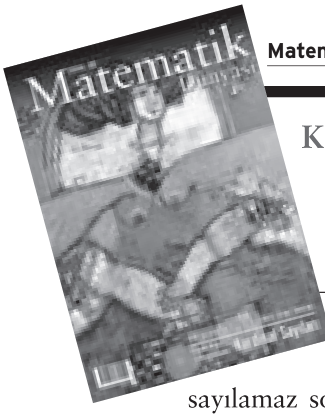

Kapak Konusu: Kardinaller

Süreklilik Hipotezi ve Felsefi Sonuçları

Doğal sayıların sayılabilir sonsuzlukta, gerçel sayıların ise sayılamaz sonsuzlukta olduğunu biliyoruz [sayfa 27, Teorem 21]. Hatta gerçel sayıların kardinalitesinin 2^ω olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$$|\mathbb{N}| = \omega < \omega_1 \leq 2^\omega = |\mathbb{R}|.$$

1877'de, henüz 32 yaşındayken, kümeler kuramının ve ordinal ve kardinal kavramlarının yaratıcısı Alman matematikçi Georg Cantor, $\mathbb{R}$'nin, doğal sayılardan "daha büyük" ama gerçel sayılardan "daha küçük" bir altkümesinin olup olmayacağı sorusunu sordu. Yani $\mathbb{R}$'nin sayılamaz sonsuzlukta olan ama kardinalitesi 2^ω olmayan bir altkümesi var mıdır? Ya da $\mathbb{R}$'nin her sonsuz altkümesi ya $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{R}$ ile eşlenik olmak zorunda mıdır? Daha modern bir deyişle, $\omega_1 = 2^\omega$ eşitliği doğru mudur?

Cantor yanıtın olumsuz olacağını tahmin etti ama bir türlü kanıtlayamadı. Cantor'un bu tahminine ***Süreklilik Hipotezi*** denir:

Süreklilik Hipotezi [SH]. $\omega_1 = 2^\omega$.

1900'de, Paris'teki meşhur konferansında David Hilbert bu problemi 20'nci yüzyılın matematikçilerine sordu. Hilbert bu probleme o kadar önem veriyordu ki, sunduğu 23 problem arasında buna birinci sırada yer verdi. Yanıtı bulmak 63 yıl aldı.

Kurt Gödel 1938'de, Süreklilik Hipotezi'nin ZFC'yle[1] tutarlı olduğunu kanıtladı. Yani eğer ZFC çelişkisizse (bir başka deyişle, ZFC'de 0 = 1 eşitliği kanıtlanamazsa), o zaman ZFC'ye Süreklilik Hipotezi'ni eklersek de çelişkisiz bir kümeler kuramı elde ederiz.

Gödel'in bu sonucundan, ZFC'de, Süreklilik Hipotezi'nin yanlışlığının kanıtlanamayacağı çıkar, ama doğruluğunun kanıtlanabileceği çıkmaz. Bunu 1963'te Paul Cohen göstermiştir. Cohen'in kanıtı, o güne dek bilinmeyen bir yöntem kullanır: İngilizcesiyle ***Forcing***, Türkçesi ***zor kullanma*** ya da ***zorlama*** olabilir. Zorlamayla, Cohen, ZFC'nin belitlerinin doğru olduğu ama SH'nin yanlış olduğu bir evren (ZFC + ¬SH'nin bir modelini) inşa etmiştir ve bu inşasıyla 1966'da Fields Madalyası'nı kazanmıştır.

Gödel'le Cohen'in sonuçlarını bir araya koyarsak, ZFC'nin, Süreklilik Hipotezi'nin doğruluğu ya da yanlışlığı konusunda herhangi bir şey söyleyemeyeceği çıkar. Eğer ZFC çelişkisiz (yani tutarlı) bir kuramsa, ZFC'ye Süreklilik Hipotezi olan $\omega_1 = 2^\omega$ eşitliğini de belit olarak eklesek, tam tersine, Süreklilik Hipotezi'nin değillemesi olan $\omega_1 < 2^\omega$ eşitsizliğini de belit olarak eklesek, her iki durumda da çelişkisiz bir kuram elde ederiz. Mantıkçıların deyimiyle Süreklilik Hipotezi, ZFC'den bağımsızdır.

Bütün bunlar akla başka sorular getiriyor. Acaba ZFC, $2^\omega \leq \omega_2$ eşitsizliğini kanıtlayabilir mi? Ya da $2^\omega \leq \omega_5$ eşitsizliğini? Hayır!

