

Birimsel Analiz veya Elmaları İnsanlara Bölmek

Alexandre V. Borovik* / alexandre.borovik@gmail.com



Matematik neden bu kadar zordur? Yazım-
da, çoğu zaman farkedilmeyen ama öğren-
cilerin matematiği algılayışlarında ciddi et-
kileri olan yapı ve kavramlardan birine kısa bir bakış
sunacağım.

1. “Adlandırılmış” Sayılar. Çocukken öğret-
menim bana “adlandırılmış” sayılara dikkat et-
mem gerektiğini ve insanlarla elmaları *toplama-*
mam gerektiğini söylediği zaman, ona o halde ne-
den elmaları insanlara *bölebildiğimizi* sordum:

$$10 \text{ elma} : 5 \text{ insan} = 2 \text{ elma.} \quad (1)$$

Daha da beteri; 10 elmayı herkese 2 elma vere-
rek dağıttığımız zaman, elimizde

$$10 \text{ elma} : 2 \text{ elma} = 5 \text{ insan} \quad (2)$$

eşitliği oluyor. Eşitliğin sağ tarafındaki “insan” da
nerden çıkıyor? Neden “insan” da mesela “çocuk”
değil? Eşitliğin sol tarafında hiç “insan” yoktu! Sol
taraftaki sayılar sağ taraftaki sayının adını nereden
biliyor?

Öğretmenimden tatmin edici bir cevap ala-
madım ve ancak çok uzun zaman sonra sayıların as-
lında

$$10 \text{ elma} : 5 \text{ insan} = 2 \text{ elma/insan,}$$

$$10 \text{ elma} : 2 \text{ elma/insan} = 5 \text{ insan.} \quad (3)$$

diye adlandırılması gerektiğini anladım.

Eğitim psikologlarının (1) eşitliğinin (buna
paylaşım diyelim) (2) eşitliğiyle (buna da dağıt-
mak demek mantıklı olur) pek alakası olmadığını
güvenle iddia etmelerinin nedeni budur. Dağıtmak
çok daha karmaşık işlemler gerektirir.

Bir öğrencinin matematiksel yeteneklerinin,
çalıştığı sayılar kümesiyle beraber büyüdüğü genel-
geçer bir bilgidir: Doğal sayılardan tamsayılara,

sonra kesirli, gerçel ve karmaşık sayılara geçildik-
çe matematiksel olgunluk artar.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Bu doğal hiyerarşide eksik olan şey, ilkökul
aritmetiği seviyesindeki çocukların bile kullandığı,
çok daha sofistike bir yapıdır:

$$\mathbb{Q}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$$

yani \mathbb{Q} üzerine n değişkenli “Laurent polinomla-
rı”nın kümesi (daha doğrusu halkası). Bu kümenin
elemenları,

$$3 - \frac{3}{7} x_1^2 x_2^{-1} x_3 x_5^3 x_6^{-4} + \frac{4}{5} x_1^{-7} x_2^3 x_4^3 x_5$$

gibi terimlerdir. Yukardaki terim,

$$3 - \frac{3}{7} \frac{x_1^2 x_3 x_5^3}{x_2 x_6^4} + \frac{4}{5} \frac{x_2^3 x_4^3 x_5}{x_1^7}$$

olarak da yazılabilir. Buradaki x_1, \dots, x_n sembolle-
ri, hesaplarda kullanılan nesnelerin adları yerine
geçebilir; elmalar, insanlar vs. Örneğin elma yerine



Giuseppe Arcimboldo (1527-1593). Matematikçiler elmaları
insanlara bölmeye çalışırsun, sanatçılar yüzyıllardır
meyveleri ve sebzeleri toplayarak insan yapıyorlar!

