Taş Eksiltme Oyunları

Ali Nesin / *anesin@bilgi.edu.tr*

Birinci Oyun. Oyunumuz en az iki kişi arasında oynanıyor. Ne iskambil kâğıdına ne kalem kâğıda ne de bir tahtaya gereksinim var bu oyunu oynamak için. Yolda, otobüste, vapurda, sinemada, tiyatroda, tarlada, fabrikada, atölyede, her yerde oynayabilirsiniz.

Biz oyunu iki kişi arasında oynatacağız ve açıklaması kolay olsun diye çakıl taşları kullanacağız. Ama dediğim gibi, bu oyunu oynamak için hiçbir gerece gereksinim yok.

Belli bir sayıda çakıl taşı koyun ortaya. Her oyuncu sırası geldiğinde bu kümeden 1, 2 ya da 3 çakıl taşı alacak. Son hamleyi yapan oyuncu oyunu kazanır. Bir başka deyişle, ortada çakıl taşı bırakmayan oyuncu oyunu kazanır.

Örneğin, oyunun başında 4 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybeder. 1 taş alsa, öbür oyuncu kalan 3 taşı alır. 2 taş alsa öbür oyuncu kalan 2 taşı alır. 3 taş alsa, öbür oyuncu kalan tek taşı alır. Demek ki 4 taşlı oyunda, eğer ikinci oyuncu iyi oynarsa, birinci oyuncu oyunu kaybeder.

6 taşlı oyunları – iyi oynarsa – birinci oyuncu kazanır. Öbür oyuncu nasıl oynarsa oynasın, birinci oyuncu hep kazanacak hamleyi bulur. Nasıl mı kazanır? İlk hamlesinde 2 taş alır kümeden. Geriye 4 taş kalmıştır. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 4 taşlık bir oyuna başlayacak ve yukarda gördüğümüz gibi oyunu kaybedecek.

Bu yazıda şu soruyu yanıtlayacağız: **Birinci oyuncu kaç taşlı oyunları kazanır?** Yani oyunda kaç taş olmalıdır ki, ikinci oyuncunun hamleleri ne olursa olsun, birinci oyuncu hep kazanacak hamleleri bulabilsin?

Belli ki birinci oyuncunun bu oyunda bir avantajı var; ne de olsa ilk oyuncu ve oyunu bir nebze de olsa yönlendirebilir. Dolayısıyla oyunların çoğunu birinci oyuncunun kazanacağını umabiliriz.

Birinci Oyunun Stratejisi. Hemen yanıtı vereyim: Eğer kümedeki taş sayısı 4'e bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu (iyi oynarsa elbet) kazanır. Eğer kümedeki taş sayısı 4'e bölünüyorsa oyunu ikinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır. Örneğin 25, 26, 27 taşlık oyunları birinci oyuncu kazanır; 24, 28, 32 taşlık oyunlarıysa ikinci oyuncu kazanır.

Neden ve nasıl?

Kümede 1, 2 ya da 3 taş varsa, oyunu oyuna başlayan oyuncu kazanır: taşların hepsini birden alır; ortada taş kalmadığından ikinci oyuncu oynayamaz ve oyunu kaybeder.

Eğer kümede 4 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybedecektir. Çünkü birinci oyuncu öbür oyuncuya ya 1 ya 2 ya da 3 taşlık bir oyun sunmak zorundadır. Öbür oyuncu bütün taşları toplayıp kümede taş bırakmayabilir, yani oyunu kazanabilir.

Eğer kümede 5, 6 ya da 7 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu kazanır. Çünkü bu oyuncu, gerektiği kadar taş alıp, oyunu 4 taşlık bir oyuna dönüştürebilir. Öbür oyuncu 4 taşlık bir oyunun birinci oyuncusu olmak zorunda ve yukarda gördüğümüz gibi oyunu kaybeder.

