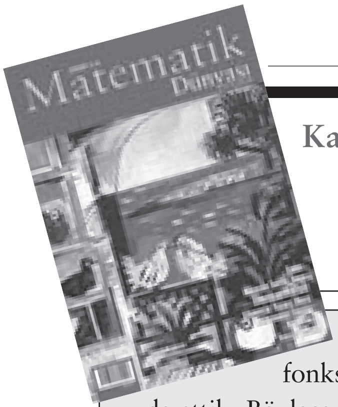


Kapak Konusu: Topoloji

Topolojik Uzay

Geçen yazıda ℝ'nin, adına "açık" dediğimiz bazı altkümelerini tanımladık ve bir fonksiyonun sürekliliğini tamamen açık kümeler yardımıyla (hiç ε ve δ kullanmadan) ifade ettik. Böylece bir fonksiyonun sürekliliğini kümeler kuramı seviyesine indirdik. Aynı şeyi bugüne kadar analizde tanımladığımız hemen hemen her kavram için yapabiliriz. Böylece analitik kavramları fiziksel dünya olarak niteleyebileceğimiz ℝ'den kurtarıp, bu kavramları çok daha soyut ve genel bir evrene genelleştirebiliriz. Her ne kadar yapacaklarımız uç seviyede soyutsa da, kanıtları kolaylaştırdığından ve daha genel olduklarından çok daha fazla uygulamaya izin verir. Güzelliği de cabası.

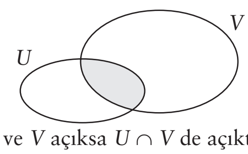
Geçen yazıda, ℝ'nin bir X altkümesi için, X'in "açık altküme"lerini bir biçimde tanımlamış ve o yazının Önsav 6'sında bu açık altkümelerin şu özellikleri sağladıklarını kanıtlamıştık:

X1. *$\varnothing$ ve X kümeleri açıktır.*

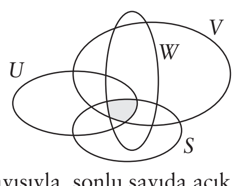
X2. *İki açık kümenin kesişimi açıktır.*

X3. *Açık kümelerin bileşimi açıktır.*

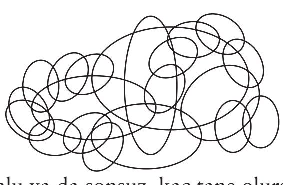
Şimdi, herhangi bir X kümesi verilmiş olsun. X'in yukardaki gibi ℝ'nin altkümesi olması filan gerekmiyor, herhangi bir küme olabilir. (Topolojinin güzelliği de işte tam burada.) X'in bazı altkümelerine "açık" adını verelim ve açık dediğimiz bu altkümelerin yukardaki X1, X2, X3 özelliklerini sağladıklarını varsayalım. O zaman X üzerinde bir "***topoloji***" tanımlanmış olur. Eğer τ, elemanları, adına açık adını verdiğimiz kümelerden oluşan kümeyse, (X, τ) çiftine ***topolojik uzay*** denir.



U ve V açıksa $U \cap V$ de açıktır.



Dolayısıyla, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır.



Sonlu ya da sonsuz, kaç tane olursa olsun, açık kümelerin bileşimi hep açıktır.

Tanımı daha matematiksel verelim. X herhangi bir küme olsun. X'in altkümelerinin kümesini altı yıldan beri $\wp(X)$ ile simgelediğimizi anımsatalım.

$$\tau \subseteq \wp(X)$$

olsun. Yani τ (tau diye okunur), elemanları X'in bazı altkümeleri olan bir küme olsun. τ'nun şu özellikleri sağladığını varsayalım:

T1. $\varnothing, X \in \tau$.

T2. *Eğer $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$.*

T3. *Eğer her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.*

Çoğu zaman τ'nun ne olduğu konunun gelişinden bellidir; o zaman, (X, τ) çifti yerine sadece X'in kendisine ***topolojik uzay*** denir.