* EFFL matematik öğretmeni. Yazı Aslı Nesin tarafından İngiliz-
ceden çevrilmiştir. Yazar, yakında çıkacak olan *Mathematics un-
der the Microscope* başlıklı yeni kitabından bazı kısımlarını
kullanmıştır. Söz konusu kitap <http://www.maths.manchester.ac.uk/~avb/micromath> adresinden ücretsiz indirilebilir. Bu ya-
zı aynı zamanda 2008 yazında Türkiye’de, Nesin Matematik Kö-
yü’nde yazar tarafından verilecek *Elementary mathematics from
the point of view of “higher” mathematics* dersinin bir bölümünü
oluşturacaktır.

x_1 , insan yerine x_2 yazarsak, (2) denklemini,

$$\frac{10x_1}{5x_2} = 2x_1x_2^{-1}$$

olarak yazabiliriz. Bu sayede elma ve insanlarla işlem yapabiliriz.

Genellikle sadece tek değişkenli Laurent polinomlarının fiziksel olarak (veya gerçek hayatta) anlamlı oldukları yorumu yapılır. Ama heterojen miktarların toplamı da anlamlıdır ve bileşen bileşen yapılır; mesela bir çantada (2 elma + 1 portakal) varsa ve bir başka çantada (1 elma + 1 portakal) varsa, ikisinde toplam

$$(2 \text{ elma} + 1 \text{ portakal}) + (1 \text{ elma} + 1 \text{ portakal}) = (3 \text{ elma} + 2 \text{ portakal})$$

olur.

Bunun vektörlere de çok sezgisel ve doğrudan bir yaklaşım¹ verdiğini de fark edebilirsiniz.

Tabii ki Laurent polinomlarını çocuklara öğretmeye gerek yok, ama öğretmenlere öğretmenin bir zararı olamaz. 1591’de **Introduction to the Analytic Art** isimli kitabında

Eğer bir büyüklük başka bir büyüklüğe bölünürse, [bölümün birimi] öncekilerden farklı olur. Eski analizcilerin belirsizliği ve anlaşılmasızlığı bu [kurallara] dikkat etmelerinden kaynaklanır.

satırlarını yazan François Viète de bu konuda benim müttefiğimdir.

Öğretmenlerin, öğrencilerinin elma/insan birimli miktarlarla çalışıp çalışamayacakları konusundaki sorularını cevaplamalarında bir sakınca yok. Cevap olumludur tabii ki, bu birimin daha kullanışlı adı “kişi başına elma”dır. Ancak insanlar bu yeni miktarlara bazen yeni isimler verirler. Mesela,

$$\frac{\text{para}}{\text{insan} \times \text{zaman}}$$

miktarına çoğunlukla maaş deniyor.

“Adlandırılmış” sayıların en uç örneği, spesifik nesnelere saymak için kullanılan özel rakam isimle-

ridir. (Muhtemelen tarihsel olarak bildiğimiz evrensel sayı sisteminden önce ortaya çıkmışlardır.) İngiltere’de, Yorkshire’luları kötülemek için popüler bir iftira, koyunları saymak için özel rakam isimleri kullandıklarıdır. Lakeland Lehçe Derneği’nin web sitesine inanacak olursak, yerel insanlar gururla geleneklerine tuttuklarını itiraf ediyorlar. Wensleydale’de mesela, ilk on koyun sayısı şunlardır:

yan, tean, tither, mither, pip,
teaser, leaser, catra, horna, dick.

Daha çağdaş zamanlara bakarsak, koyun sayılarını Richard Feynman’ın espirisiyle karşılaştırmak eğlencelidir:

Anlıyor musunuz, kimyacıların tubaf bir sayıma yöntemi vardır: “bir, iki, üç, dört, beş proton” diyecekleri yerde “hidrojen, helyum, lityum, berilyum, bor” derler.