Eğer kümede 8 taş varsa, oyuna başlayan oyuncu oyunu 5, 6 ya da 7 taşlık bir oyuna dönüştürmek zorundadır. Öbür oyuncu bu 5, 6 ya da 7 taşlık oyunun birinci oyuncusu olacak ve dolayısıyla – iyi oynayarak – kazanacaktır. Yukarda da açıkladığımız gibi, öbür oyuncu kendisine sunulan bu oyunu 4 taşlı oyuna dönüştürecektir (başka türlü oynarsa kaybeder.) Demek ki 8 taşlı oyunu birinci oyuncu kaybeder.

Artık oyunu kimin ve nasıl kazanacağı belli olmuştur sanırım. Oyunda hep 4'e bölünen bir sayıda taş bırakmaya çalışalım. Bunu başarabilirsek oyunu kazanırız. Örneğin 27 taşlı bir oyun oynuyorsak ve sıra bizdeyse, 3 taş almalıyız. Eğer sıra bizde değilse, öbür oyuncunun hata yapmasını beklemekten başka çaremiz yok. Diyelim sıra bizdeydi ve 3 taş aldık. Öbür oyuncuya 24 taş kaldı. O oyuncu kaç taş alırsa alsın, sıra bize geldiğinde, oyunu 20 taşlık bir oyuna çevirmeliyiz. Bir sonraki oyunumuzda da oyunu 16 taşlık bir oyuna çevirmeliyiz. Böyle gide gide öbür oyuncuya 12, 8, 4 ve 0 taşlık oyunlar kalır.

Eğer önünüze 4'e bölünen sayıda taş gelmişse, 1 taş alın ki taş sayısı fazla azalmasın. Böylece öbür oyuncunun hata yapma olasılığını artırmış olursunuz.

Görüldüğü gibi oyunların dörtte üçünü birinci oyuncu kazanıyor. İlk hamleyi yapmak ona hatırı sayılır bir avantaj sağlıyor.

Biraz Sohbet. Bu oyunu çözümlemek için, her hamleden sonra oyunun bir başka oyuna dönüştüğü olgusunu kullandık. Örneğin 27 taşlık bir oyun, bir sonraki hamlede 26, 25 ya da 24 taşlık bir oyuna dönüşür. Ama 27 taşlık oyunun birinci oyuncusu, dönüştürdüğü 26, 25 ya da 24 taşlı oyunun ikinci oyuncusu olacaktır.

Eğer A oyununu oynuyorsak ve sıra bizdeyse, yapabileceğimiz hamlelere bakalım. Diyelim yapabileceğimiz beş hamle var. Her hamlemizden sonra oyun bir başka oyuna dönüşecektir. Bu oyunlara A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 oyunları diyelim. Öbür oyuncuya bu oyunlardan birini sunacağız ve öbür oyuncu kendisine sunulan bu oyunun birinci oyuncusu olacak. Eğer A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 oyunlarından en az birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa, A oyununu kazanmak için, A oyununu bu oyuna dönüştürecek hamleyi yapmalıyız.

Yukardaki örnekte A, 27 taşlı bir oyun. Yapabileceğimiz üç hamle var: 1, 2 ya da 3 taş alabiliriz. A_1, A_2, A_3 sırasıyla 26, 25 ve 24 taşlı oyunları simgelesin. A_3 oyununda ikinci oyuncu kazandığından, 3 taş almalıyız.

Bu Oyunun Negatifi. Her oyunun bir de negatifi vardır. Yukardaki oyunda son hamleyi yapan kazanıyordu, bu oyunun negatifinde ise son hamleyi yapan kaybeder.

Negatif oyunda önüne 1 çakıl gelen oyuncu oyunu kaybeder, çünkü bu son çakılı alarak son hamleyi yapmak zorunda kalacaktır. Demek ki önüne 2, 3 ya da 4 çakıl gelen oyuncu karşısındakine tek bir çakıl sunarak oyunu kazanır. Dolayısıyla, önünde 5 çakıl bulan oyuncu oyunu kaybeder çünkü oyunu 4, 3 ya da 2 çakıllı bir oyuna dönüştürmek zorundadır ve bu oyunlarda başlayan kazanır. Özetle, birinci oyuncu, eğer taş sayısı,

1 ise kaybediyor. (Son hamleyi yapar.)