Gödel'in Teoremi

1900'deki ünlü Paris konferansında Hilbert, yaşadığı çağa göre anlaşılır bir iyimserlikle, matematikçilerden matematiğin çelişkisiz olduğunu kanıtlamalarını istemiştir. (Hilbert'in ikinci sorusu.) Gödel de, 1931'de, toplama ve çarpmayla ilgili en temel aritmetiğin en temel özelliklerini ortaya çıkarabilecek güçte olan çelişkisiz bir kuramın kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlayamayacağını göstererek Hilbert'in sorusunu olumsuz yanıtlamıştır. (Gödel'in **İkinci Eksiklik Teoremi**).

Gödel'in **Birinci Eksiklik Teoremi**, toplama ve çarpmayla ilgili en temel aritmetiğin en temel özelliklerini ortaya çıkarabilecek güçte olan ve hangi önermenin belit olup olmadığını bir bilgisayar programının anlayabildiği çelişkisiz bir kuramda ne kendisinin ne de değillemesinin kanıtlanabildiği bir önermenin olduğunu söyler. Pek sanılmıyor ama İkiz Asallar Sanısı ya da Goldbach Sanısı bu tür önermelerden olabilir.

1939'da Kurt Gödel, eğer ZF çelişkisizse, ZF'nin Seçim Beliti'ni yanlışlayamayacağını kanıtladı. Gene Paul Cohen ve gene 1963'te, eğer ZF çelişkisizse, ZF'nin Seçim Beliti'ni kanıtlayamayacağını kanıtladı. Demek ki Seçim Beliti de ZF'den bağımsızdır.

---

1 ZFC, matematikçilerin çok büyük çoğunluğuyla çalıştıkları belit (aksiyom) sistemidir. [Bkz. MD-2006-II, sayfa 22].

Gödel ve Süreklilik Hipotezi

Gödel, Süreklilik Hipotezi'nin (SH) yanlış olduğunun kanıtlanamayacağını göstermesine karşın gene de SH'nin yanlış olduğunu sanıyordu. Kanıtlanabilmekle doğru olmak iki ayrı kavramdır. Bir önerme, kümeler kuramının bir modelinde (yani kümeler kuramının belitlerinin doğru olduğu bir evrende) doğru olabilir ama kanıtlanamayabilir.

Ama ZFC'nin bir modelinin varlığını ZFC kanıtlayamaz, yoksa ZFC kendisinin çelişkisiz olduğunu kanıtlardı (çünkü çelişkili kuramların modelleri olamaz elbette).

Bu durumda Gödel'in SH'nin yanlış olduğuna inanması matematiksel olarak bir şey ifade etmez elbette. Gödel'in inanışı tamamıyla felsefiydi. Gödel, Platonist bir görüşe sahip olduğundan, tüm bu kavramların bir yerlerde varolduğunu ve kümeler kuramının bir modelinin bizim algılayamadığımız bir seviyede var olduğuna inanıyordu. Gödel'e göre SH işte o evrende yanlıştır/yanlış olmalıdır.

Gödel'e göre, ZFC'nin SH'yi yanlışlayamamasının nedeni, ZFC'nin yaşadığımız dünyayı/evreni eksik betimlemesinden kaynaklanmaktadır. Yani aslında SH'nin yanlışlığı kanıtlanmalı, ama ne yazık ki ZFC matematiği yeterince betimlemiyor. Dolayısıyla Gödel'e göre Cantor'un SH'sini çürütecek yeni belitler bulunmalı.

Paul Cohen formalist (biçimci) olmasına karşın, o da SH'nin doğru olmaması gerektiğine inanıyordu.

Peki, ZFC, bir α ordinali için $2^\omega \leq \omega_\alpha$ eşitsizliğini kanıtlayabilir mi? Elbette: $\alpha = 2^\omega$ için örneğin (sayfa 54, Önsav 3). Ama bu yanıt doyurucu değil, çünkü 2^ω kardinalinin ne kadar büyük olduğunu anlamak için gene 2^ω kardinalini kullanıyoruz.

n hangi doğal sayı olursa olsun, ZFC'ye $2^\omega = \omega_n$ eşitliğini eklersek, tutarlı, yani çelişkisiz bir kuram elde ederiz. Yani ZFC'de hiçbir n doğal sayısı için,

$$2^\omega \leq \omega_n$$

eşitsizliği kanıtlanamaz.

2^ω kardinalini nerdeyse istediğimiz kadar büyük yapabiliriz. Ama $2^\omega = \omega_\omega$ yapamayız. 2^ω'nın ω_ω'dan daha küçük ya da daha büyük olduğu ZFC'yle tutarlıdır, ama eşitlik ZFC'yle tutarlı değildir. (Bkz. bir bir sonraki sayfadaki gri alan.)

Öte yandan, bazı ilginç varsayımlar $2^\omega = \omega_2$ eşitliğini kanıtlıyor. Eğer tüm ω_n'ler arasından 2^ω'nın illa birine eşit olduğunu varsaymak gerekiyorsa, $n = 1$ ya da 2 en "tabii" seçim olarak önümüze çıkıyor.