Fizikçiler,

$$\mathbb{R}[\text{mesafe}^{\pm 1}, \text{zaman}^{\pm 1}, \text{kütle}^{\pm 1}]$$

Laurent polinom halkasında çalışmaya bayılırlar, çünkü bütün fiziksel miktarları, adlarına üç temel birimin kombinasyonları şeklinde ölçmek isterler. Bu üç temel birim, mesafe, zaman ve kütle. Ama bu üç değişkenle bile halka küçük kalır, çünkü fizikçiler temel birimlerin kesirli güçlerini almak zorunda kalıyorlar. Örneğin, hızın birimi mesafe/zaman’dır. Elektrik yüküne² ise

$$\frac{\text{kütle}^{1/2} \times \text{mesafe}^{1/2}}{\text{zaman}}$$

birimi varmış gibi davranmak gerekir.

Fizikçilere herşeyi fazla basite indiriyorlar diye çok da çatmamak lazım. Hepimiz herşeyi sadece iki temel ölçüğe göre değerlendiren insanlar tanıyoruz: para ve zaman. Hepimizin bildiği gibi, kütle kolayca paraya dönüştürülebilir; yerel süpermarketin şarküteri bölümünde bir “pound” jambon istediğim zaman, satıcı kız bana genelde “Para anlamında mı pound, ağırlık anlamında mı pound?” diye sorar. Ve tabii hepimizin bildiği gibi vakit nakittir.

Bir fizik formülünde kullanılan birimlere dikkat etmek işe yarayabilir: Sol ve sağ tarafta bulunan birimlerin dengesi formülün şekli hakkında

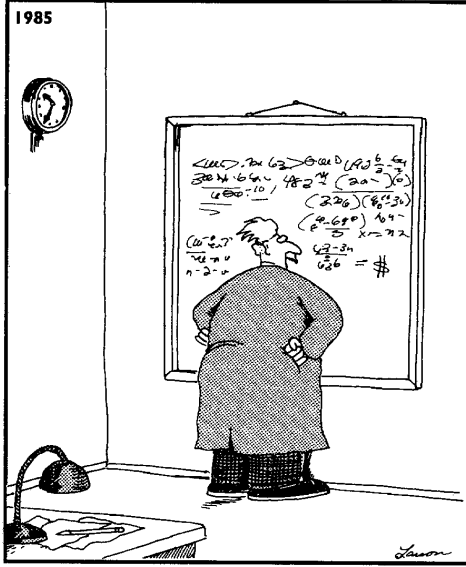
1 Üstelik, vektörlere bu “yemek çantası” yaklaşımı dualite ve tensörlere aynı zamanda doğal bir giriş sağlar: g_1, g_2, g_3 miktarında, fiyatları p^1, p^2, p^3 olan birtakım malların toplam fiyatı, $\sum g_i p^i$ şeklinde skaler çarpım türünden bir ifadedir. g_i ve p^i miktarlarının doğalarının çok farklı olabileceklerini görüyoruz. Lisans eğitimindeki lineer cebir dersindeki skaler (dot) çarpımına verilen standart yaklaşım genellikle skaler çarpımının vektör uzaylarının dualitesinin bir sonucu olduğu olgusunu gizler, ve bu sonradan tensor cebirlerinin ve fonksiyonel analiz çalışılmasında devasa zorluklar meydana getirir.

2 Eğer birimlerimizi uzayın dielektrik sabiti ϵ_0 boyutsuz olacak şekilde seçersek, o zaman,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

formülüyle yazılan Coulomb yasasını, $q_1 = q_2 = q$ diyeceğimiz iki eşit yüke uyguladığımızda, q^2/r^2 ’nin kuvvetin boyutlarına sahip olduğunu görürüz.

bilgi verebilir. Böyle bir *birimsel analizi* bizi çabucak inanılmaz derin sonuçlara götürür, örneğin Kolmogorov'un türbülans'ın enerji spektrumu hakkındaki ünlü "5/3 Yasası".



Ünlü "The Far Side" çizeri Larson'dan: Einstein vaktin nakit olduğunu anlarken.