2, 3, 4 ise kazanıyor. (Oyunu 1'e dönüştürür.)

5 ise kaybediyor. (Oyunu yukardaki 2, 3, 4 oyunlarından birine dönüştürmek zorunda.)

6, 7, 8 ise kazanıyor. (Oyunu 5'e dönüştürür.)

9 ise kaybediyor. (Oyunu yukardaki 6, 7, 8 oyunlarından birine dönüştürmek zorunda.)

…

Oyunun akıbeti belli: $4n + 1$'lik oyunlarda başlayan (eğer diğer oyuncu doğru hamleleri yaparsa) kaybeder. Diğer oyunları (doğru hareketleri yaparak, oyunu $4n + 1$ oyunlarına dönüştürerek) birinci oyuncu kazanır.

İkinci Oyun. Bir önceki oyun basit geldiyse, kuralları biraz zorlaştıralım. Oyunu gene iki kişi arasında ve çakıl taşlarıyla oynatacağız. Oyuncular gene ortadaki kümeden 1, 2 ya da 3 taş alabilecekler. İlk oyunumuzdaki gibi yapacak hamle bulamayan ilk oyuncu oyunu kaybedecek, yani son hamleyi yapan kazanacak.

Ancak bir kuralımız daha var bu kez. Oyuncular bir önceki oyuncunun aldığı taş kadar taş alamazlar yerden. Örneğin bir hamlenizde 2 taş almışsanız, bir sonraki hamlede öbür oyuncu 2 taş alamaz, 1 ya da 3 taş alabilir ancak. Oyuna başlayan oyuncunun böyle bir kısıtlaması yoktur elbet.

Son hamleyi yapan kazanır.

Bütün taşları aldığımızda oyunu kazanırız belli ki. Ama, 1 taş alarak kümede 1 taş bıraktığımızda da oyunu kazanırız. Çünkü öbür oyuncu yerdeki o tek taşı alamaz. Oyunun kuralları bu hamleyi engelliyor.

Gene aynı soruyu soruyoruz: **Bu yeni oyunu hangi oyuncu ve nasıl oynayarak kazanır?** Yanıt oyunun başındaki taş sayısına göre değişebilir elbet.

İkinci Oyunun Stratejisi. Bu oyunun da yanıtı yukardaki yanıt gibi: Taş sayısı 4'e bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu kazanır, taş sayısı 4'e bölünüyorsa oyunu ikinci oyuncu kazanır! Ve şaşılacak şey, bu oyunun stratejisi de yukardaki oyunun stratejisi gibidir, hatta daha da kolaydır!

4 taşlı oyunu birinci oyuncu kaybeder. 1 taş alsa, ikinci oyuncu kalan 3 taşı alır. 3 taş alsa, ikinci oyuncu kalan taşı alır. 2 taş alsa, ikinci oyuncu 2 taş alamaz ama 1 taş alabilir ve hatta 1 taş almak zorundadır. Birinci oyuncuya 1 taş kalır. Ama birinci oyuncu bu taşı alamaz, çünkü bir önceki hamlesinde ikinci oyuncu 1 taş almıştı. Birinci oyuncu oynayamadığından oyunu kaybeder.

Bu oyunda kazanmak için birinci oyunun stratejisinin hemen hemen aynısı uygulanmalı.

Diyelim 27 taşlı bir oyunda birinci oyuncuyuz. İlk oyundaki gibi 3 taş alalım ve öbür oyuncuya 24 taş bırakalım. Eğer öbür oyuncu 1 taş alırsa 3 taş alalım ve oyunu 20 taşa indirgeyelim. Eğer öbür oyuncu 3 taş alırsa 1 taş alalım ve oyunu gene 20 taşa indirgeyelim. Peki, ya öbür oyuncu 2 taş alıp oyunu 22 taşa indirgerse ne yapmalıyız? Yukardaki oyunu oynasaydık, biz de 2 taş alıp oyunu 20 taşa indirgerdik. Ne yazık ki 2 taş almaya kurallar izin vermiyor. Ya 1 ya 3 taş alacağız. Ne yapmalıyız? 1 taş mı almalıyız 3 taş mı?

