Birimsel Analiz veya Elmaları İnsanlara Bölmek

Alexandre V. Borovik* / *alexandre.borovik@gmail.com*

Matematik neden bu kadar zordur? Yazımda, çoğu zaman farkedilmeyen ama öğrencilerin matematiği algılayışlarında ciddi etkileri olan yapı ve kavramlardan birine kısa bir bakış sunacağım.

1. "Adlandırılmış" Sayılar. Çocukken öğretmenim bana "*adlandırılmış*" sayılara dikkat etmem gerektiğini ve insanlarla elmaları *toplamamam* gerektiğini söylediği zaman, ona o halde neden elmaları insanlara *bölebildiğimizi* sordum:

10 elma : 5 insan = 2 elma. (1)

Daha da beteri; 10 elmayı herkese 2 elma vererek dağıttığımız zaman, elimizde

10 elma : 2 elma = 5 insan (2)

eşitliği oluyor. Eşitliğin sağ tarafındaki "insan" da nerden çıkıyor? Neden "insan" da mesela "çocuk" değil? Eşitliğin sol tarafında hiç "insan" yoktu! Sol taraftaki sayılar sağ taraftaki sayının adını nereden biliyor?

Öğretmenimden tatmin edici bir cevap alamadım ve ancak çok uzun zaman sonra sayıların aslında

10 elma : 5 insan = 2 elma/insan,
10 elma : 2 elma/insan = 5 insan. (3)

diye adlandırılması gerektiğini anladım.

Eğitim psikologlarının (1) eşitliğinin (buna paylaştırmak diyelim) (2) eşitliğiyle (buna da dağıtmak demek mantıklı olur) pek alakası olmadığını güvenle iddia etmelerinin nedeni budur. Dağıtmak çok daha karmaşık işlemler gerektirir.

Bir öğrencinin matematiksel yeteneklerinin, çalıştığı sayılar kümesiyle beraber büyüdüğü genelgeçer bir bilgidir: Doğal sayılardan tamsayılara, sonra kesirli, gerçel ve karmaşık sayılara geçildikçe matematiksel olgunluk artar.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Bu doğal hiyerarşide eksik olan şey, ilkokul aritmetiği seviyesindeki çocukların bile kullandığı, çok daha sofistike bir yapıdır:

$$\mathbb{Q}\,[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$$

yani $\mathbb{Q}$ üzerine n değişkenli "Laurent polinomları"nın kümesi (daha doğrusu halkası). Bu kümenin elemanları,

$$3 - \frac{3}{7}x_1^2x_2^{-1}x_3x_5^3x_6^{-4} + \frac{4}{5}x_1^{-7}x_2^3x_4^3x_5$$

gibi terimlerdir. Yukardaki terim,

$$3 - \frac{3}{7}\,\frac{x_1^2x_3x_5^3}{x_2x_6^4} + \frac{4}{5}\,\frac{x_2^3x_4^3x_5}{x_1^7}$$

olarak da yazılabilir. Buradaki $x_1, \ldots, x_n$ sembolleri, hesaplarda kullanılan nesnelerin adları yerine geçebilir; elmalar, insanlar vs. Örneğin elma yerine

Giuseppe Arcimboldo (1527-1593). Matematikçiler elmaları insanlara bölmeye çalışadursun, sanatçılar yüzyıllardır meyveleri ve sebzeleri toplayarak insan yapıyorlar!

* EFFL matematik öğretmeni. Yazı Aslı Nesin tarafından İngilizceden çevrilmiştir. Yazar, yakında çıkacak olan *Mathematics under the Microscope* başlıklı yeni kitabından bazı kısımlarını kullanmıştır. Söz konusu kitap http://www.maths.manchester.ac.uk/~avb/micromath adresinden ücretsiz indirilebilir. Bu yazı aynı zamanda 2008 yazında Türkiye'de, Nesin Matematik Köyü'nde yazar tarafından verilecek *Elementary mathematics from the point of view of "higher" mathematics* dersinin bir bölümünü oluşturacaktır.

x_1, insan yerine x_2 yazarsak, (2) denklemini,

$$\frac{10x_1}{5x_2} = 2x_1x_2^{-1}$$

olarak yazabiliriz. Bu sayede elma ve insanlarla işlem yapabiliriz.