2. Birimsel Analizin Zaferi: Kolmogorov'un "5/3" Yasası. Ünlü matematikçi Andrei Kolmogorov bugüne kadar matematikte görülmüş olan en çarpıcı ve en güzel birimsel analiz argümanı örneğinin yaratıcısıdır. Türbülanslı sıvılardaki enerji dağılımı konusundaki ufuk açıcı "5/3 yasası" birkaç satırda açıklanacak basitliktedir. Üstelik birimsel analiz kullandığı için adlandırılmış sayıların aritmetiği ile doğrudan alakalıdır. (Bkz. Bölüm 1.)

Fizik öğretmenimin (sonsuz teşekkürlerimi sunduğum Anatoly Mikhailovich Trubachov) doğaçlama derslerinin birinde "5/3 yasası" nı çıkardığını gö-



Ünlü Rus matematikçi Andrey Kolmogorov



Katsushika Hokusai'nin Kanagawa açıklarındaki Büyük Dalga tahta gravüründen bir sınıfın farklı ölçeklerdeki hareketi. (Fuji Dağından Otuz Altı Manzara, 1823-29). Bu resmi kaos bilimcileri çok severler.

recek kadar iyi bir liseye gitme şansım oldu. Açıklamamda Arnold ve Ball'dan bazı ayrıntıları ödünç alıyorum. (Ball'dan Katsushika Hokusai'nin gravürünün ilustrasyonu olarak kullanma fikrini de aldım.)

Bir sınıfın türbülanslı akımı girdaplardan oluşur; her girdaptaki akım daha küçük girdaplara dönüşür ve bu dönüşüm, sınıfın viskozitesinin hareketteki kinetik enerjiyi tamamıyla ısıya dönüşmesine neden olacak derecede küçük ölçeğe kadar devam eder. Eğer dışardan enerji gelmiyorsa (Hokusai'nin gravüründeki fırtına çıkaran rüzgar gibi), hareketin enerjisi gittikçe azalır ve bir süre sonra su hareketsiz kalır. Biz değişmeyen bir enerji kaynağımızın olduğunu varsayalım; fırtına tam gücüne ulaşmıştır ve öyle kalacaktır. Bir sınıfın hareketi farklı uzunluklarda olan dalgalardan oluşur; Kolmogorov'un sorusu, "belli uzunluktaki bir dalga enerjinin ne kadarını taşıyor?" sorusuydu.

Burada, Kolmogorov'un analizini biraz basitleştirerek sunacağız.

Çalışacağımız birimlerin ve bu birimlerin birimlerinin bir listesini yapmakla başlayalım.

Birincisi, *enerji akımı*dır. ϵ olarak simgelenir. 1 kütle birimi ve 1 zaman birimi başına düşen enerjidir. (Bizim düzenimizde enerji akımının enerji yayılımıyla aynı olduğunu hatırlatayım). Enerjinin birimi

$$\frac{\text{kütle} \times \text{mesafe}^2}{\text{zaman}^2}$$

dir. (Hareket halindeki fiziksel bir noktanın kinetik enerjisi için $K = mv^2/2$ formülünü hatırlayın.) O zaman ϵ , yani enerji akımının birimi,

$$\frac{\text{enerji}}{\text{kütle} \times \text{zaman}} = \frac{\text{mesafe}^2}{\text{zaman}^3}$$

olur.

Dalgaları saymak için de dalga sayısını, yani bir mesafe birimine sığan dalgaların sayısını kullanmak kullanışlı olacaktır. O zaman dalga sayısı olan k 'nın birimi

$$\frac{1}{\text{mesafe}}$$

olur.

Son olarak, $E(k)$ enerji spektrumu, iki dalga sayısının arasındaki aralık $\Delta k = k_1 - k_2$ olarak verildiği zaman bu aralıktaki dalgaların taşıdığı (kütle birimi başına) enerji yaklaşık $E(k_1)\Delta k$ olacak şekilde dir. Böylece $E(k)$ 'nın birimi

$$\frac{\text{enerji}}{\text{kütle} \times \text{dalga sayısı}}$$

yani

$$\frac{\text{mesafe}^3}{\text{zaman}^2}$$

dir.

