Mükemmel Sayılar

Halime Yanar

Kendisinden küçük bölenlerinin toplamına eşit olan bir sayıya ***mükemmel sayı*** denir. Örneğin, 6 mükemmel bir sayıdır, çünkü 6'nın bölenleri 1, 2, 3 ve 6'dır ve

$$1 + 2 + 3 = 6$$

eşitliği geçerlidir. 28 de mükemmel bir sayıdır:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Mükemmel sayı bulmak pek o kadar kolay değildir. İşte 6 ve 28'den sonraki ilk mükemmel sayı:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$$

Bundan sonraki mükemmel sayı da 8128'dir.

MÖ 300'lerde yaşamış olan Öklid **Elemanlar** adlı meşhur eserinde mükemmel sayılardan sözetmiştir. Ama o, kendisinden önce gelenler gibi mükemmel sayılara mistik anlamlar yüklememiş, konuyu sadece matematiksel olarak ele almıştır.

Eski Yunanlılar yukardaki 4 mükemmel sayı dışında mükemmel sayı bilmiyorlardı. Ama gene de mükemmel sayılar hakkında bir teorem kanıtlamayı başarmışlardır:

Teorem 1 [Öklid]. *Eğer* $2^k - 1$ *bir asalsa, o zaman* $2^{k-1}(2^k - 1)$ *sayısı mükemmeldir.*

Teoremi birazdan kanıtlayacağız, ama önce uygulayalım. Küçük k sayıları için $2^k - 1$ sayılarını teker teker hesaplayalım. Bakalım hangileri asal ve bu k sayıları hangi $2^{k-1}(2^k - 1)$ mükemmel sayıyı veriyor?

k	$2^k - 1$	asal?	$2^{k-1}(2^k - 1)$
1	1	değil	
2	3	asal	6
3	7	asal	28
4	15	değil	
5	31	asal	16×31 = 496
6	63	değil	
7	127	asal	64×127 = 8128

Girişte verdiğimiz 4 mükemmel sayıyı bulduk. Bundan sonraki $k = 8, 9, 10$ değerleri için $2^k - 1$ sayısı asal çıkmaz, çünkü:

Önsav 2. *Eğer k asal değilse* $2^k - 1$ *asal olamaz.*

Kanıt: $a > 1$ ve $b > 1$ için $k = ab$ yazalım. k asal olmadığından bu özellikte a ve b sayıları vardır.

$x = 2^a$ olsun ve küçük bir hesap yapalım:

$$2^k - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = x^b - 1.$$

Ama $x^b - 1$ biçiminde yazılan sayılar $x - 1$'e bölünürler:

$$x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \cdots + x + 1).$$

Demek ki $2^k - 1$, $x - 1$'e bölünür ve asal olamaz. Kanıtımız bitmiştir. □

Dolayısıyla, $2^k - 1$'in asal olması için k'nın asal olması gerekmektedir. Asal bir k için $2^k - 1$ biçiminde yazılan asal sayılara ***Mersenne asalları*** denir. Peki, k asalsa,

$$M_k = 2^k - 1$$

olarak tanımlanan sayı da asal mıdır? İlk Mersenne sayılarına yukarda bakmıştık:

$$M_2 = 3,$$
$$M_3 = 7,$$
$$M_5 = 31,$$
$$M_7 = 127.$$

Bunların her biri asal. Ama bundan sonraki ilk Mersenne sayısı olan M_{11} asal değildir:

$$M_{11} = 23 \times 89.$$

Hangi k asalları için M_k asaldır? Yanıt bilinmiyor. Hatta Mersenne asallarının sonlu mu sonsuz mu olduğu bile bilinmiyor. Mükemmel sayıların da sayısı bilinmiyor.

Euler, 1772'de, birlikte büyüdükleri arkadaşı Daniel Bernoulli'ye $M_{31} = 2^{31} - 1$ sayısının asal olduğunu gösterdiğini yazar. Nitekim öyledir de. Böylece, Teorem 1'e göre yeni bir mükemmel sayı daha elde ederiz:

$$2^{30}(2^{31} - 1) = 2.305.843.008.139.952.128.$$

Euler zamanında M_{31}'ten daha büyük bir Mersenne asalını kimsenin bulamayacağı sanılırdı. Doğal olarak... Her ne kadar mekanik hesap makinaları bazı ortamlarda ortalarda dolaşsa da, elektronik aygıtlardan ve bu tür aygıtların olasılığından bihaberdir insanoğlu. 1998'de $M_{3.021.377}$ sayısının asal olduğu anlaşılmıştır. O gün bu gün, daha birçok Mersenne asalı keşfedilmiştir. Konumuz bu değil ama. Bu konuyu kapatıp Teorem 1'i kanıtlayalım.