Yukardaki tartışmadan şu sonuç çıkıyor: Matematiksel olarak, Süreklilik Hipotezi'ni kabul etsek de olur, etmesek de. Ya da bu konuda hiçbir karar almayabiliriz. Demek ki bu daha çok gerçeği algılamamızla ilgili felsefi bir sorudur.

Matematiksel olarak yapılabilecek en doğal şey, SH'nin ve değillemesinin sonuçlarına bakıp, çıkan sonuçların "doğallığına" ve "yapaylığına" göre karar vermek. Bu konuda bugüne dek bir fikir birliğine varılamadığından, ne Süreklilik Hipotezi ne de değillemesi belitlere eklenmiştir.

Felsefi olarak düşünüldüğünde, en filozof matematikçiler, 2^ω'nın çok daha büyük olması gerektiğini düşünüyorlar ve bu satırların yazarı da bu bakış açısına katılıyor. Ama 2^ω kardinalinin neye eşit olması "gerektiği" bugün kümeler kuramını enerjik ve son derece ilginç kılan sorudur.

Cohen ve Süreklilik Hipotezi

"Bu satırların yazarına göre, gün gelecek, SH'nin bariz biçimde yanlış olduğuna karar verilecek. Kümelere birer birer eleman ekleyerek tüm evreni kapsayacağımızı düşünmek deli saçması olduğundan, [sonludan daha büyük olan] sayılabilir sonsuzlukta bir kümenin varlığına inanmak zorundayız. Aynı şey daha büyük sonsuzluklar için de geçerli. Şimdi, ω_1, çok özel bir kardinal: Sayılabilir ordinallerin kümesi ve sayılamaz sonsuzlukta bir ordinal bulmanın en kestirme yolu. Ama c (yani $2^\omega = |\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$), tam tersine, yepyeni ve çok daha güçlü bir ilkeyle, altkümeler kümesi belitiyle bulunmuştur. ω'dan yola çıkarak ve Yerleştirme Beliti'ni kullanarak elde edilen bir kardinalin c'ye ulaşacağını ummak akıl kârı bir şey değil. Demek ki c kardinali ω_n, ω_ω, ω_{ω_ω} ve benzerlerinden çok daha büyük olmalı. Bu bakış açısına göre, c, bize gözüpek bir belit tarafından verilmiş, inanılmaz zenginlikte bir kardinaldir ve peyderpey inşa edilemez. Belki gelecek kuşaklar problemi daha net bir biçimde görüp kendilerini daha iyi ifade edeceklerdir."

Paul Cohen

Kofinalite

α ve β birer ordinal, $f : \alpha \to \beta$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\delta < \beta$ için, $f(\gamma) \geq \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma < \alpha$ elemanı varsa, f'ye ***sonsuza gider*** ya da (β'da) ***kofinal*** diyeceğiz. Eğer $\beta = \delta^+$ ise, f'nin sonsuza gitmesi, f'nin δ değerini alması demektir. Eğer β limitse, bu, $\bigcup_{\gamma\in\alpha} f(\gamma) = \beta$ demektir.

Örneğin $\mathrm{Id}_\beta : \beta \to \beta$ fonksiyonu sonsuza gider. Daha hoş bir örnek, $f(n) = \omega_n$ kuralıyla tanımlanmış $f : \omega \to \omega_\omega$ fonksiyonu sonsuza gider. Bu son örnekte ω, sonsuza giden bir $\alpha \to \omega_\omega$ fonksiyonunun olduğu en küçük α ordinalidir. Sonsuza giden bir $f : \alpha \to \beta$ fonksiyonunun olduğu en küçük ordinale, β'nın ***kofinalitesi*** adı verilir ve bu ordinal $\mathrm{cf}(\beta)$ olarak yazılır.

$$\mathrm{cf}(\beta) = \min\{\alpha : \exists\, f : \alpha \to \beta \text{ ve } \textstyle\bigcup_{\delta\in\alpha} f(\delta) = \beta\}.$$

Kolayca görüleceği üzere, kofinalite, 0, 1 ya da sonsuz bir kardinal olmak zorundadır.

Elbette $\mathrm{cf}(\beta) \leq \beta$. Ve elbette $\mathrm{cf}(0) = 0$, ama diğer sonlu sayıların ve limit olmayan ordinallerin kofinalitesi 1'dir; elbette. $\mathrm{cf}(\omega) = \mathrm{cf}(\omega_\omega) = \mathrm{cf}(\omega_{2\omega}) = \mathrm{cf}(\varepsilon_0) = \omega$ eşitliklerini kanıtlamak çok kolay. Öte yandan $\mathrm{cf}(2^\omega) > \omega$ eşitsizliği kanıtlanabilir. Bu da (ZFC'de) $2^\omega \neq \omega_\omega$ eşitsizliğini kanıtlar.