Kaç taş alırsak alalım, önemli değil. Çünkü ne oynarsak oynayalım, öbür oyuncu bize 4'e bölünen sayıda taş bırakamaz: Diyelim 1 taş aldık ve geriye 21 taş kaldı. Öbür oyuncu 1 taş alamayacağından oyunu 20 taşa indirgeyemez. Diyelim 3 taş alıp oyunu 19 taşa indirgedik. Öbür oyuncu 3 taş alamayacağından oyunu 16 taşa indirgeyemez.

Eğer bu yöntemi uygularsak, her zaman 4'e bölünen sayıda taş bırakamayabiliriz ama, öbür oyuncunun bize 4'e bölünen sayıda taş bırakmasını engelleriz. Böylece hiçbir zaman 4'e bölünen sayıda taş gelmez önümüze. Dolayısıyla hiçbir zaman 0 taşlı bir oyun devralmayız (0, 4'e bölünür!) ve taş yokluğundan oyunu kaybedemeyiz.

Peki, bu yöntemle oynayarak, önümüze 1 taş gelip de bu taşı alamadığımızdan oyunu kaybettiğimiz olur mu? Olmaz. Neden olmaz? Çünkü önümüze 1 taş gelmişse ve bu taşı alamıyorsak, bir önceki hamlede öbür oyuncu kümeden 1 taş almış demektir. Demek ki bu oyuncuya 2 taşlı bir oyun devretmişizdir. Öbür oyuncu bu 2 taşı alabilseydi alırdı. Almadığına göre bir önceki hamlemizde 2 taş almışızdır. Demek ki bir önceki oyunda önümüzde 4 taş varmış. Yani, önümüze 4 taşlı bir oyun sunulmuş bir an! Ama önümüze 4'e bölünen sayıda taş bırakılamayacağını biraz önce kanıtlamıştık. Demek ki böyle de kaybedemeyiz. Demek ki hiçbir türlü kaybedemeyiz. Demek ki bu stratejiyle oyunu kazanırız.

Sonuç olarak hep 4'e bölünen bir sayıda taş bırakmalıyız. Oyunun kuralları bunu engelliyorsa, ne yaparsak yapalım önemli değildir.

Bu son dediğim pek doğru değil... Eğer önümüze gelen oyunun taş sayısı 4'e bölünüyorsa, 2 taş almayalım. Çünkü 2 taş alırsak, öbür oyuncunun yanlış yapmasına olanak yoktur. Ya 1 ya 3 taş alalım.

Bir önceki oyunun yöntemini öbür oyuncu bir iki kez oynadıktan sonra kolayca anlayabilir. Bu oyunun yöntemini öbür oyuncunun anlaması daha zordur. Çünkü oyunun kimi aşamalarında ister 1 ister 3 taş alabiliriz. Kimileyin 1, kimileyin 3 taş alarak yöntemimizi uzun süre öbür oyuncudan gizleyebiliriz.

Doğru Yanıtı Nasıl Buldum? Bu yazıyı az kalsın burda kesecektim. Biraz düşününce, bu yazıyı burda kesmenin yalan söylemek olacağını anladım. Çünkü doğru stratejiyi nasıl bulduğumdan, geçtiğim süreçlerden sözetmedim.

Bir önceki oyunda hangi oyuncunun nasıl oynarsa kazanacağını nasıl buldum? Okur, anlattığımı hemen bulduğumu sanıyorsa yanılıyor. Tereyağından kıl çeker gibi olmadı. Geçtiğim aşamaları teker teker yazayım:

1. Önce oldukça uzun süren hesaplar yaparak oyunu kimin ve hangi stratejiyle oynayarak kazanacağını buldum. Ama bulduğum strateji yukarda-

ki gibi yalın değildi. Doğru olmasına doğruydu ama karmaşık bir biçimde ifade edilmişti. Stratejinin doğru strateji olduğunun kanıtı da oldukça karmaşıktı. Hiç de güzel bir kanıt değildi. Hatta öylesine çirkindi ki, bir ara bu yazıyı yazmaktan vazgeçmiştim.