T1, T2 ve T3 koşullarıyla X1, X2, X3 koşulları eşdeğerdir elbette. Bir X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlamak demek, X'in açık kümelerini bir biçimde belirlemek demektir. Bu açık kümeler X1, X2, X3 özelliklerini sağlamalıdırlar.

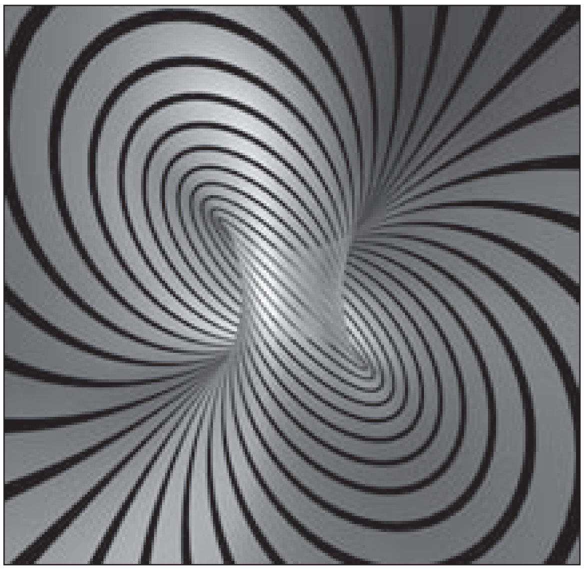
Bir önceki yazıda ℝ üzerinde tanımladığımız topolojiye ***Öklid topolojisi*** adı verilir. O topolojide, açık kümeler açık aralıkların bileşimi olarak tanımlanmıştı. ℝ üzerinde ya da herhangi bir X kümesi üzerinde çok farklı topolojiler tanımlayabiliriz. Yazının devamında birçok örnek sunacağız.

İki açık kümenin kesişimi açık olduğundan, sonlu sayıda açık kümenin kesişimi de açıktır. Bu, açık küme sayısı üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. Ama sonsuz sayıda açık kümenin kesişimi açık olmayabilir, örneğin, Öklid topolojisinde $\bigcap_{\varepsilon>0} (-\varepsilon, \varepsilon) = \{0\}$ olur.

Örnekler

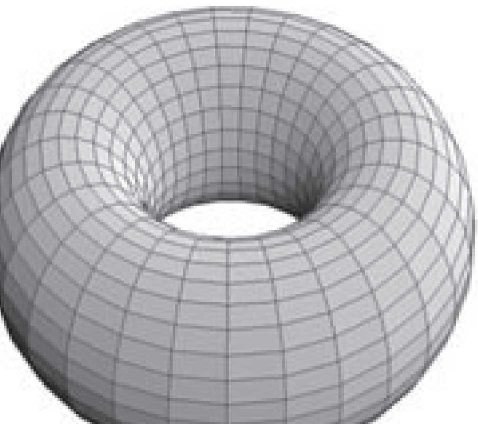
Aşağıdaki örneklerde X herhangi bir küme olabilir.

Örnek 1. X herhangi bir küme ve $\tau = \{\varnothing, X\}$ olsun. Bu, kolayca görüleceği üzere X üzerinde bir topolojidir. Pek fazla açık kümesi olmadığından, hatta T1'den dolayı olabilecek en az sayıda açık kümesi olan bu topolojiye ***en kaba topoloji*** (yani X'in en kaba topolojisi) adı verilir. Eğer X boşkümeyse ya da X'in bir tek elemanı varsa, o zaman X üzerinde bu topolojiden başka topoloji yoktur.



Bu yazıdaki tüm şekiller birer topolojik uzay örnekleridir.

Örnek 2. En kaba topolojiyle zıt konumda olan ve adına ***ayrık topoloji*** denen bir de en ince ya da en zengin topoloji vardır. Bu topolojide X'in her altkümesinin açık olduğuna hükmedilir, yani τ kümesi $\wp(X)$ kümesine eşittir. $\wp(X)$'in topolojinin tanımının T1, T2, T3 özelliklerini sağladığı çok belli.