2^ω'nın kofinalitesinin sayılamaz olan herhangi bir kardinal olabileceği ZFC'yle tutarlıdır. Örneğin, 2^ω'nın kofinalitesi 2^ω da olabilir.

ω_1'in kofinalitesinin ω'dan büyük olduğunu kanıtlamak çok kolaydır: ω_1'in her elemanı sayılabilir olduğundan, eğer ω_1'in kofinalitesi sayılabilir olsaydı, sayılabilir sayıda sayılabilir kümenin birleşimi olarak yazılacağından, ω_1 sayılabilir bir küme olurdu.

Kofinalitesine eşit bir ordinale ***düzgün*** ordinal adı verilir. Düzgün olmayan ordinallere de ***tekil*** denir. Örneğin ω_ω tekildir. Her α için $\omega_{\alpha+1}$ kardinalinin düzgün olduğu gösterilebilir. Demek ki her pozitif n doğal sayısı için, ω_n düzgün bir ordinaldir.

Her α için, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ eşitliğini de göstermek pek zor değildir. Demek ki $\mathrm{cf}(\alpha)$, düzgün bir ordinaldir.

Eğer β bir limit ordinalse, $\mathrm{cf}(\beta)$, β'dan küçük kardinallerden oluşan ve toplamı β olan kümelerin olası en küçük kardinalitesidir:

$$\mathrm{cf}(\beta) = \min\{|I| : \textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i = \beta \text{ ve } \lambda_i < \beta\}.$$

"Son elli yılda, kesirli sayılar kümesini tamamlayarak ya da Dedekind kesitleriyle, gerçel sayıların inşasına büyük önem verildi. Belitsel yaklaşımın etkisiyle ve biçimsel bir bakış açısıyla, insanlar ayrıklıkta/süreksizlikte matematiksel varlık'ın ilk izlerini gördü: "Tanrı doğal sayıları yaratmıştır, gerisi insanoğlunun eseridir." Cebirci Kronecker'e ait olan bu özdeyiş, onun felsefi bakışından çok, spekülasyonlarla zengin olmasını sağlayan bankacı geçmişini açığa vuruyor. Psikolojik açıdan ve - bu satırların yazarına göre - ontolojik açıdan, en küçük bir kuşku yok ki, geometrik süreklilik ta en başta varolan ilk şeydir. Eğer bilinç denen şey varsa, bu herhalde, her şeyden önce uzamın ve zamanın bilincidir."

René Thom

Not: Eğer $2^\omega \leq \omega_n$ gibi bir eşitliğe inanıyorsak, bir anlamda Kronecker'in yukarda alıntılanan özdeyişine inanıyoruz demektir.

SH'nin (ya da SH'nin ZFC'den bağımsızlığının) standart matematikte, daha çok analiz, topoloji ve ölçüm kuramı gibi konularda önemli sonuçları vardır. Bu sayede, bu konulardaki yanıtlanmamış birçok sorunun ZFC'den bağımsız olduğu anlaşılmıştır.

SH'den daha genel bir hipotez vardır:

Genelleştirilmiş Süreklilik Hipotezi [GSH]. *Her sonsuz κ kardinali için*, $2^\kappa = \kappa^+$. *Yani κ ile 2^κ arasında üçüncü bir kardinal yoktur*, *ya da her α ordinali için $2^{\omega_\alpha} = \omega_{\alpha+1}$ eşitliği geçerlidir*.

Süreklilik Hipotezi'nin bu genelleşmiş halini ilk ortaya atan Hausdorff'tur. Yıl 1908.

ZFC, bunun da doğruluğuna (elbette!) ya da yanlışlığına karar veremiyor (Gödel-1938 ve Cohen-1963).

Öte yandan, ZF ve GSH, Seçim Beliti'ni kanıtlayabiliyor. Bunu Polonyalı matematikçi/kümeler kuramcısı Sierpinski kanıtlamıştır.

GSH kardinal aritmetiği oldukça kolaylaştırır:

$$\omega_\alpha^{\omega_\beta} = \begin{cases} \omega_{\beta+1} & \text{eğer } \alpha \leq \beta+1 \\ \omega_\alpha & \text{eğer } \beta+1 < \alpha \text{ ve } \omega_\beta < \mathrm{cf}(\omega_\alpha) \\ \omega_{\alpha+1} & \text{eğer } \beta+1 < \alpha \text{ ve } \omega_\beta \geq \mathrm{cf}(\omega_\alpha) \end{cases}$$

Bunu okura dönem ödevi olarak bırakıyoruz.

Ökkeş'ten bir deyiş çalarak, işte aziz ve azize okurlarım, matematik ancak bu kadar ilginç olabiliyor! ♦