2. Bulduğum stratejiyi birkaç kez gözden geçirince stratejiyi daha yalın bir biçimde ifade edebileceğimi gördüm.

3. Bu yalın ifadeyi gene yalın bir biçimde kanıtlamaya çalıştım. Bu pek zor olmadı ve yukardaki kanıtı buldum.

Yazımın yukardaki bölümünde 2 ve 3 sayılı aşamaların sonuçlarını okudunuz. Birinci aşamayı sizden gizledim. Yani sonucu bulmak için çektiğim güçlükleri göstermedim. Yazının bundan sonraki bölümünde o ilk aşamayı anlatacağım.

İlk aşamayı atlayıp doğrudan ikinci aşamaya geçebilen matematikçiler, hatta öğrenciler vardır. Ama böyle insanlar azınlıktadır. Genellikle matematikçilerin ilk çözümleri oldukça karmaşıktır. Matematikçiler buldukları ilk çözümü açıklamazlar. Nasıl bir ressam tablosuyla birlikte tablosunun eskizlerini sergilemezse, bir matematikçi de kanıtladığı teoremle birlikte önüne çıkan zorlukları sergilemez. Teoremin en kısa, en özlü, en yalın ve en güzel kanıtını açıklamakla yetinir. Bu kuralı bu yazımda bozarak, yazının süreğinde doğru yanıtı bulmak için geçtiğim evreleri açıklayacağım. Kendimi yinelememek için, yukardaki oyuna benzer bir oyun ele alacağım. Hep birlikte doğru stratejiyi ve bu stratejinin neden doğru olduğunu bulacağız.

Üçüncü Oyun. *Bu oyun da bir önceki oyun gibi, ancak iki oyuncunun peşpeşe aldıkları taş sayısının toplamı* 4 *olamaz. Yani bir oyuncu* 1 *taş almışsa sonraki oyuncu* 3 *taş alamaz*, 2 *taş almışsa sonraki oyuncu* 2 *taş alamaz*, 3 *taş almışsa sonraki oyuncu* 1 *taş alamaz. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Yani son hamleyi yapan oyunu kazanıyor. Oyunu hangi oyuncu nasıl oynayarak kazanır*?

Üçüncü Oyunun Stratejisi. Doğru yanıtı hemen vermeyeceğim. Türlü güçlüklerden geçtikten sonra hep birlikte bulacağız.

Başlangıçta n taş olan oyunlara A_n oyunu diyelim. A_n oyununu kimin nasıl oynayarak kazandığını bulmaya çalışıyoruz.

Eğer n küçük bir sayıysa, yani oyunumuzda az taş varsa, yanıtı bulmak zor değil. Örneğin, A_1, A_2, A_3 oyunlarını birinci oyuncu bütün taşları alarak kazanır. A_4 oyununu da birinci oyuncu kazanır, hem de ne oynarsa oynasın kazanır. Öte yandan A_5 oyununu (bir taş alarak) ikinci oyuncu kazanır.

Her oyunun bir değeri olsun. Eğer birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi varsa oyunun değeri 1 olsun. Eğer ikinci oyuncunun kazanan bir stratejisi varsa oyunun değeri 0 olsun. Bu tanıma göre, A_1, A_2, A_3 ve A_4 oyunlarının değeri 1'dir. Öte yandan A_5 oyununun değeri 0'dır. A_n oyununun değerini a_n'yle simgeleyelim. Dolayısıyla,

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_3 = 1$$
$$a_4 = 1$$
$$a_5 = 0$$

eşitlikleri doğrudur. a_n sayılarını bulacağız. Bu değerleri bulduğumuzda strateji hemen hemen kendiliğinden belli olacak.

