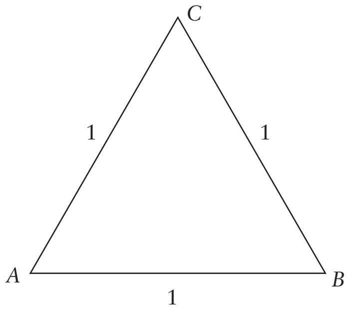
Hiç Kısalmadan Kısalan Yol

Gül Yabani

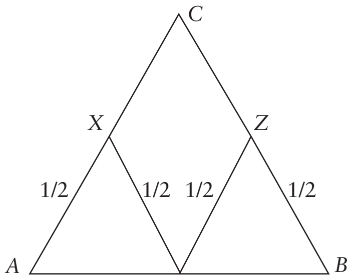
İki metrelik bir yol, hiç uzayıp kısalmadan, bir metrelik bir yola dönüşebilir mi? Bu yazıda yanıtın evet olduğunu göreceğiz. İki metrelik bir yol, hepimizin gözleri önünde, bir santimetre bile kısalmadan bir metrelik bir yola dönüşecek.

Her kenarı 1 metre olan aşağıdaki eşkenar üçgene bir gözatın önce.



Bu üçgende *A* noktasıyla *B* noktası arasındaki uzaklık 1 metredir. Eğer *A*'dan *B*'ye gitmek için en kısa yol olan *AB* doğru parçasını seçecek olursak 1 metre gideriz. Ama *A*'dan *B*'ye gitmek için *C*'den geçecek olursak, yani *ACB* yolunu izlersek, 2 metre yol alırız, çünkü *AC* ve *CB* doğru parçaları birer metredir. *ACB* yolunu hiç kısaltmadan *AB* doğru parçasına dönüştüreceğim. Herkesin gözü önünde...

A'dan *B*'ye gitmek için aşağıdaki *AXYZB* zigzag yolunu seçersek kaç metre gideriz?

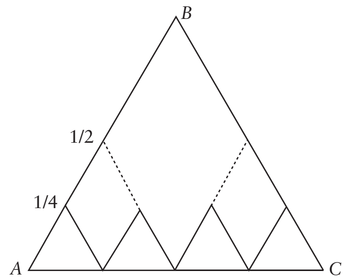


Dört kez yarım metre gideceğimizden, yolumuz gene 2 metre olur.

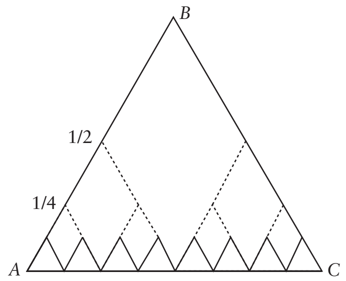
Ya bir sonraki sürundaki zigzagzigzag yolu izlersek kaç metre gideriz?

Gene iki metre gideriz, çünkü sekiz kez 1/4 metre yol katetmek zorunda kalırız.

Aynı yöntemi bir kez daha devam ettirelim.



Aşağıdaki yola bakalım:



Bu yol da 2 metre, çünkü 16 kez 1/8 metre gidiyoruz.

Yollar gittikçe daha çok *AB* doğru parçasına yaklaşıyor, ama uzunlukları sabit (2 metre) kalıyor.

Görüldüğü gibi bu kırık yolların herbirinin uzunluğu 2 metre.

Yukarda yaptığımızı hiç durmadan (sonsuza dek) sürdürebiliriz, yani bu işlemin limitini alabiliriz. Kırık yollar "sonsuzda" *AB* doğru parçası olur. Matematiksel bir deyişle kırık yollar *AB* doğru parçasına yakınsar. Ama kırık yolların uzunluğu hep iki metredir. Herbirinin uzunluğu iki metre olan yollar, nasıl olur da uzunluğu 1 metre olan bir yola yakınsayabilir? Yoksa 1, 2'ye mi eşittir? Değilse, ki değil, iki metrelik bir yol, nasıl oldu da hiç kısalmadan bir metrelik bir yola dönüştü?

Burda neler olup bittiğini açıklayabilir misiniz?

Açıklanacak bir şey yok!

Uzunluğu 2 metre olan yollar, uzunluğu 1 metre olan bir yola bal gibi de yakınsayabilir! Hepimizin gözleri önünde yakınsamadı mı?

Yolların limitinin uzunluğu (örneğimizde 1), o yolların uzunluklarının limitine (örneğimizde 2) eşit olmayabilir. Yukarda olan da bu zaten.

Kırık yollara sırasıyla,

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

adlarını verelim. A'dan B'ye giden düz yola da y diyelim. Her y_n'nin uzunluğu 2 (çünkü y_n yolu, uzunluğu $1/2^n$ olan 2^{n+1} kırık yoldan oluşuyor), öte yandan y'nın uzunluğu 1. Bu y_n yolları sonsuzda y'ye yakınsar, bundan hiç kuşku yok. Ama y_n'lerin uzunlukları y'nın uzunluğuna yakınsamıyor.