Teorem 1'in Kanıtı: $N = 2^{k-1}(2^k - 1)$ olsun. $2^k - 1$ asalı yerine p yazalım. Demek ki $N = 2^{k-1}p$. N'nin tüm bölenlerini bulmak kolay:

$$1, 2, 2^2, ..., 2^{k-2}, 2^{k-1}$$

ve bunların p ile çarpımları:

$$p, 2p, ..., 2^{k-2}p, 2^{k-1}p.$$

N'ye eşit olan en sonuncusu dışında N'nin bu bölenlerini toplayalım:

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} + p + 2p + \cdots + 2^{k-2}p\\ = (1 + 2 + \cdots + 2^{k-1}) + p(1 + 2 + \cdots + 2^{k-2})\\ = (2^k - 1) + p(2^{k-1} - 1) = p + p(2^{k-1} - 1)\\ = p2^{k-1} = N.\end{aligned}$$

□

Öklid'in teoreminin verdiği mükemmel sayıların hepsi çifttir. Bugüne kadar kimse tek sayı olan bir mükemmel sayı bulamamıştır, ki 10^{300}'e kadar olan tüm tek sayılar teker teker denenmiştir. Euler bir makalesinde tek bir mükemmel sayının varlığının (ya da yokluğunun) çok zor bir soru olduğunu söylemiştir. Euler bir soru için zor demişse o soru mutlaka çok çok zordur.

17'nci yüzyılın ortalarına kadar mükemmel asallar hakkında Öklid'in yaptığından fazlası bilinmiyordu. Descartes (1596-1650), 15 Kasım 1638'de Mersenne'e yazdığı bir mektupta her çift mükemmel sayının aynen Öklid'in teoreminde söylediği gibi olduğunu yazar. Descartes bunu kanıtlamış mıdır, yoksa sadece bir kanısını mı dile getirmektedir, herhalde hiç bilemeyeceğiz.

Descartes'ın söylediği doğruydu ama. Her çift mükemmel sayı, aynen Öklid'in teoremindeki gibidir. Euler kanıtlamıştır bunu. Birazdan Euler'in kanıtını vereceğiz.

Euler, konu üzerinde düşünürken ***dost sayıları*** tanımlamıştır. Birinin diğerinin kendinden küçük bölenlerinin toplamı olduğu sayılara ***dost sayılar*** denir. Dost sayılar da oldukça enderdir. İlk dost sayılar 220 ve 294'tür: 220'nin 220'den küçük bölenleri 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 ve 110'dur ve bunların toplamı 284'tür. Öte yandan 284'ün kendinden küçük bölenleri, 1, 2, 4, 71, 142'dir ve toplamları 220'dir. Mükemmel sayılar aslında kendi kendisiyle dost olan sayılardır.

Euler, konuyu çalışırken $\sigma(n)$ diye bir fonksiyon tanımlamıştır. $\sigma(n)$, n'nin tüm bölenlerinin toplamıdır. Örneğin,

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12,$$

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

dir. Bir sayının mükemmel olması için, yeter ve gerek koşul $\sigma(n) = 2n$ eşitliğidir. Kolayca görüleceği üzere, m ve n sayılarının dost olması için yeter ve gerek koşul,

$$\sigma(n) = m + n = \sigma(m)$$

eşitliğidir. Bir n sayısının asal olması için yeter ve gerek koşul da $\sigma(n) = 1 + n$ eşitliğidir.

Eğer p bir asalsa,

$$\sigma(p^k) = 1 + p + \cdots + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

dir. Ayrıca eğer n ve m aralarında asalsa,

$$\begin{aligned}\sigma(nm) &= \sum\nolimits_{d|nm} d = \sum\nolimits_{e|n, f|m} ef\\ &= \left(\sum\nolimits_{e|n} e\right)\left(\sum\nolimits_{f|m} f\right) = \sigma(n)\sigma(m)\end{aligned}$$

olur. Böylece, eğer bir sayıyı asallarına ayırabilirsek, o sayının σ'sını da bulabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}\sigma(144) &= \sigma(2^4 \cdot 3^2) = \sigma(2^4)\sigma(3^2)\\ &= \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 32 \times \frac{26}{2} = 416.\end{aligned}$$

Şimdi Euler'in teoremine gelelim:

Teorem 3. [Euler] *Eğer N çift bir mükemmel sayıysa, o zaman, bir k için, $2^k - 1$ asal olur ve*

$$N = 2^{k-1}(2^k - 1)$$

olur.

Kanıt: N çift ve mükemmel olsun. Tek bir b sayısı için N'yi $N = 2^{k-1}b$ olarak yazalım. N çift olduğundan $k > 1$ olmalıdır. N mükemmel olduğundan,

$$\sigma(N) = 2N = 2(2^{k-1}b) = 2^k b$$

olur. Öte yandan 2^{k-1} ve b aralarında asal olduğundan,

$$\sigma(N) = \sigma(2^{k-1}b) = \sigma(2^{k-1})\sigma(b) = (2^k - 1)\sigma(b)$$

olur. Bu ikisini eşitlersek

$$2^k b = (2^k - 1)\sigma(b)$$

buluruz. Demek ki 2^k, $\sigma(b)$'yi böler. Bu sayıya c diyelim:

$$\sigma(b) = c2^k. \tag{1}$$

Bundan da

$$b = c(2^k - 1) \tag{2}$$

çıkar.