Genellikle sadece tek değişkenli Laurent polinomlarının fiziksel olarak (veya gerçek hayatta) anlamlı oldukları yorumu yapılır. Ama heterojen miktarların toplamı da anlamlıdır ve bileşen bileşen yapılır; mesela bir çantada (2 elma + 1 portakal) varsa ve bir başka çantada (1 elma + 1 portakal) varsa, ikisinde toplam

(2 elma + 1 portakal) + (1 elma + 1 portakal)
= (3 elma + 2 portakal)

olur.

Bunun vektörlere de çok sezgisel ve doğrudan bir yaklaşım[1] verdiğini de fark edebilirsiniz.

Tabii ki Laurent polinomlarını çocuklara öğretmeye gerek yok, ama öğretmenlere öğretmenin bir zararı olamaz. 1591'de **Introduction to the Analytic Art** isimli kitabında

Eğer bir büyüklük başka bir büyüklüğe bölünürse, [*bölümün birimi*] *öncekilerden farklı olur. Eski analizcilerin belirsizliği ve anlaşılmazlığı bu* [*kurallara*] *dikkat etmemelerinden kaynaklanır.*

satırlarını yazan François Viète de bu konuda benim müttefiğimdir.

Öğretmenlerin, öğrencilerinin elma/insan birimli miktarlarla çalışıp çalışamayacakları konusundaki sorularını cevaplamalarında bir sakınca yok. Cevap olumludur tabii ki, bu birimin daha kullanışlı adı "kişi başına elma"'dır. Ancak insanlar bu yeni miktarlara bazen yeni isimler verirler. Mesela,

$$\frac{\text{para}}{\text{insan} \times \text{zaman}}$$

miktarına çoğunlukla maaş deniyor.

"Adlandırılmış" sayıların en uç örneği, spesifik nesneleri saymak için kullanılan özel rakam isimleridir. (Muhtemelen tarihsel olarak bildiğimiz evrensel sayı sisteminden önce ortaya çıkmışlardır.) İngiltere'de, Yorkshire'lıları kötülemek için popüler bir iftira, koyunları saymak için özel rakam isimleri kullandıklarıdır. Lakeland Lehçe Derneği'nin web sitesine inanacak olursak, yerel insanlar gururla geleneklerine tutunduklarını itiraf ediyorlar. Wensleydale'de mesela, ilk on koyun sayısı şunlardır:

yan, tean, tither, mither, pip,
teaser, leaser, catra, horna, dick.

Daha çağdaş zamanlara bakarsak, koyun sayılarını Richard Feynman'ın espirisiyle karşılaştırmak eğlencelidir:

Anlıyor musunuz, kimyacıların tuhaf bir sayma yöntemi vardır: "bir, iki, üç, dört, beş proton" diyecekleri yerde "hidrojen, helyum, lityum, berilyum, bor" derler.

Fizikçiler,

$$\mathbb{R}[\text{mesafe}^{\pm 1}, \text{zaman}^{\pm 1}, \text{kütle}^{\pm 1}]$$

Laurent polinom halkasında çalışmaya bayılırlar, çünkü bütün fiziksel miktarları, adlarına üç temel birimin kombinasyonları şeklinde ölçmek isterler. Bu üç temel birim, mesafe, zaman ve kütledir. Ama bu üç değişkenle bile halka küçük kalır, çünkü fizikçiler temel birimlerin kesirli güçlerini almak zorunda kalıyorlar. Örneğin, hızın birimi mesafe/zaman'dır. Elektrik yüküne[2] ise

$$\frac{\text{kütle}^{1/2} \times \text{mesafe}^{1/2}}{\text{zaman}}$$

birimi varmış gibi davranmak gerekir.