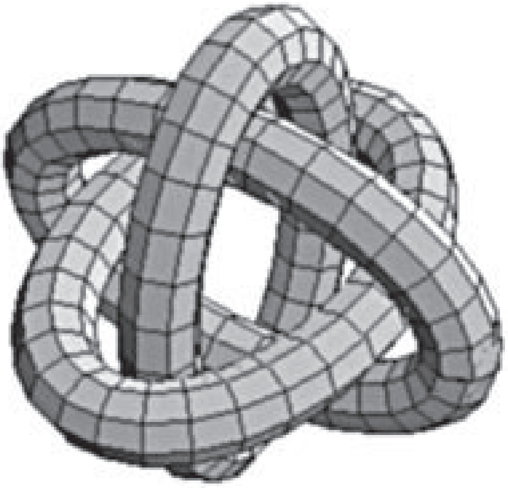


Örnek 3. X'in tümleyeni sonlu olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de ayrıca boşkümeye açık diyelim. O zaman X üzerinde bir topoloji tanımlamış oluruz. Eğer X sonluysa, bu topoloji aynen bir önceki paragrafta tanımlanan en ince topolojidir. Ama eğer X sonsuzsa (mesela $X = \mathbb{Z}$ ya da $\mathbb{R}$ ise), o zaman bambaşka ve oldukça ilginç bir topoloji elde ederiz. Bu topolojiye ***Fréchet topolojisi*** (freşe okunur) adı verilir.

Örnek 4. A, X'in herhangi bir altkümesi olsun.

$$\tau = \{\varnothing, A, X\}$$

olsun. Bu da X üzerinde topolojik bir yapı belirler. En fazla üç açık kümesi olduğundan, oldukça fakir bir topoloji olduğunu söyleyebiliriz. Bu topoloji, ayrıca A kümesinin açık olduğu en küçük topolojidir.



Örnek 5. A ve B, X'in herhangi iki altkümesi olsun.

$$\tau = \{\varnothing, A, B, A \cap B, A \cup B, X\}$$

olsun. Bu da X üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji A ve B kümelerinin açık olduğu en küçük topolojidir.

Örnek 6. A, B ve C, X'in herhangi üç altkümesi olsun. Bu altkümelerin açık olduğu en küçük topolojiyi bulalım. Biraz daha zorlanacağız. τ, tabii ki X'in

$$\varnothing, A, B, C \text{ ve } X$$

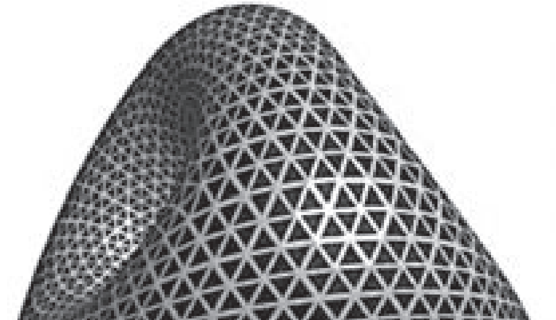
altkümelerini içermeli, yani bu kümeler tanımlayacağımız topolojide açık olmalı. Ama, topolojimiz, A, B, C altkümelerinin

$$A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$$

kesişimlerini de içermeli, çünkü ne de olsa sonlu sayıda açık kümenin kesişimi gene açık olmalı. Topolojimiz bu altkümeleri içerdiği gibi şimdiye kadar bulduğumuz açık kümelerin bileşimlerini de içermeli, yani,

$$A \cup B, B \cup C, C \cup A,$$
$$A \cup (B \cap C), B \cup (C \cap A), C \cup (A \cap B),$$
$$(A \cap B) \cup (B \cap C), (B \cap C) \cup (C \cap A),$$
$$(C \cap A) \cup (A \cap B),$$
$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

altkümelerini de içermeli. Yanlış saymadıysak toplam 19 küme etti. Bu kadarı yetiyor. Yukardaki 19 küme X üzerinde bir topoloji oluşturur. Bu topolojinin X'in A, B ve C altkümelerinin açık olduğu en küçük topoloji olduğu besbelli.