Aşağıdaki önemli hesapları yapmak için, Kolmogorov şunu demeye denk olan önemli bir varsayım

3 Bu ifade çoğu uzmanın kabul edeceğinden daha kaba bir ifade; onu Arnold'dan ödünç aldım.

yım yaptı³:

En büyük girdaplardan (bütün kıtayı kaplayan bir kasırga gibi) en küçüklerine kadar (bir sokak köşesinde dönen tozlar gibi), dalga sayısı ne olursa olsun, küçük girdaplar büyük girdaplarla aynı şekilde meydana gelir.

O zaman enerji spektrumu $E(k)$ 'nın, enerji akımı ϵ 'un ve dalga sayısı k 'nin başka hiçbir şey içermeyen bir denklemlerle birbirine bağlı olduğunu varsayabiliriz. Bahsettiğimiz üç miktarın birimleri tamamen farklı olduğu için, onları sadece

$$E(k) \approx C \epsilon^{x} k^y$$

türünden bir denklemlerle birbirine bağlayabiliriz. Buradaki C bir sabittir; küçük ve büyük ölçeklerde denklemler aynı kalacağı için, denklemin şekli ölçü birimi seçimine dayanmamalı, dolayısıyla C birimsiz olmalıdır.

Şimdi her iki tarafın da birimlerine göz atalım ve sadece birimler açısından denklemin nasıl göründüğüne bakalım:



Van Gogh'un "Yıldızlı Gece" adlı tablosunda girdaplar herhalde sanatçının geçirdiği aşırı bunalımın göstergesi. Kolmogorov'un 5/3 yasasına uyuyorlar mı?

$$\frac{\text{mesafe}^3}{\text{zaman}^2} = \left(\frac{\text{mesafe}^2}{\text{zaman}^3} \right)^x \times \left(\frac{1}{\text{mesafe}} \right)^y$$

Mesafeleri mesafelerle ve zamanları zamanlarla eşitledikten sonra, elimizde

$$\begin{aligned} \text{mesafe}^3 &= \text{mesafe}^{2x} \times \text{mesafe}^{-y} \\ \text{zaman}^2 &= \text{zaman}^{3x} \end{aligned}$$

kalır, bu da bize x ve y diye iki değişkeni olan iki denklemlilik bir sistem verir,

$$\begin{aligned} 3 &= 2x - y \\ 2 &= 3x. \end{aligned}$$

Bu sistem kolaylıkla çözümlük

$$x = 2/3 \text{ ve } y = -5/3$$

bulunur. Dolayısıyla Kolmogorov'un "5/3" Yasasına geldik:

$$E(k) \approx C \in^{2/3} \cdot k^{-5/3}.$$

Birimsiz olan C sabiti deneysel olarak bulunabilir ve 1'e bir hayli yakın olduğu ortaya çıkar.

Bu ünlü sonucun konumu bir hayli şaşırtıcıdır. Bir türbülans uzmanı olan Alexander Chorin'in kelimeleriyle,

Hiçbir şey türbülans'ın ne derecede cehaletle ışık arasında asılı durduğunu Komogorov'un türbülans teorisi kadar ortaya koymaz; hem bildiklerimizin köşe taşıdır hem de dipsiz bir esrardır aynı anda.

Aynı spektrum [...] güneşte, denizde ve insan yapımı makinelerde beliriyor. 5/3 yasası deneysel olarak çok iyi doğrulanmıştır, ve her yeni problem için bütün ölçüklerin yeniden hesaplanmasına gerek kalmaması, pratik modellemeye kapıyı açıyor.

Arnold bize Kolmogorov'un argümanının başlıca varsayımlarının hâlâ kanıtlanmamış olduğunu hatırlatıyor. Üstelik 60 seneyi aşkın bir süredir!