Fizikçilere herşeyi fazla basite indirgiyorlar diye çok da çatmamak lazım. Hepimiz herşeyi sadece iki temel ölçeğe göre değerlendiren insanlar tanıyoruz: para ve zaman. Hepimizin bildiği gibi, kütle kolayca paraya dönüştürülebilir; yerel süpermarketin şarküteri bölümünde bir "pound" jambon istediğim zaman, satıcı kız bana genelde "Para anlamında mı pound, ağırlık anlamında mı pound?" diye sorar. Ve tabii hepimizin bildiği gibi vakit nakittir.

Bir fizik formülünde kullanılan birimlere dikkat etmek işe yarayabilir: Sol ve sağ tarafta bulunan birimlerin dengesi formülün şekli hakkında

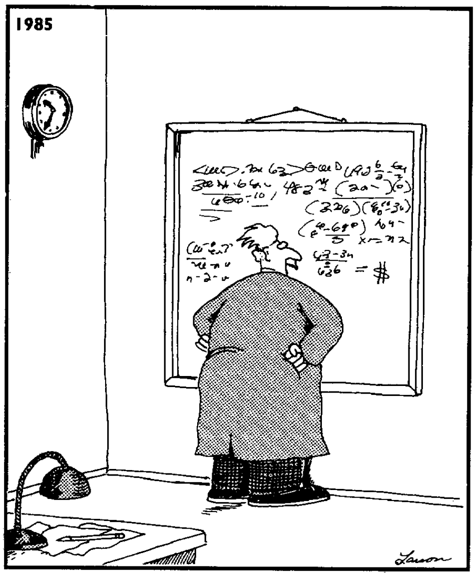
1 Üstelik, vektörlere bu "yemek çantası" yaklaşımı dualite ve tensörlere aynı zamanda doğal bir giriş sağlar: g_1, g_2, g_3 miktarında, fiyatları p^1, p^2, p^3 olan birtakım malların toplam fiyatı, $\sum g_i p^i$ şeklinde skaler çarpım türünden bir ifadedir. g_i ve p^i miktarlarının doğalarının çok farklı olabileceklerini görüyoruz. Lisans eğitimindeki lineer cebir dersindeki skaler (dot) çarpımına verilen standart yaklaşım genellikle skaler çarpımının vektör uzaylarının dualitesinin bir sonucu olduğu olgusunu gizler, ve bu sonradan tensor cebirlerinin ve fonksiyonel analizin çalışılmasında devasa zorluklar meydana getirir.

2 Eğer birimlerimizi uzayın dielektrik sabiti ε_0 boyutsuz olacak şekilde seçersek, o zaman,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

formülüyle yazılan Coulomb yasasını, $q_1 = q_2 = q$ diyeceğimiz iki eşit yüke uygulandığımızda, q^2/r^2'nin kuvvetin boyutlarına sahip olduğunu görürüz.

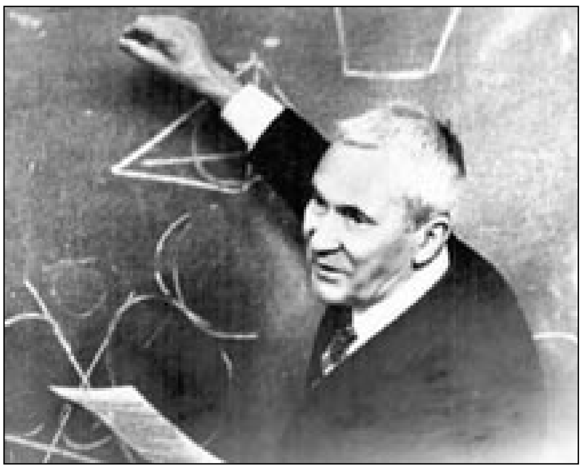
bilgi verebilir. Böyle bir *birimsel analizi* bizi çabucak inanılmaz derin sonuçlara götürür, örneğin Kolmogorov'un türbülans'ın enerji spektrumu hakkındaki ünlü "5/3 Yasası".



Ünlü "The Far Side" çizeri Larson'dan: Einstein vaktin nakit olduğunu anlarken.