Bu, her ne denli şaşılacak bir şeyse de, matematikle çelişmiyor, herhangi bir "mantıksızlık" yok. Yukarda olanbiten çelişse çelişse sezgiyle çelişir.

Matematikte kimi zaman işte böyle şaşılası, sezgiyle pek anlaşılamayacak şeyler olur. Sezgiyle doğru olduğunu sandığımız, hatta doğruluğundan emin olduğumuz olguları, işte bu yüzden matematiksel olarak kanıtlamak zorunluluğunu duyumsarız. Sezginin yanıldığı olur. Yukarda olduğu gibi.

Kimi okur yukarda olanların nedenini şöyle açıklamış olabilir: "y_n yolları, kırık, köşeli yollardır[1]. O yollar yumuşak virajlı yollar olsalardı, böyle bir sorun olmazdı, y_n yollarının uzunluğu 1'e yakınsardı." Bu açıklama doğru değildir. y_n yollarını biraz onarımla yumuşak virajlı yollara dönüştürebiliriz ve bunu öyle yapabiliriz ki, yumuşak virajlı yeni yollar gene AB doğrusuna yakınsar ama yolların hiçbirinin uzunluğu değişmez, gene 2 metredirler.

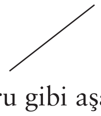
"Kusur" elbette kırık yollarda. Ama kırık yolların kırıklığında değil kusur. Biraz önce de dediğim gibi, kırık yolları yumuşak yollar haline getirsek bile sezgimizle çelişebiliriz (ama matematikle çelişmeyiz.) Bu yolların ne "kusuru" var?

Bu, bir popüler matematik yazısı olduğuna göre, y_n yollarının "kusurunu" herkesin anlayabileceği bir dilde açıklayabilmem gerekiyor. Ne yazık ki bu pek kolay olmayacak. Hatta başaramayacağımı daha başından biliyordum. Burda olanbiteni tam anlamıyla anlayabilmek için matematik bölümünün en az ilk iki yılını bitirmek gerekir.

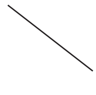
Tam açıklayamasam bile, sezgi gücümüzün matematikle yarışamayacağını gösteren güzel bir örnek bu bence.

Gene de açıklamaya çalışayım.

İki çeşit kırık yolumuz var. Aşağıdaki doğru gibi yukarıya çıkanlar:

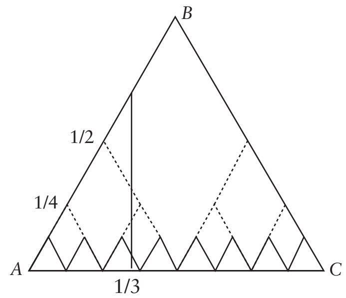


ve aşağıdaki doğru gibi aşağı inenler:



Birincisi gibi olanların eğimi $1/\sqrt{3}$, ikincisi gibi olanların eğimiyse $-1/\sqrt{3}$. Dileyen okur, bunları eğimin tanımı olarak kabul edebilir. Her y_n yolu, eğimi $1/\sqrt{3}$ ve $-1/\sqrt{3}$ olan doğru parçalarından oluşmuştur. Öte yandan y yatay bir yoldur ve eğimi 0'dır.

İlk koordinatı 1/3 olan ve y_1'in üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir. (Aşağıdaki şekle bakın).



İlk koordinatı 1/3 olan ve y_2'nin üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $-1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir. (Gene yukarıdaki şekle bakın.)

İlk koordinatı 1/3 olan ve y_3'ün üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir.

İlk koordinatı 1/3 olan ve y_4'ün üstündeki noktaya bakalım. Bu nokta eğimi $-1/\sqrt{3}$ olan bir doğru parçasının üstündedir.

Bunu böyle sürdürebiliriz. Okur, eğimlerin durmadan $1/\sqrt{3}$ ve $-1/\sqrt{3}$ olarak değiştiğine ikna olmuştur herhalde. Öte yandan y'nın eğimi 0'dır.

İşte y_n'lerin kusuru bu: y_n'ler y'ye yakınsıyor ama y_n'lerin eğimleri y'nin eğimine yakınsamıyor. y_n'lerin eğimleri kâh $1/\sqrt{3}$ kâh $-1/\sqrt{3}$ oluyor, ama y'nin eğimi 0.

Peki, ya y_n'lerin eğimi, y'nin eğimine yakınsaydı? O zaman ne olurdu? O zaman da böyle bir sorun çıkabilirdi. Böyle bir sorun çıkmaması için, yani y_n'lerin uzunluklarının limitinin y_n'lerin limitinin uzunluğu olabilmesi için, y_n'lerin eğiminin y'nin eğimine yakınsamasından başka, bu yakınsamanın düzgün bir "yakınsama" olması gerekirdi. "Düzgün yakınsama" konusunu ilerde, yakın gelecekte MD'de bir kapak konusunda ele alacağız. Bizi izlemeye devam edin. ♣

1 Matematikçesi: y_n yollarının her noktada türevi yoktur.