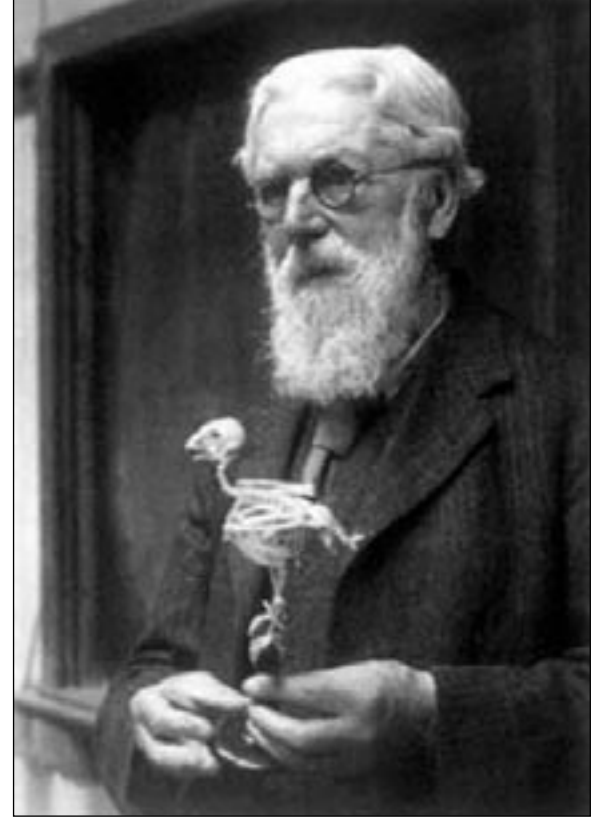
Daha da beteri, Chorin aşağıdaki epey rahatsız edici noktaya parmak basıyor:

Kolmogorov'un spektrumu, varsayımlarının açıkça doğrulanmadığı problemlerde sıkça ortaya çıkıyor. 5/3 yasası artık bir sürü farklı yolla çıkarılabiliyor, hatta çoğu zaman Kolmogorov'un varsayımlarına ters düşen varsayımlarla.

Türbülans teorisi tuhaf bir durumda: Bir yandan en önemli sonucunu anlamaya uğraşırken diğer yandan tüm teorisini hâlâ anlamadığı bu sonucun üstüne kurmakta zorunda kalıyor.

Alıştırmalar

Birimsel analiz tarihinin izi, D'Arcy Thompson'un **On Growth and Form** (Büyüme ve Biçim Üzerine) isimli kitabında hayvanların hızının analizi için etkili bir şekilde kullanılan *Froude'un Vapur Karşılaştırma Yasası*'na kadar takip edilebilir [On Growth and Form, sayfa 8-24]:



D'Arcy Thompson

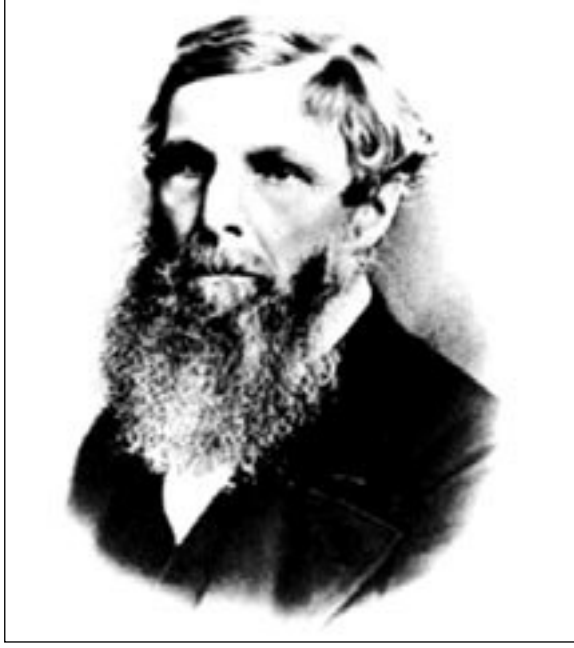
Yaklaşık aynı biçimde tasarlanmış vapurların azami hızı, uzunluklarının kare köküyle orantılıdır.

Suyun gemilere sunduğu direnç ve gemilerin dengesiyle ilgili ilk güvenilir yasaları William Froude (1810-1879) formüle etmiştir.