Örnek 7. A, X'in herhangi bir altkümesi olsun.

$$\tau = \{U \subseteq X : A \subseteq U\} \cup \{\varnothing\}$$

olsun. τ, X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojide, boşküme dışında, A ve A'yı içeren altkümeler açıktır, diğerleri değildir.

Örnek 8. $(X, \leq)$ bir sıralama olsun [MD-2005-IV, sayfa 19-29]. Yani $\leq$ ikili ilişkisi her $x, y, z \in X$ için, şu özellikleri sağlasın:

$$x \leq x,$$
$$x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y,$$
$$x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z,$$

Örneğin $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve sıralama bildiğimiz, ilkokuldan beri aşina olduğumuz sıralama olabilir, ya da X bir ordinal ya da kardinal olabilir.

$a, b \in X$ için,

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in X : a < x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$$

tanımlarını yapalım. (Burada $x < y$, "$x \leq y$ ve $x \neq y$ anlamına gelmektedir.) Bunlara ***açık aralık*** diyelim. Açık aralıkların bileşimi olarak yazılan kümelere de "açık küme" diyelim. Böylece X üzerinde bir topoloji tanımlanmış olur. Bu topolojiye $\leq$ tarafından üretilmiş ***sıralama topolojisi*** denir. $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisiyle bilinen sıralamasıyla üretilen sıralama topolojisi aynı topolojidirler.

Örnek 9. X herhangi bir küme olsun. (Ama X'i $\mathbb{R}$ gibi sayılamaz sonsuzlukta bir küme alırsak daha iyi ederiz, yoksa ilginç bir örnek elde etmeyiz.) X'in, tümleyeni sayılabilir sonsuzlukta olan altkümelerine açık adını verelim. Bir de tabii boşküme açık olsun. O zaman X üzerinde bir topoloji tanımlamış oluruz. Bu topolojide sayılabilir sonsuzluktaki açık kümenin kesişimi gene açıktır.

Daha yüzlerce topolojik uzay örneği vardır. Yukardaki örnekleri pek doğal bulmayan okur, şimdilik yazıdaki iştah açıcı topolojik uzay resimleriyle yetinsin! Biraz sabrederse yakın gelecekte bu yazıda verilenlerden çok daha doğal örneklerle karşılaşacaktır. Matematikçi olsun ya da olmasın herkes her gün çoğu zaman farkında bile olmadan topolojik uzaylarla muhattap olur. Sürekli nefes almanız küçük bir sorun teşkil etse de, siz dahil, varolan her şey aslında topolojik bir uzaydır.

Alıştırmalar

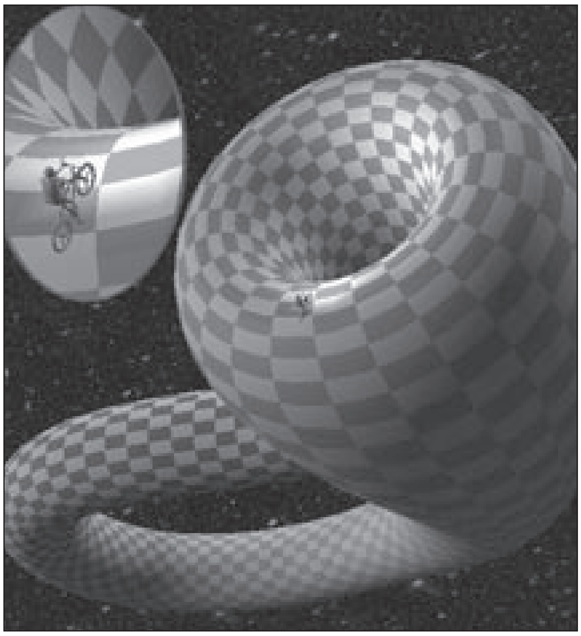
1. X bir küme olsun. X üzerinde bir topolojinin en ince topoloji olması için, X'in tek elemanlı altkümelerinin açık olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

2. $x \in \mathbb{R}$ olsun. $[x, \infty)$ aralığının $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde açık olmadığını kanıtlayın.