2. Birimsel Analizin Zaferi: Kolmogorov'un "5/3" Yasası. Ünlü matematikçi Andrei Kolmogorov bugüne kadar matematikte görülmüş olan en çarpıcı ve en güzel birimsel analiz argümanı örneğinin yaratıcısıdır. Türbülanslı sıvılardaki enerji dağılımı konusundaki ufuk açıcı "5/3 yasası" birkaç satırda açıklanacak basitliktedir. Üstelik birimsel analiz kullandığı için adlandırılmış sayıların aritmetiği ile doğrudan alakalıdır. (Bkz. Bölüm 1.)

Fizik öğretmenimin (sonsuz teşekkürlerimi sunduğum Anatoly Mikhailovich Trubachov) doğaçlama derslerinin birinde "5/3 yasası"nı çıkardığını gö-



Ünlü Rus matematikçi Andrey Kolmogorov

Katsushika Hokusai'nin Kanagawa açıklarındakı Büyük Dalga tahta gravüründen bir sıvının farklı ölçeklerdeki hareketi. (Fuji Dağından Otuz Altı Manzara, 1823-29). Bu resmi kaos bilimcileri çok severler.

recek kadar iyi bir liseye gitme şansım oldu. Açıklamamda Arnold ve Ball'dan bazı ayrıntıları ödünç alıyorum. (Ball'dan Katsushika Hokusai'nin gravürünü ilustrasyon olarak kullanma fikrini de aldım.)

Bir sıvının türbülanslı akımı girdaplardan oluşur; her girdaptaki akım daha küçük girdaplara dönüşür ve bu dönüşüm, sıvının viskozitesinin hareketteki kinetik enerjiyi tamamıyla ısıya dönüşmesine neden olacak derecede küçük ölçeğe kadar devam eder. Eğer dışardan enerji gelmiyorsa (Hokusai'nin gravüründeki fırtına çıkaran rüzgar gibi), hareketin enerjisi gittikçe azalır ve bir süre sonra su hareketsiz kalır. Biz değişmeyen bir enerji kaynağımızın olduğunu varsayalım; fırtına tam gücüne ulaşmıştır ve öyle kalacaktır. Bir sıvının hareketi farklı uzunluklarda olan dalgalardan oluşur; Kolmogorov'un sorusu, "belli uzunluktaki bir dalga enerjinin ne kadarını taşıyor?" sorusuydu.

Burada, Kolmogorov'un analizini biraz basitleştirerek sunacağız.

Çalışacağımız birimlerin ve bu birimlerin birimlerinin bir listesini yapmakla başlayalım.

Birincisi, *enerji akımı*dır. $\in$ olarak simgelenir. 1 kütle birimi ve 1 zaman birimi başına düşen enerjidir. (Bizim düzenimizde enerji akımının enerji yayılımıyla aynı olduğunu hatırlatayım). Enerjinin birimi

$$\frac{\text{kütle} \times \text{mesafe}^2}{\text{zaman}^2}$$

dir. (Hareket halindeki fiziksel bir noktanın kinetik enerjisi için $K = mv^2/2$ formülünü hatırlayın.) O zaman $\in$, yani enerji akımının birimi,

$$\frac{\text{enerji}}{\text{kütle} \times \text{zaman}} = \frac{\text{mesafe}^2}{\text{zaman}^3}$$

olur.

Dalgaları saymak için de dalga sayısını, yani bir mesafe birimine sığan dalgaların sayısını kullanmak kullanışlı olacaktır. O zaman dalga sayısı olan k'nın birimi

$$\frac{1}{\text{mesafe}}$$

olur.

Son olarak, $E(k)$ *enerji spektrumu*, iki dalga sayısının arasındaki aralık $\Delta k = k_1 - k_2$ olarak verildiği zaman bu aralıktaki dalgaların taşıdığı (kütle birimi başına) enerji yaklaşık $E(k_1)\Delta k$ olacak şekildedir. Böylece $E(k)$'nın birimi

$$\frac{\text{enerji}}{\text{kütle} \times \text{dalga sayısı}}$$

yani

$$\frac{\text{mesafe}^3}{\text{zaman}^2}$$

dir.

