0) = 1$ yazılırsa $f(1) = 0$ bulunur. Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için, $f(2n) = 7n + 1$ ve $f(2n+1) = 7n$ olduğu görülür. O halde, $f(2005) = 7 \cdot 1002 = 7014$ olur.

5. $\frac{m(n+3)-1}{m(n+3)+n+2}$ kesri sadeleşecek şekilde kaç tane (m, n) pozitif tamsayı çifti vardır?

Çözüm: $m(n+3) - 1$ ve $m(n+3) + n + 2$ sayılarının her ikisi de bir $d \geq 1$ sayısına bölünüyor, bu sayıların farkı olan $n + 3$ de d 'ye bölünmelidir. Oysa, $m(n+3) - 1$ sayısı ile $n + 3$ sayısı aralarında asaldır. Dolayısıyla $d = 1$ olmalıdır. Yanıt 0'dır.

6. m, n, k pozitif tamsayılar olmak üzere,
 $1/7 \leq m/n < 1/3$

ve

$$m/n = (m+k)/(nk)$$

ilişkilerini sağlayan kaç m/n kesri vardır?

Çözüm: Eşitlikten $(m+k)/k = m$, yani $k = m/(m-1)$ çıkar. k tamsayı olduğundan $m = 2$ olmalıdır. Demek ki, $1/7 \leq 2/n < 1/3$ eşitsizliğini sağlayan pozitif n 'lerin sayısını bulmalıyız. Bu eşitsizlikten $6 < n \leq 14$ çıkar. Buradan, $n = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ bulunur. Yanıt 8'dir.

7. Alper hergün çekmecesindeki şekerlerin $2/3$ 'ününün bir fazlasını yiyerek, şekerleri üç günde bitiriyor. Alper'in yemiş olduğu tüm şekerlerin sayısının rakamları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

Çözüm: Alper, şekerleri yemeye başladıktan 2 gün sonra kalan şeker sayısına z denilirse, $2z/3 + 1 = z$ eşitliğinden $z = 3$ bulunur. O halde, bir gün önce kalan şeker sayısına y denilirse, $2y/3 + 1 = y - 3$ eşitliğinden $y = 12$ bulunur. Başlangıçta çekmecedeki bulunan şeker sayısına x denilirse, $2x/3 + 1 = x - 12$ eşitliğinden $x = 39$ bulunur.

8. 5 kalem, 7 defter ve 9 silgi iki çocuk arasında kaç farklı şekilde paylaşılabilir? Not: Çocuklardan birinin hiçbir şey almadığı durum da sayılacaktır.

Çözüm: 5 kalem 6 farklı şekilde dağıtılabilir: Çocuklardan biri 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayıda kalem alabilir. Benzer olarak, defter 8 ve silgi 10 farklı şekilde paylaşılabilir. O halde, tüm farklı paylaşımların sayısı $6 \cdot 8 \cdot 10 = 480$ 'dir.

9. $5 \leq n \leq 2005$ aralığındaki kaç tane n tamsayısı için $n - [n/2] = [2n/3] - [n/6]$ eşitliği sağlanmaz? (Burada, $[a]$ ile a sayısının tam kısmı gösterilmektedir.)

Çözüm: $n = 6k + r$ ($0 \leq r < 6$) yazılırsa, problemdeki eşitlik,

$$6k + r - 3k - [r/2] = 4k + [2r/3] - k - [r/6]$$

yani

$$r - [r/2] = [2r/3] - [r/6]$$

şekline dönüşür. $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için kontrol edilirse, yalnız $r = 1$ halinde eşitlik sağlanmaz. Demek ki, problemdeki eşitlik sadece $n = 6k + 1$ şeklindeki sayılar için sağlanmaz. $5 \leq n \leq 2005$ aralığındaki $6k + 1$ şeklinde olan sayıların sayısını bulalım. $a_1 = 7, d = 6$ olmak üzere, aritmetik dizinin m 'inci terimi formülünden,

$$a_m = a_1 + (m - 1)d = 7 + 6(m - 1) = 6m + 1$$

olur. $2005 = 6m + 1$ eşitliğinden $m = 334$ olarak bulunur. yanıt 334'tür.