3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $X \subseteq Y$ olsun. $\tau \cup \{Y\}$ kümesinin Y üzerinde bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.

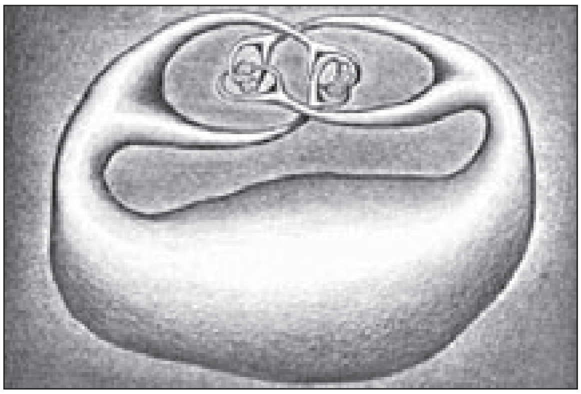
4. İki elemanlı bir küme üzerinde kaç değişik topoloji vardır? Aynı soruyu üç elemanlı bir küme için yanıtlamaya kalkışın.

5. $X = \mathbb{R}$ olsun. $a \in \mathbb{R}$ için (a, ∞) kümelerine "açık" diyelim. Bunun Öklid topolojisinden daha "kaba" bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.



6. $X = \mathbb{R}$ olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için $[a, b)$ aralıklarının birleşimi olarak yazılan kümelere "açık" diyelim. Bunun bir topoloji tanımladığını kanıtlayın. Öklid topolojisinde açık olan her kümenin bu topolojide de açık olduğunu kanıtlayın.

7. X topolojik bir uzay ve A, X'in herhangi bir altkümesi olsun. X üzerinde yeni bir topoloji tanımlayacağız. Bu yeni topolojide, boşküme dışında, eski topolojide açık olan bir U kümesi için $U \cup A$ biçiminde yazılan kümelere açık diyelim. Bunun gerçekten bir topoloji tanımladığını kanıtlayın.



8. X topolojik bir uzay ve Y herhangi bir küme olsun. f, X'ten Y'ye giden bir fonksiyon olsun. $V \subseteq Y$ için, eğer $f^{-1}(V)$, X'in açık bir altkümesiyse, V'ye açık diyelim. Böylece Y üzerinde bir topoloji tanımlandığını kanıtlayın.

9. $X = \{x, y, z, t, u\}$ ve $Y = \{a, b, c, d\}$ olsun.

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu şöyle tanımlansın:

$$f(x) = a,\ f(y) = b,\ f(z) = c,\ f(t) = b,\ f(u) = d.$$

Y'nin açık kümelerini

$$\emptyset,\ \{b, c\},\ \{a, b, c\},\ \{b, c, d\} \text{ ve } Y$$

olarak tanımlayalım. Bu, Y üzerinde bir topolojidir.

$$U = \{x, y, z\} \text{ ve } V = \{z, t, u\}$$

olsun. $f(U)$ ve $f(V)$'nin Y'nin açık kümeleri olduğunu ama $f(U \cap V)$'nin açık küme olmadığını gösterin. Demek ki bu örnekte "$f(U)$ açıksa U açıktır" tanımını yapmak X üzerinde bir topoloji vermiyor. (Bir önceki ve bir sonraki soruyla karşılaştırın.) Ama eğer f birebirse bu yöntem Y üzerinde bir topoloji verir; kanıtlayın.