Yukarda, her oyunun, her hamleden sonra bir başka oyuna dönüştüğünü söylemiştik. A_n oyunu ilk hamleden sonra hangi oyuna dönüşür? Diyelim A_{27} oyununda birinci oyuncu 1 taş aldı. Şimdi oyunda 26 taş var. Ama bu yeni oyun A_{26} oyunu değildir. Çünkü A_{26} oyununun birinci hamlesinde 3 taş alınabilir, oysa A_{27}'nin yolaçtığı 26 taşlı bu yeni oyunun ilk hamlesinde 3 taş alınamaz. Bu yeni oyuna $A_{26,1}$ diyelim. $A_{26,1}$ oyunu A_{26} oyunu gibi, aralarındaki tek ayrım $A_{26,1}$ oyununda birinci oyuncunun 3 taş alamayacağı kuralı.

Birinci oyuncu 1 taş aldığında A_{27} oyunu $A_{26,1}$ oyununa dönüşüyor. A_{27} oyununda birinci oyuncunun 2 ya da 3 taş aldığında ortaya çıkan yeni oyunlara sırasıyla $A_{25,2}$ ve $A_{24,3}$ diyelim. Görüldüğü gibi, ilk sayı oyundaki taş sayısını gösteriyor. İkinci sayıysa o oyuna kaç taş alınarak gelindiğini gösteriyor.

Genel olarak, A_n oyununda birinci oyuncunun 1, 2 ve 3 taş alıp ikinci oyuncuya sunduğu oyunlara sırasıyla,

$$A_{n-1,1},\ A_{n-2,2} \text{ ve } A_{n-3,3}$$

diyelim. $A_{n,1}$ oyunuyla A_n oyunu arasındaki tek ayrım, $A_{n,1}$ oyununda birinci oyuncunun 3 taş almasını yasaklayan kural.

$A_{n,1}$ oyununda ilk oyuncu 2 taş alırsa, oyun $A_{n-2,2}$ oyununa dönüşür elbet.

A_n oyununu birinci kazanır mı ve kazanırsa nasıl kazanır? Eğer birinci oyuncunun ikinci oyuncuya sunacağı

$$A_{n-1,1},\ A_{n-2,2},\ A_{n-3,3}$$

oyunlarından en az birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa birinci oyuncu A_n oyununu kazanır. Yoksa, yani bu üç oyunun her birini birinci oyunu kazanıyorsa birinci oyuncu A_n oyununu kaybeder. Örneğin $A_{n-2,2}$ oyununu ikinci oyuncu kazanıyorsa, birinci oyuncu, 2 taş alarak A_n oyununu $A_{n-2,2}$ oyununa dönüştürür. Dolayısıyla A_n oyununun değerini (yani a_n sayısını) bulmak için $A_{n-1,1}$, $A_{n-2,2}$ ve $A_{n-3,3}$ oyunlarının değerlerini bulmak gerekir. Bu değerlere sırasıyla $a_{n-1,1}$, $a_{n-2,2}$, $a_{n-3,3}$ diyelim. Örneğin eğer $A_{n-1,1}$ oyununu birinci oyuncu kazanıyorsa, $a_{n-1,1}$ = 1'dir, yoksa $a_{n-1,1}$ = 0'dır.

$a_{n,1}$, $a_{n,2}$ ve $a_{n,3}$ sayılarını küçük n'ler için hesaplamak zor değildir. Örneğin $a_{2,2}$ = 0'dır, çünkü ortada 2 taş vardır ve birinci oyuncu 2 taş alamaz, 1 taş almak zorundadır. İkinci oyuncu kalan taşı alarak oyunu kazanır.

n = 1,2,3 için bu sayıları bulalım:

n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1

Bu tablodaki değerlerin doğruluğunu kontrol etmeyi okura bırakıyoruz.

$n > 3$ ise bu sayıları nasıl bulabiliriz?