Önümüzde iki şık var: Ya $c = 1$ ya da $c > 1$.

Birinci Şık: $c > 1$ ise.

(2)'den dolayı, 1, c, b ve $2^k - 1$ sayıları b'nin bölenleridir. Ayrıca bunların birbirinden farklı olduklarını iddia ediyoruz. Olası tek eşitlik c ile $2^k - 1$ sayıları arasında olabilir. (Diğerlerinin birbirine eşit olamayacakları çok belli.) Diyelim $c = 2^k - 1$. O zaman,

$$b = c(2^k - 1) = c^2$$

olur ve 1, c ve c^2 sayıları b'nin birbirinden değişik bölenleridir. Demek ki,

$$\sigma(b) \geq 1 + c + c^2.$$

Öte yandan,

$$\sigma(b) = c2^k = c[(2^k - 1) + 1] = c(c + 1).$$

Bu ikisi bir çelişki verir. Demek ki 1, c, b ve $2^k - 1$ sayıları b'nin birbirinden değişik bölenleridir. Dolayısıyla (1) ve (2)'yi kullanarak,

$$\begin{aligned} c2^k &= \sigma(b) \geq 1 + c + b + (2^k - 1) \\ &= c + b + 2^k = c + c(2^k - 1) + 2^k \\ &= c2^k + 2^k = 2^k(c + 1) > 2^k c \end{aligned}$$

elde ederiz, ki bu da bir çelişkidir.

İkinci Şık: $c = 1$ ise.

O zaman, (1) ve (2)'yi

$$\sigma(b) = 2^k. \quad (1)$$

$$b = 2^k - 1 \quad (2)$$

denklemlerine dönüşür. Bu da istediğimizin yarısını verir: $N = 2^{k-1}b = 2^{k-1}(2^k - 1)$. Sadece $2^k - 1$ sayısının bir asal olduğunu kanıtlamak kaldı:

$$\sigma(b) = 2^k = (2^k - 1) + 1 = b + 1,$$

yani $\sigma(b) = b + 1$, ki bu da b asal demektir, yani,

$$b = 2^k - 1$$

asaldır. □

Her ne kadar bugüne kadar tek olan bir mükemmel sayı bulunamamışsa da, muhtemel tek mükemmel sayıların bazı özellikleri biliniyor. Örneğin:

Teorem 4. [Sylvester, 1888] *Tek sayı olan bir mükemmel sayı en az üç değişik asala bölünmelidir.*

Kanıt: N, tek bir mükemmel sayı olsun. Demek ki $\sigma(N) = 2N$. Önce N'nin sadece bir tek asal sayıya bölünemeyeceğini kanıtlayalım. Aksini varsayalım: Bir p asalı için $N = p^k$ olsun. O zaman,

$$2p^k = 2N = \sigma(N) = \sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

olur. Paydaları eşitleyerek,

$$2p^k(p - 1) = p^{k+1} - 1$$

buluruz. Sadeleştirirsek de,

$$p^k(2 - p) = 1$$

buluruz. Buradan $p^k = 1$ çıkar ki bu bir çelişkidir.

Şimdi de N'nin sadece p ve q asallarına bölündüğünü varsayalım. $N = p^r q^s$ olsun. $p < q$ varsayımını yapalım. N tek olduğundan, $3 \leq p$ ve $5 \leq q$ olmalı. Hesaplayalım:

$$2N = \sigma(N) = \sigma(p^r q^s) = \sigma(p^r)\sigma(q^s),$$

yani,

$$2N = (1 + p + p^2 + \cdots + p^r)(1 + q + q^2 + \cdots + q^s).$$

Her iki tarafı da N'ye bölersek,

$$\begin{aligned} 2 &= \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^r}\right)\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots + \frac{1}{q^s}\right) \\ &= \frac{1 - 1/p^{r+1}}{1 - 1/p} \times \frac{1 - 1/q^{r+1}}{1 - 1/q} \leq \frac{1}{1 - 1/p} \times \frac{1}{1 - 1/q} \\ &\leq \frac{1}{1 - 1/3} \times \frac{1}{1 - 1/5} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Çelişki. □

Bugün bu teoremden çok daha fazlası biliniyor. Tek olan bir mükemmel sayının en az 8 asal böleni olmalıdır. Ayrıca böyle bir sayının 105'e bölünemeyeceği ve ikinci en büyük asal çarpanının 1000'den büyük olması gerektiği biliniyor. ♠

Kaynakça

William Dunham, **Euler, The Master of Us All**, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions, No. 22, 1999.