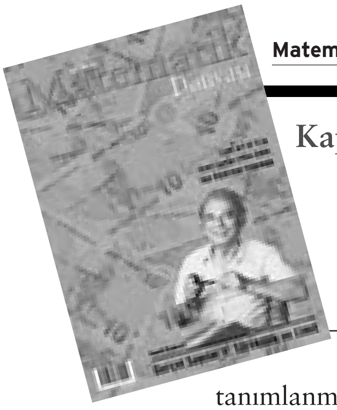
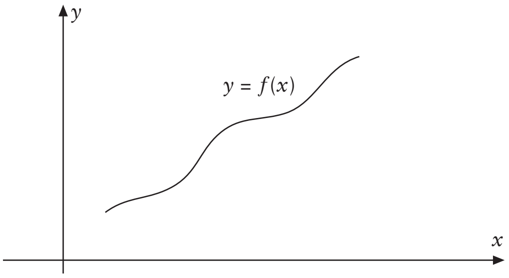


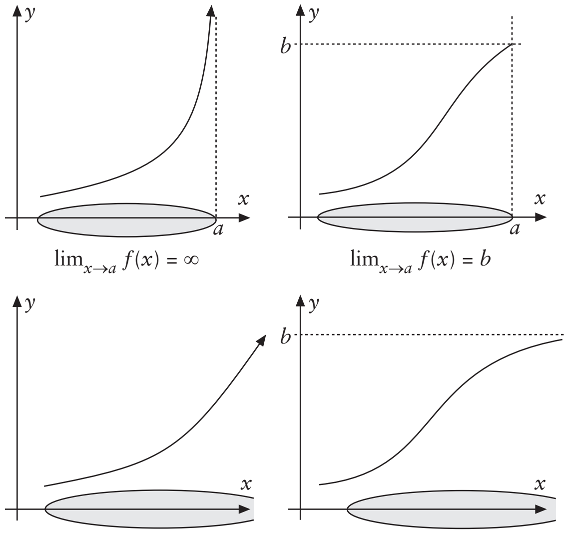
Kapak Konusu: Düzgün Yakınsaklık

Monoton Fonksiyonların Limitleri

Bir $X \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerine tanımlanmış **artan** bir $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düşünelim. Örneğin şöyle bir şey:



x, tanım kümesinin üstsınırına (soldan tabii ki) gittiğinde, fonksiyonun sonlu ya da sonsuz bir limiti olması - her zaman doğru olmasa da - makul bir öngörüdür. Aşağıda olası dört durum görünüyor:



$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to a} f(x) = b$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

Artan bir fonksiyonun, x, tanım kümesinin üstsınırına gittiğinde, sonlu ya da sonsuz bir limiti var mıdır ve varsa bu limit nedir?

Her ne kadar yukardaki şekillerde fonksiyonlar sürekli gibi görünse de, fonksiyonların sürekli olmalarına pek gerek yok sanki. Fonksiyon sürekli de olsa süreksiz de olsa, limit olmalı sanki...

Ama biraz düşününce bir iki teknik sorunla karşılaşırız. Önce o sorunları tartışıp halledelim. (Tartışmadan hoşlanmayanlar doğrudan teoreme ve kanıtına gidebilirler. Zaten teorem de kanıtı da birkaç satırı geçmiyor.)

Örneğin eğer $X = (0, 1) \cup \{2\}$ ise, $f(x)$'in x, 2'ye giderken limiti alınamaz, çünkü 2, X'ten ayrık bir sayıdır, X'in bir yoğunlaşma noktası değildir. (Limit kavramının tanımını anımsayın: Bir fonksiyonun limiti ancak tanım kümesinin yoğunlaşma noktalarında alınabilir.)

Bu sorunu halletmenin en kolay yolu, $\sup X \in \mathbb{R}$ olduğunda, $\sup X$ sayısının X'in bir yoğunlaşma noktası olduğunu varsaymaktır. Ama aynı sorunu böyle bir kısıtlama getirmeden, daha şık biçimde de çözebiliriz: $f(x)$'in limitini, x, $\sup X$'e giderken almaya kalkışacağımıza, limiti, x, $\limsup X$'e giderken almaya çalışabiliriz. O zaman yukardaki sorun kaybolur. (MD-2008-I, sayfa 30, Önsav 6'dan anımsayalım: $\limsup X$, eğer sonlu bir sayıysa, X'in yoğunlaşma noktalarının en büyüğüdür. X'in yoğunlaşma noktası yoksa zaten o zaman yapacak bir şey yok, hiçbir noktada limit alamayız.)

Sorun olmasa da bir soru var ve bu soru yanıtlanmazsa kanıt aşamasında soru soruna dönüşebilir: x, $\limsup X$'e giderken $f(x)$'in limiti hangi sayı olacaktır?