$A_{n,1}$ oyununun $A_{n-1,1}$ ve $A_{n-2,2}$ oyunlarından birine dönüşeceğini biliyoruz. ($A_{n-3,3}$ oyununa dönüşemez.) Dolayısıyla ancak bu iki oyundan birinde birinci oyuncu kaybediyorsa, $A_{n,1}$ oyununu birinci oyuncu kazanır, yoksa $A_{n,1}$ oyununu birinci oyuncu kaybeder. Yani $a_{n,1}$'in 1 olması için gerekli ve yeterli koşul, $a_{n-1,1}$ ve $a_{n-2,2}$ sayılarından en az birinin 0 olmasıdır. Bunu cebirsel olarak ifade edersek,

$$a_{n,1} = 1 - a_{n-1,1}a_{n-2,2}$$

eşitliğini buluruz. (Okur biraz düşünsün burda.) $a_{n,2}$, $a_{n,3}$ ve a_n için de buna benzer eşitlikler bulmak pek zor değildir.

$$\begin{aligned} a_{n,1} &= 1 - a_{n-1,1}a_{n-2,2} \\ a_{n,2} &= 1 - a_{n-1,1}a_{n-3,3} \\ a_{n,3} &= 1 - a_{n-2,2}a_{n-3,3} \\ a_n &= 1 - a_{n-1,1}a_{n-2,2}a_{n-3,3}. \end{aligned}$$

Yani a_n, $a_{n,1}$, $a_{n,2}$ ve $a_{n,3}$ sayılarını belirlemek için,

$$a_{n-1,1},\ a_{n-2,2},\ a_{n-3,3}$$

sayılarına ihtiyacımız var.

$n-3$	$a_{n-3,1}$	$a_{n-3,2}$	$a_{n-3,3}$	a_{n-3}
$n-2$	$a_{n-2,1}$	$a_{n-2,2}$	$a_{n-2,3}$	a_{n-2}
$n-1$	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	a_{n-1}
n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	a_n

Şimdi yukardaki tabloyu $n > 3$ için sürdürebiliriz. Örneğin,

$$a_{4,1} = 1 - a_{3,1}a_{2,2} = 1$$

eşitliğini bulabiliriz. İşte tablonun ilk onbeş sırası:

n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0	0	0	0
6	1	1	0	1
7	1	0	1	1
8	0	1	1	1
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0
11	1	1	0	1
12	1	0	1	1
13	0	1	1	1
14	1	1	1	1
15	0	0	0	0

Tabloyu daha fazla sürdürmeye gerek yok çünkü kolayca görülebileceği gibi ilk beş sırayla ikinci beş ve üçüncü beş sıralar birbirlerinin aynısı. Tablo böylece sonsuza değin sürer.

Yukardaki tablodan da kolayca anlaşılacağı gibi, eğer n beşe bölünmezse a_n = 1, bölünürse a_n = 0'dır. Yani eğer taş sayısı beşe bölünmüyorsa oyunu birinci oyuncu kazanır, bölünüyorsa ikinci oyuncu.

Şimdi sıra stratejiyi bulmaya geldi.

Diyelim 13 taşlı bir oyunun, yani A_{13}'ün birinci oyuncusuyuz, yani Bülent'iz. Aşağıdaki şekilden izleyelim. a_{13} = 1 olduğundan, oyunu iyi oynayarak kazanabileceğimizi biliyoruz. Nasıl oynayarak kazanabiliriz? Bu oyunu $A_{12,1}$, $A_{11,2}$, $A_{10,3}$ oyunlarından birine dönüştürebiliriz. Hangisine dönüştürmeliyiz? Bu üç oyunun değerlerine, yani $a_{12,1}$, $a_{11,2}$, $a_{10,3}$ sayılarına bakalım. Bu sayılardan hangisi 0'dır? Yalnızca $a_{10,3}$ sayısı 0. Dolayısıyla 3 taş alıp

n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0	0	0	0
6	1	1	0	1
7	1	0	1	1
8	0	1	1	1
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0
11	1	1	0	1
12	1	0	1	1
13	0	1	1	1
14	1	1	1	1
15	0	0	0	0