10. 2'lik sayı tabanına göre yazılışında dört tane 1 ve altı tane 0 olan tüm pozitif sayıların toplamını bulunuz.

Çözüm: Sayıların ilk rakamı 1 olacağından, tüm sayıların sayısı $9!/(3!6!) = 84$ 'tür. Herhangi $k = 1, 2, \dots, 9$ için k 'inci basamağında 1 olan sayıların sayısı $8!/(2!6!) = 28$ olacaktır. O halde, problemin koşullarını sağlayan, sayıların toplamı (onluk

sistemde)

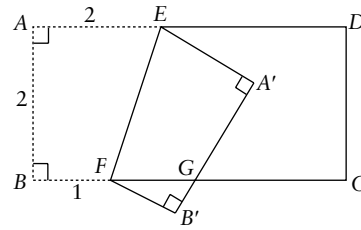
$$\begin{aligned} & 84 \cdot 2^9 + 28 \cdot 2^8 + 28 \cdot 2^7 + \dots + 28 \cdot 2^1 + 28 \cdot 2^0 \\ & = 84 \cdot 2^9 + 28(2^9 - 1)/(2 - 1) \\ & = 112 \cdot 2^9 - 28 = 28 \cdot 2^{11} - 28 = 28(2^{11} - 1) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

11. $n(n+1)(n+2) \dots (5n-1)(5n)$ sayısının 5^{86} 'ya bölünebilmesi için en küçük pozitif n tamsayısının rakamları toplamı kaç olmalıdır?

Çözüm: $c_n = n(n+1) \dots (5n-1)(5n) = n \cdot (5n)!/n!$ olsun. $(5n)!/n!$ sayısında 5'in en büyük kuvveti, $([5n/5] + [5n/5^2] + \dots) - ([n/5] + [n/5^2] + \dots) = n$ dir. Eğer $5^k, n$ 'yi tam bölüyorsa, $c_n = n \cdot (5n)!/n!$ olduğundan, $k + n \geq 86$ olmalı. Eğer $k = 0$ ise $n = 86$ olabilir. Ama $k = 1$ ise $n = 85$ olabilir. Demek ki $n \leq 85$. Dolayısıyla $k \leq 2$ (çünkü $5^3 = 125$ ve 125, n 'yi bölmeli.) k 'nin 2 olamayacağı açık. Demek ki $n = 85$ ve doğru yanıt $8 + 5 = 13$ 'tür.

12. ABCD dikdörtgeni [EF] doğru parçası boyunca şekildeki gibi katlanmıştır. |AB| = |AE| = 2 br. ve |BF| = 1 br. olduğuna göre |B'G| kaçtır?



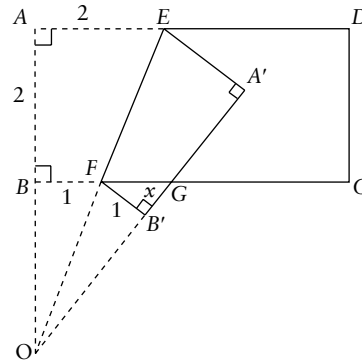
Çözüm: AB, EF ve A'B' doğru parçalarını uzatarak kesişim noktasına O diyelim. |B'G| = x olsun. $|FG| = \sqrt{x^2+1}$. OBF ve OAE üçgenlerinin benzerliğinden, $|OB| = 2 = |OB'|$ bulunur. Şimdi de, OBG üçgeninde |OF| açıortay olduğundan, açıortay teoreminden,

$$|FB|/|FG| = |OB|/|OG|$$

ve bunun karesini alarak

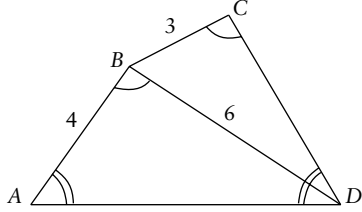
$$1/(x^2 + 1) = 4/(2 + x)^2$$

buluruz. Buradan,



$4(x^2 + 1) = 4 + 4x + x^2$
ve $x = 4/3$ bulunur.