Aşağıdaki önemli hesapları yapmak için, Kolmogorov şunu demeye denk olan önemli bir varsayım yaptı[3]:

En büyük girdaplardan (bütün kıtayı kaplayan bir kasırga gibi) en küçüklerine kadar (bir sokak köşesinde dönen tozlar gibi), dalga sayısı ne olursa olsun, küçük girdaplar büyük girdaplarla aynı şekilde meydana gelir.

O zaman enerji spektrumu $E(k)$'nın, enerji akımı $\in$'un ve dalga sayısı k'nın başka hiçbir şey içermeyen bir denklemle birbirine bağlı olduğunu varsayabiliriz. Bahsettiğimiz üç miktarın birimleri tamamen farklı olduğu için, onları sadece

$$E(k) \approx C{\in}^x \cdot k^y$$

türünden bir denklem vasıtasıyla birbirine bağlayabiliriz. Buradaki C bir sabittir; küçük ve büyük ölçeklerde denklem aynı kalacağı için, denklemin şekli ölçü birimi seçimine dayanmamalı, dolayısıyla C birimsiz olmalıdır.

Şimdi her iki tarafın da birimlerine göz atalım ve sadece birimler açısından denklemin nasıl göründüğüne bakalım:

3 Bu ifade çoğu uzmanın kabul edeceğinden daha kaba bir ifade; onu Arnold'dan ödünç aldım.

Van Gogh'un "Yıldızlı Gece" adlı tablosunda girdaplar herhalde sanatçının geçirdiği aşırı bunalımın göstergesi. Kolmogorov'un 5/3 yasasına uyuyorlar mı?

$$\frac{\text{mesafe}^3}{\text{zaman}^2}=\left(\frac{\text{mesafe}^2}{\text{zaman}^3}\right)^x\times\left(\frac{1}{\text{mesafe}}\right)^y$$

Mesafeleri mesafelerle ve zamanları zamanlarla eşitledikten sonra, elimizde

$$\text{mesafe}^3 = \text{mesafe}^{2x} \times \text{mesafe}^{-y}$$
$$\text{zaman}^2 = \text{zaman}^{3x}$$

kalır, bu da bize x ve y diye iki değişkeni olan iki denklemli bir sistem verir,

$$3 = 2x - y$$
$$2 = 3x.$$

Bu sistem kolaylıkla çözülüp

$$x = 2/3 \text{ ve } y = -5/3$$

bulunur. Dolayısıyla Kolmogorov'un "5/3" Yasasına geldik:

$$E(k) \approx C\in^{2/3}.k^{-5/3}.$$

Birimsiz olan C sabiti deneysel olarak bulunabilir ve 1'e bir hayli yakın olduğu ortaya çıkar.

Bu ünlü sonucun konumu bir hayli şaşırtıcıdır. Bir türbülans uzmanı olan Alexander Chorin'in kelimeleriyle,

Hiçbir şey türbülans'ın ne derecede cehaletle ışık arasında asılı durduğunu Komogorov'un türbülans teorisi kadar ortaya koyamaz; hem bildiklerimizin köşe taşıdır hem de dipsiz bir esrardır aynı anda.

Aynı spektrum [...] *güneşte*, *denizde* ve *insan yapımı makinelerde beliriyor*. *5/3 yasası deneysel olarak çok iyi doğrulanmıştır*, *ve her yeni problem için bütün ölçeklerin yeniden hesaplanmasına gerek kalmaması*, *pratik modellemeye kapıyı açıyor*.

Arnold bize Kolmogorov'un argümanının başlıca varsayımlarının hâlâ kanıtlanmamış olduğunu hatırlatıyor. Üstelik 60 seneyi aşkın bir süredir!