oyunu $A_{10,3}$ oyununa dönüştürelim. Sıra öbür oyuncuda, yani İhsan'da. Öbür oyuncu ne oynarsa oynasın, oyunu kazanabileceğimizi biliyoruz. Diyelim öbür oyuncu 1 taş alarak oyunu $A_{9,1}$ oyununa dönüştürdü. Yandaki şekilden devam edelim. Biz şimdi ya 2 ya 3 taş alabiliriz. 2 taş alırsak oyunu $A_{7,2}$'e, 3 taş alırsak $A_{6,3}$'e dönüştürürüz. Bu oyunların değerleri olan $a_{7,2}$ ve $a_{6,3}$ sayılarına bakalım. Bu iki sayıdan hangisi 0'dır? Her ikisi de. Demek ki ister 2 taş alabiliriz, ister 3. Her iki durumda da oyunu iyi oynayarak kazanırız. Oyunu böyle oynarsak sonunda kazanırız.

n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	a_n
1	1	1	0	1
2	1	0	1	1
3	0	1	1	1
4	1	1	1	1
5	0	0	0	0
6	1	1	0	1
7	1	0	1	1
8	0	1	1	1
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0
11	1	1	0	1
12	1	0	1	1
13	0	1	1	1
14	1	1	1	1
15	0	0	0	0

Sanırım strateji belli olmuştur. Stratejimizi matematiksel olarak ifade edelim. Bunun için yukardaki tablonun birkaç satırını genelleşmiş olarak yazalım:

n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	a_n
$5k-3$	1	0	1	1
$5k-2$	0	1	1	1
$5k-1$	1	1	1	1
$5k$	0	0	0	0
$5k+1$	1	1	0	1
$5k+2$	1	0	1	1
$5k+3$	0	1	1	1
$5k+4$	1	1	1	1

Eğer önümüzde $5k$ taşlı bir oyun varsa ve oynama sırası bizdeyse, ne oynarsak oynayalım, öbür oyuncu iyi oynarsa kaybedeceğimizi biliyoruz. Bu durumda kazanan bir strateji yoktur.

Diyelim önümüzde $5k + 1$'lik bir oyun var. Eğer $A_{5k+1,1}$ oyunundaysak 1 taş almalıyız. Eğer $A_{5k+1,2}$ oyunundaysak gene 1 taş almalıyız. Her iki durumda da oyunu $5k$'lık bir oyuna dönüştürdük. Eğer $A_{5k+1,3}$ oyunundaysak 1 alamayız, oyunu öbür oyuncu iyi oynayarak kazanabilir; dolayısıyla bu durumda kazanan strateji yoktur. Eğer A_{5k+1} oyunundaysak 1 taş almalıyız elbette.

Okur, $5k + 2$ ve $5k + 3$'lük oyunlara bakarsa, bu oyunlarda da $5k$ taş bırakması gerektiğini anlayacaktır.

$5k + 4$ taşlı oyunlarda istediğimizi oynayabiliriz! Ne oynarsak oynayalım oyunu kazanabiliriz.

Görüldüğü gibi öbür oyuncuya 5'e bölünen sayıda taş bırakırsak oyunu kazanabiliriz. $5k + 4$ taşlı oyunlarda ikinci oyuncuya 5'e bölünen sayıda taş bırakamayız ama bunun hiç önemi yok, bu oyunlarda atış serbest, istediğinizi oynayın. Eğer 5'e bölünen sayıda taş bırakamıyorsak, ne yaptığımız önemli değildir pek.

Önünüze gelen oyunun taş sayısı 5'e bölünüyorsa, tek umudunuz öbür oyuncunun bir yanlış yapması. Öbür oyuncunun yanlış yapmasına olanak tanımak için 1 taş almayın, çünkü 1 taş alırsanız, öbür oyuncunun her hamlesi doğru hamle olacaktır. Bu durumda ya 2 ya 3 taş alın. Alabilirseniz 2 taş alın ki oyundaki taş sayısı çok azalmasın ve öbür oyuncunun yanlış yapma olasılığı artsın.

Bu Son Oyunun Negatifi. Aynı oyun, ama bu sefer son hamleyi yapan kaybediyor. Oyunun analizini okura bırakıyoruz. (Yukarda kaybedenin bu oyunda kazanacağı sanılmasın!) ♥