Fonksiyon artan olduğundan, x, $\limsup X$'e giderken f'nin limitinin $\sup f(X)$ olmasını beklemek makul gibi görünüyor. Ama maalesef bu her zaman doğru değil. Örneğin, $X = [0, 1]$ ise ve f fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanmışsa, o zaman, X'in limsup'ü 1'dir ve

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \neq 1 = \sup f(X)$$

olur.

Bu sorunu çözmek için, x, $\limsup X$'e giderken $f(x)$'in limitinin $\sup f(X)$ değil de $\limsup f(X)$ olduğu tahmininde bulunabiliriz ama bu tahmin de yetersiz kalır çünkü örneğin f sabit bir fonksiyon olduğunda $\limsup f(X)$ yoktur.

x, limsup X'e giderken f'nin limitinin

$$\sup\{f(x) : x \in X \text{ ve } x \le \text{limsup } X\}$$

olması gerektiği biraz daha doğru bir tahmindir. Ama bu da tam doğru bir tahmin olmaz. Bu sefer şöyle bir sorun belirebilir: limsup X, sağdan da X'in bir yoğunlaşma noktası olabilir ve f fonksiyonu limsup X'in sağında sorun yaratabilir. Örneğin,

$$X = (0, 1) \cup \{1 + 1/n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

ve

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < 1 \text{ ise} \\ 1 & \text{eğer } x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ise, limsup $X = 1$ olur ve $\lim_{x \to 1} f(x)$ limiti yoktur.

Bu sorunun da çözümü var: Normal limit alacağımıza, limiti soldan alalım; $f(x)$'in limitini, x, limsup X'e giderken değil, x, limsup X'e **soldan** giderken alalım.

Bazı okurları sıkabilecek bu uzun tartışmadan sonra artık baklayı ağzımızdan çıkarıp teoremimizi yazabiliriz:

Teorem. *$X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$, artan bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$a = \text{limsup } X \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

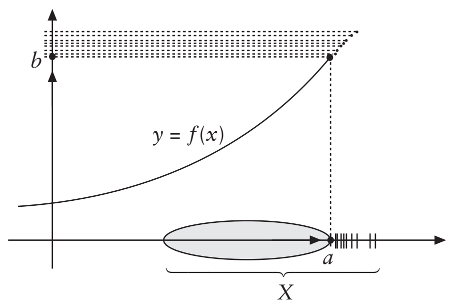
ise ve

$$b = \sup\{f(x) : x \in X \text{ ve } x < a\}$$

ise o zaman,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

olur. ($a = \infty$ ise, a^-, ∞ demektir.)



Dikkat: X'in limsup'ü olmayabilir, o zaman teorem hiçbir şey dememektedir.

Benzer bir sonuç, elbette azalan fonksiyonlar ve inf ve liminf'ler için de geçerlidir.

Bu arada artan ve azalan fonksiyonların tanımını yapalım da hiçbir şey gizli kalmasın: $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer X'in her $x < y$ elemanları için $f(x) \le f(y)$ oluyorsa, f'ye ***artan*** (ya da ***azalmayan***) fonksiyon denir. Eğer X'in her $x < y$ elemanı için $f(x) < f(y)$ oluyorsa, f'ye ***mutlak artan*** fonksiyon denir. Benzer tanımlar azalan ve mutlak azalan fonksiyonlar için de yapılır. Artan ya da azalan fonksiyonlara ***monoton*** fonksiyonlar adı verilir.

Teoremin Kanıtı: a ve b'nin $\mathbb{R}$'de olduklarını varsayalım.

Diyelim teorem doğru değil. O zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki, $\delta > 0$ ne olursa olsun,

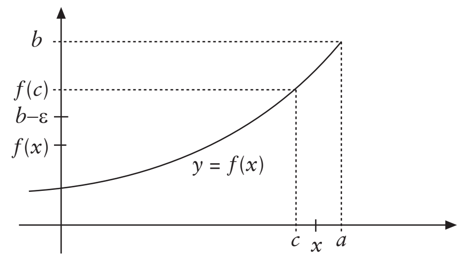
$$\text{hem } x \in X \cap (a - \delta, a) \text{ hem de } b - f(x) > \varepsilon$$

ilişkilerini sağlayan bir x buluruz. Bu ε sayısını sabitleyelim.

b'nin tanımından dolayı, X'in,

$$b - \varepsilon < f(c) \le b$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $c < a$ elemanı vardır.



Şimdi ilk paragraftaki δ'yı $a - c$ sayısına eşit alalım. O zaman, hem

$$x \in X \cap (a - \delta, a) = X \cap (c, a)$$

hem de

$$b - f(x) > \varepsilon$$

ilişkilerini sağlayan bir x buluruz. Demek ki, hem

$$c < x$$

olur hem de

$$f(x) < b - \varepsilon < f(c)$$

olur, ki bu iki eşitsizlik f'nin artan olmasıyla çelişir.

a ve b'den birinin ya da her ikisinin birden sonsuz olduğu durumların kanıtı da benzerdir ve okura bırakılmıştır. ♣