Alıştırma 1, orta. Froude Yasası'nı kanıtlayın.

Alıştırma 2, kolay. Bir farenin vücut yapısı neden bir filinkine oranla daha incedir?

Alıştırma 3, kolay. Froude Yasası'nın aşağıdaki sonucunu kanıtlayın: Bir balığın göreceli hızı (yani birim zamanda balığın kendi uzunluğunun kaç katını katettiği), uzunluğunun kare köküyle ters orantılıdır.



William Froude

Bu bilinen bir fenomeni açıklar: bir akarsudaki küçük balıklar çok hızlı görünür.

Alıştırma 4, daha da kolay. Hangisinin görece olarak daha hızlı olduğunu tahmin edin: bir karcınca mı bir yarış atı mı?

Bir Araştırma Projesi. Alıştırma 2'deki fikirleri kullanarak, cinsi verilmiş bir ağacın ulaşabileceği azami uzunluk için bir tahmin yöntemi geliştirin.

Bu problemin ciddi bir pratik değeri var. Bir İngilize bunu açıklamak için bir tek kelime yeter: Leylandii. Bir yabancı için, Wikipedia şu açıklamayı veriyor:

Leyland Servi Ağacı, (Cupressocyparis leylandii), genellikle sadece Leylandii olarak bilinir. Bahçecilikte, özellikle çit ve bahçe ayrımları için kullanılıp hızlı büyüyen, yaprak dökmeyen bir ağaçtır.

Leyland Servisi, Monterey Servisi ve Nootka Servisi arası bir melezdır. Bu melez en az 20 farklı durumda ortaya çıkmıştır, her seferinde açık havada polenleşmeyle. [...]

Leyland Servileri genelde hızlı bir şekilde sınır çizmek veya çit görevi görmek için bahçelere dikilir. Ancak büyüme hızları (senede bir metreye kadar), koyu gölgeleri ve olağüstü potansiyel uzunlukları (bahçe şartlarında 20 metreyi aşp, en az 35 metreye ulaşabiliyorlar) bu ağaçları bir so-

run haline getiriyor. Büyük Britanya'da, ışığı kesme kapasiteleri yüzünden birçok ünlü komşu kavgasına sebebiyet vermişlerdir, hatta bu kavgalar şiddet kullanımına (ve son zamanlardaki bir durumda cinayete) kadar gidebiliyor.



Leylandii

Sorun şu ki kimse son melezlerin ulaşabileceği azami uzunluğu bilmiyor. Bütün bilinen örnekler büyümeye devam ediyor... ♥

Kaynakça

- [1] V. I. Arnold, *What is Mathematics?* Moscow, MTSNMO, 2004.
- [2] R. Ball, *The Kolmogorov cascade*, *Encyclopedia of Nonlinear Science*'ta (A. Scott, ed.). Routledge, 2004. <http://wwwr-sphysse.anu.edu.au/~rx105/cascade.pdf>
- [3] P. Bryant and S. Squire, *The influence of sharing on children's initial concept of division*, *J. Experimental Child Psychology* 81 no 1 (Oc ak 2002) 1-43.
- [4] A. J. Chorin, Book Review: *Kolmogorov spectra of turbulence I: Wave turbulence*, by V. E. Zakharov, V. S. Lvov, and G. Falkovich. *Bull. AMS* 29 no 2 (1993) 304-306.
- [5] R. Feynman, *QED: The Strange Theory of Light and Matter*, Princeton University Press, 1985.
- [6] A. N. Kolmogorov, *Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds numbers*, *Doklady Acad Sci. USSR* 31 (1941) 301-305.
- [7] T. Relph, *Counting sheep*, <http://www.lakelanddialectsociety.org/sheep.htm>.
- [8] D'A. W. Thompson, *On Growth and Form*. Cambridge University Press, 1961.
- [9] F. Viète, *The Analytic Art*, çevirmen T. Richard Witmer. Kent, Ohio: The Kent State University Press, 1983.