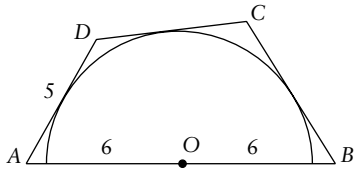
13. Aşağıdaki şekilde $|AB|=4$, $|BC|=3$, $|BD|=6$, $m(\angle ABD) = m(\angle BCD)$ ve $m(\angle ADC) = m(\angle BAD)$ ise $|DC|$ kaç birimdir?



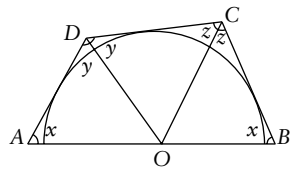
Çözüm: AB ve DC doğruları E noktasında kesişsinler. EBD ve ECB üçgenleri benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla, $|EB|/|EC| = |ED|/|EB| = |BD|/|CB|$

$= 6/3 = 2$ 'den, $|ED| = 2|EB|$ ve $|EB| = 2|EC|$ bulunur. Diğer taraftan, $|ED| = |AE| = 4 + |EB|$ olduğundan, $2|EB| = 4 + |EB|$ olur. Bu eşitliklerden $|EB| = 4$, $|ED| = 8$ ve $|EC| = 2$ bulunur. O halde, $|DC| = |DE| - |EC| = 8 - 2 = 6$ olur.

14. Şekildeki ABCD dörtgeninin AD, DC ve CB kenarları, merkezi AB doğru parçasının orta noktasında olan çembere teğettir. $|AB| = 12$, $|AD| = 5$ olduğuna göre $|BC|$ kaçtır?

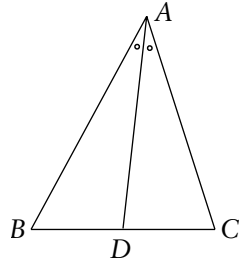


Çözüm: $m(\angle DAO) = m(\angle CBO) = x$, $m(\angle ADO) = m(\angle ODC) = y$ ve $m(\angle DCO) = m(\angle OCB) = z$ diyelim.
 $x + 2y + 2z + x = 360^\circ$
ve $x + y + z = 180^\circ$ olur. O halde, $\angle AOD = z$ ve $\angle COB = y$ olur. Dolayısıyla, AOD ve BCO benzer üçgenlerdir. Buradan da, $|AD|/|AO| = |BO|/|BC|$ ve dolayısıyla $|BC| = |AO| \cdot |BO| / |AD| = 6 \times 6 / 5 = 7,2$ bulunur.

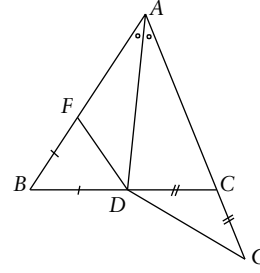


üçgenlerdir. Buradan da, $|AD|/|AO| = |BO|/|BC|$ ve dolayısıyla $|BC| = |AO| \cdot |BO| / |AD| = 6 \times 6 / 5 = 7,2$ bulunur.

15. Bir ABC üçgeninde A açısının açı ortayı BC kenarını D noktasında kesiyor. $|AB| - |BD| = 24$ ve $|AC| + |CD| = 54$ olduğuna göre $|AD|$ kaçtır?



Çözüm: AB kenarı üzerinde $|BF| = |BD|$ olacak biçimde F noktasını ve AC'nin uzantısı üzerinde de, $|CG| = |CD|$ olacak şekilde de G noktasını alalım. ADF ve AGD üçgenlerinin benzer olduğunu görelim.



Bunun için $m(\angle AFD) = m(\angle ADG)$ olduğunu göstermek yeterlidir. İşte kanıtı:

$$m(\angle AFD) = 180^\circ - m(\angle BFD) = 180^\circ - [90^\circ - m(B)/2] = 90^\circ + m(B)/2$$

ve

$$m(\angle ADG) = 180^\circ - [m(A)/2 + m(G)] = 180^\circ - m(A)/2 - m(\angle ACB)/2 = 90^\circ + m(B)/2.$$

Böylece, $|AF|/|AD| = |AD|/|AG|$, $|AD|^2 = |AF| \cdot |AG| = 24 \cdot 54$ ve $|AD| = \sqrt{24 \cdot 54} = 36$ bulunur.