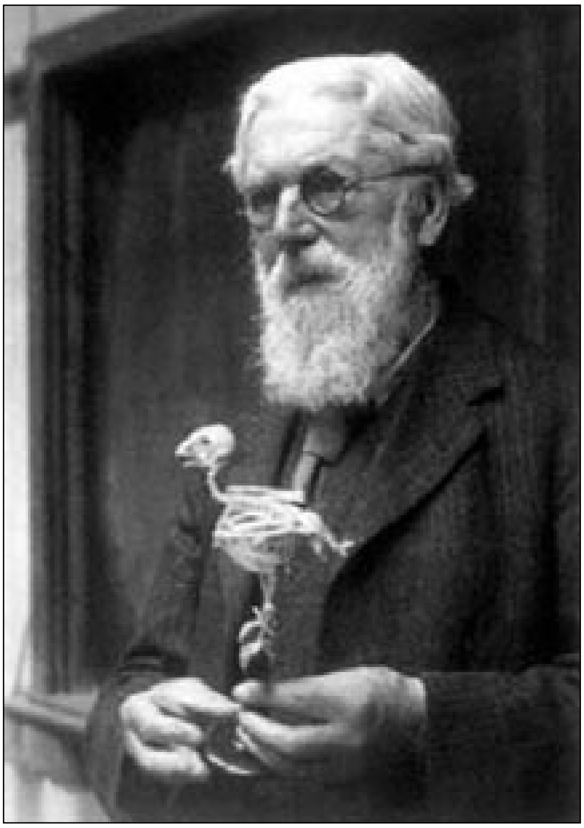
Daha da beteri, Chorin aşağıdaki epey rahatsız edici noktaya parmak basıyor:

Kolmogorov'un spektrumu, varsayımlarının açıkça doğrulanmadığı problemlerde sıkça ortaya çıkıyor. 5/3 yasası artık bir sürü farklı yolla çıkarılabiliyor, hatta çoğu zaman Kolmogorov'un varsayımlarına ters düşen varsayımlarla.

Türbülans teorisi tuhaf bir durumda: Bir yandan en önemli sonucunu anlamaya uğraşırken diğer yandan tüm teorisini hâlâ anlayamadığı bu sonucun üstüne kurmak zorunda kalıyor.

Alıştırmalar

Birimsel analiz tarihinin izi, D'Arcy Thompson'un **On Growth and Form** (Büyüme ve Biçim Üzerine) isimli kitabında hayvanların hızının analizi için etkili bir şekilde kullanılan *Froude'un Vapur Karşılaştırma Yasası*'na kadar takip edilebilir [On Growth and Form, sayfa 8-24]:



D'Arcy Thompson

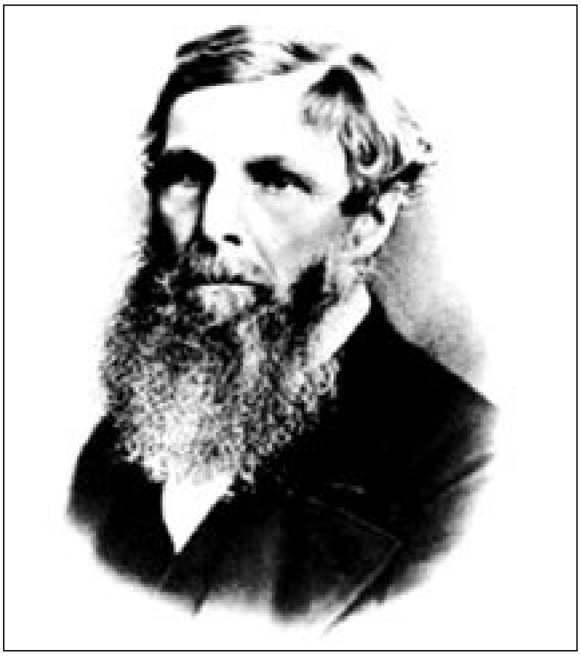
Yaklaşık aynı biçimde tasarlanmış vapurların azami hızı, uzunluklarının kare köküyle orantılıdır.

Suyun gemilere sunduğu direnç ve gemilerin dengesiyle ilgili ilk güvenilir yasaları William Froude (1810-1879) formüle etmiştir.