İkinci Yol: $|AB| - |BD| = 24$, $|AC| + |CD| = 54$ ifadelerini taraf tarafa çarparsak, $|AB| \cdot |AC| + |AB| \cdot |CD| - |BD| \cdot |AC| - |BD| \cdot |CD| = 54 \cdot 24$ buluruz. Açılış teoreminden, $|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |AC|$ olduğundan, $|AB| \cdot |AC| - |BD| \cdot |CD| = 54 \cdot 24$ olur. Diğer taraftan,

$$|AD|^2 = |AB| \cdot |AC| - |BD| \cdot |CD| = 54 \cdot 24$$

olduğundan, $|AD|^2 = 54 \cdot 24$ ve $|AD| = 36$ bulunur.

16. $(x + 6)(\sqrt{x + 1} - 1)^2 \geq x^2$ eşitsizliğini sağlayan x sayılarının bulunduğu en geniş aralığın uzunluğu kaçtır?

Çözüm: $x \geq -1$ olmalı. Eğer $1 + x = y$ dersek, $x = y - 1$ olur. O halde eşitsizlik y cinsinden,

$$(y + 5)(1 - \sqrt{y})^2 \geq (y - 1)^2 = (\sqrt{y} - 1)^2(\sqrt{y} + 1)^2$$

olur. $y = 1$ bir çözümdür. $y \neq 1$ için her iki tarafı da $(\sqrt{y} - 1)^2$ sayısı ile bölersek,

$$y + 5 \geq (\sqrt{y} + 1)^2 = y + 2\sqrt{y} + 1$$

buluruz. Demek ki $2\sqrt{y} \leq 4$, yani $y \leq 4$, yani $x \leq 3$ elde ederiz. Böylece, çözüm aralığı, $-1 \leq x \leq 3$ olur. Yani, çözüm aralığının uzunluğu 4'tür.

17. 5^n 'in güçlerinin ve farklı güçlerinin toplamlarından oluşan sayılar artan sırada yazılarak,

$$1, 5, 6, 25, 30, 31, 125, \dots$$

dizisi oluşturuluyor. ($1 = 5^0$, $5 = 5^1$, $6 = 5^0 + 5^1$, $25 = 5^2$, $26 = 5^0 + 5^2$, $30 = 5^1 + 5^2$, $31 = 5^0 + 5^1 + 5^2$ v.s.) Buna göre bu sayı dizisinin 63'üncü terimi kaçtır?

Çözüm: Verilen sayı dizisinde 2^1 -inci yerde 5^1 , 2^2 -inci yerde 5^2 , 2^3 -üçüncü yerde 5^3 , ..., 2^6 -ncı yerde 5^6 sayısının olduğu kolayca görülebilir. Yani $64^{\text{üncü}}$ sayı 5^6 'dır. O halde, 63. sayı,

$$5^0 + 5^1 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 = (5^6 - 1)/(5 - 1) = (15625 - 1)/4 = 3906$$

olacaktır.

Not: Bu dizinin terimlerinin sırasıyla $(1)_5$, $(10)_5$, $(11)_5$, $(100)_5$, $(101)_5$, $(111)_5$, $(1000)_5$ olduğu açıktır. Dizinin terimlerinin numaralarının aynı terimlerin 2 tabanında yazılmasıyla elde edilebileceği görülebilir. Eğer dizinin terimi $(a)_5$ ise terimin numarası $(a)_2$ 'dir. Gerçekten,

$$(1)_5 \text{ terimi, } (1)_2 = 1 \text{ 'inci terim,}$$

$$(10)_5 = 5 \text{ terimi, } (10)_2 = 2 \text{ 'inci terim,}$$

$$(111)_5 = 31 \text{ terimi, } (111)_2 = 7 \text{ 'nci terimdir, vb.}$$

Buna göre, $63 = (111111)_2$ olduğundan, $63^{\text{üncü}}$ terim $(111111)_5 = 3906$ olur.

18. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(x - 2)(y + 2) = (x + y)^2$$

eşitliğini sağlayan kaç tane (x, y) ikilisi vardır?

Çözüm: Denklemi x 'e göre ikinci dereceden denklem olacak şekilde düzenleyelim:

$$x^2 + 2xy + y^2 - xy - 2x + 2y + 4 = 0$$

ve

$$x^2 + (y - 2)x + (y^2 + 2y + 4) = 0$$

olur. Bu denklemin reel çözümünün olması için, diskriminant negatif olmamalıdır.

$$\Delta = (y - 2)^2 - 4(y^2 + 2y + 4) \geq 0$$

eşitsizliğinin düzenlenmesiyle, $(y + 2)^2 \leq 0$ ve buradan $y = -2$ elde edilir. Bu, denklemde yerine yazılırsa, $x = 2$ bulunur. O halde denklemin tek çözümü, $(2, -2)$ olarak bulunur.

19. Altı basamaklı pozitif sayılar içinde, 6 rakamını içeren ve 3'e bölünen sayıların sayısına n diyelim. n sayının 10^6 'a bölümünden kaç kalır?

Çözüm: n sayısını bulmak için, 3'e bölünen 6 basamaklı sayıların sayısından (yani 300.000^{den}), 3'e bölünen, fakat 6'yı içermeyen sayıların sayısını çıkaracağız. Sayının ilk rakamı 0 ve 6 olamayaca-

ğından, ilk rakam yerine yazılabilecek rakam sayısı 8^{dir} . Kalan basamakların herbiri için 9 seçeneğimiz vardır. Fakat, 3 ile bölünme koşulumuz olduğundan dolayı, son rakamın yerine yazılabilecek rakamlar, ilk beş rakamın toplamına göre değişecektir. Bunun için, baştan ilk beş rakamın toplamına A diyelim.

$$A \equiv 0 \pmod{3} \text{ ise, son rakam } 0, 3, 9 \text{ olabilir.}$$

$$A \equiv 1 \pmod{3} \text{ ise, son rakam } 2, 5, 8 \text{ olabilir.}$$

$$A \equiv 2 \pmod{3} \text{ ise, son rakam } 1, 4, 7 \text{ olabilir.}$$

Yani, her durum için de son basamak yerine yazılabileceğimiz rakam sayısı 3 'tür.

O halde, 6 rakamını içermeyen ve 3'e bölünen sayıların sayısı $8 \cdot 9^4 \cdot 3$ olur. Sonuç olarak, 6 rakamını içeren ve 3 ile bölünen sayıların sayısı $n = 300000 - 8 \cdot 9^4 \cdot 3$ olacaktır.

$$n = 300000 - 8 \cdot 9^4 \cdot 3 \equiv 0 - 4 \equiv 6 \pmod{10}$$

bulunur.

20. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi verilsin. X 'ten X 'e giden $f : X \rightarrow X$ fonksiyonları içinde, $a, b, c \in X$ olmak üzere, $f(a) = f(b) = f(c)$ koşulunu sağlayan kaç fonksiyon vardır?

Çözüm: Söz konusu fonksiyonların sayısını bulmak için tüm $f : X \rightarrow X$ fonksiyonları sayısından (yani 4^4 'ten), $f(a) = f(b) = f(c)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonların sayısını çıkaracağız. Uygun a, b, c için $f(a) = f(b) = f(c)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonlar iki tiptir.

1) Sabit fonksiyon: $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$. Bunlardan 4 tane vardır.

2) X 'in herhangi üç a, b, c elemanını bir $x \in X$ elemanına, geriye kalan elemanı da X 'in x 'den farklı üç elemanından herhangi birine götüren fonksiyonlar. Bunların sayısı,

$$\binom{4}{3} \times 4 \times 3 = 48$$

dir. O halde, istenen fonksiyonların toplam sayısı,

$$4^4 - (48 + 4) = 204$$

olarak bulunur. ♣