Alıştırma 1, orta. Froude Yasası'nı kanıtlayın.

Alıştırma 2, kolay. Bir farenin vücut yapısı neden bir filinkine oranla daha incedir?

Alıştırma 3, kolay. Froude Yasası'nın aşağıdaki sonucunu kanıtlayın: Bir balığın göreceli hızı (yani birim zamanda balığın kendi uzunluğunun kaç katını katettiği), uzunluğunun kare köküyle ters orantılıdır.



William Froude

Bu bilinen bir fenomeni açıklar: bir akarsudaki küçük balıklar çok hızlı görünür.

Alıştırma 4, daha da kolay. Hangisinin göreceli olarak daha hızlı olduğunu tahmin edin: bir karınca mı bir yarış atı mı?

Bir Araştırma Projesi. Alıştırma 2'deki fikirleri kullanarak, cinsi verilmiş bir ağacın ulaşabileceği azami uzunluk için bir tahmin yöntemi geliştirin.

Bu problemin ciddi bir pratik değeri var. Bir Ingilize bunu açıklamak için bir tek kelime yeter: Leylandii. Bir yabancı için, Wikipedia şu açıklamayı veriyor:

> *Leyland Servi Ağacı, (Cupressocyparis leylandii), genellikle sadece Leylandii olarak bilinir. Bahçecilikte, özellikle çit ve bahçe ayrımları için kullanılıp hızlı büyüyen, yaprak dökmeyen bir ağaçtır.*
>
> *Leyland Servisi, Monterey Servisi ve Nootka Servisi arası bir melezdir. Bu melez en az 20 farklı durumda ortaya çıkmıştır, her seferinde açık havada polenleşmeyle.* [...]
>
> *Leyland Servileri genelde hızlı bir şekilde sınır çizmek veya çit görevi görmek için bahçelere dikilir. Ancak büyüme hızları (senede bir metreye kadar), koyu gölgeleri ve olağanüstü potansiyel uzunlukları (bahçe şartlarında 20 metreyi aşıp, en az 35 metreye ulaşabiliyorlar) bu ağaçları bir sorun haline getiriyor. Büyük Britanya'da, ışığı kesme kapasiteleri yüzünden birçok ünlü komşu kavgasına sebebiyet vermişlerdir, hatta bu kavgalar şiddet kullanımına (ve son zamanlardaki bir durumda cinayete) kadar gidebiliyor.*

Leylandii

Sorun şu ki kimse son melezlerin ulaşabileceği azami uzunluğu bilmiyor. Bütün bilinen örnekler büyümeye devam ediyor... ♥

Kaynakça

[1] V. I. Arnold, **What is Mathematics?** Moscow, MTSNMO, 2004.

[2] R. Ball, *The Kolmogorov cascade*, **Encyclopedia of Nonlinear Science**'ta (A. Scott, ed.). Routledge, 2004. http://wwwrsphysse.anu.edu.au/~rxb105/cascade.pdf

[3] P. Bryant and S. Squire, *The influence of sharing on children's initial concept of division*, J. Experimental Child Psychology 81 no 1 (Oc ak 2002) 1-43.

[4] A. J. Chorin, Book Review: *Kolmogorov spectra of turbulence* I: *Wave turbulence, by V. E. Zakharov, V. S. Lvov, and G. Falkovich*. Bull. AMS 29 no 2 (1993) 304-306.

[5] R. Feynman, **QED: The Strange Theory of Light and Matter**, Princeton University Press, 1985.

[6] A. N. Kolmogorov, *Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds numbers*, Doklady Acad Sci. USSR 31 (1941) 301-305.

[7] T. Relph, *Counting sheep*, http://www.lakelanddialectsociety.org/sheep.htm.

[8] D'A. W. Thompson, **On Growth and Form.** Cambridge University Press, 1961.

[9] F. Viète, **The Analytic Art**, çevirmen T. Richard Witmer. Kent, Ohio: The Kent State University Press, 1983.