10. X bir küme, Y bir topolojik uzay ve

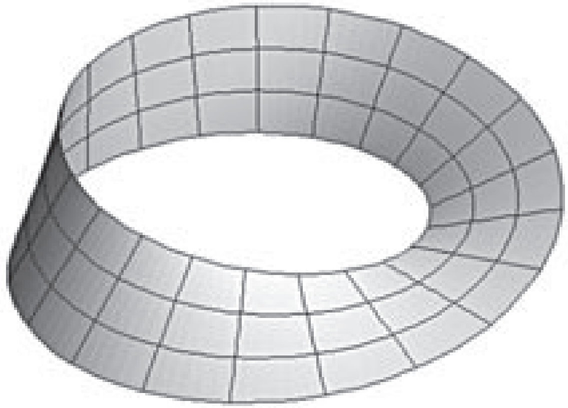
$$f : X \to Y$$

bir fonksiyon olsun. Bir $V \subseteq Y$ açık altkümesi için X'in $f^{-1}(V)$ biçiminde yazılan altkümelerine açık diyelim. Bu, X üzerinde bir topoloji tanımlar mı?

11. X bir küme olsun. τ_1 ve τ_2, X üzerinde iki topoloji olsun. $\tau_1 \cap \tau_2$'nin de X üzerinde bir topoloji olduğunu kanıtlayın. Aynı sonuç bileşim için yanlıştır elbet.

12. X üzerinde verilmiş bir topoloji ailesinin kesişiminin de X üzerinde bir topoloji olduğunu kanıtlayın.

13. $\mathbb{R}$ üzerinde yeni bir topoloji tanımlayacağız. Bu topolojinin açık kümeleri, Öklid topolojisinde açık olan bir U kümesi için, $U \cup -U$ biçiminde yazılan kümelerdir. Burada $-U = \{v : -v \in -U\}$ anlamına gelmektedir. Bu tanımın Öklid topolojisinden daha kaba bir topoloji verdiğini kanıtlayın. ♠



Altkümelerin İçi

X bir topolojik uzay ve A, X'in bir altkümesi olsun. A'nın X'in topolojisinde açık olan en az bir altkümesi vardır: $\emptyset$. Başkaları da olabilir. A'nın X'te açık olan tüm altkümelerinin bileşimini alalım. Bu bileşim elbette gene açıktır ve elbette gene A'nın bir altkümesidir, dolayısıyla A'nın en büyük açık altkümesidir. $A°$ olarak yazılan bu bileşime A'nın ***içi*** denir.

Örnekler: En kaba topolojide eğer $A \neq X$ ise, $A° = \emptyset$ olur. Ayrık topolojide hep $A° = A$ olur. Her X topolojik uzayında $X° = X$ ve $\emptyset° = \emptyset$ olur. $X = \mathbb{R}$ ise, A sonlu bir kümeyse, $A° = \emptyset$ olur. Ayrıca, $\mathbb{Z}° = \mathbb{Q}° = \emptyset$ ve

$$(0, 1]° = [0, 1)° = [0, 1]° = (0, 1)$$

olur.

Teorem. *X bir topolojik uzay ve A, X'in bir altkümesi olsun. A'nın (X'in topolojisinde) açık olan en büyük bir altkümesi vardır. Eğer bu altkümeyi $A°$ olarak yazarsak, şu özellikler sağlanır:*

i. $A° \subseteq A$.

ii. *$A°$ açıktır.*

iii. *Eğer $B \subseteq A$ açıksa, o zaman $B \subseteq A°$ olur.*

iv. *A'nın açık olması için, $A° = A$ eşitliği gerek ve yeter koşuldur. Dolayısıyla $A°° = A°$ olur.*

v. *Eğer $B \subseteq A$ ise $B° \subseteq A°$ olur.*

vi. $A° \cap B° = (A \cap B)°$.

vii. $\bigcup_{i\in I} A_i° \subseteq (\bigcup_{i\in I} A_i)°$.

Kanıt: $A° = \bigcup_{U\subseteq A \text{ ve } U \text{ açık}} U$ olsun. (i, ii, iii) çok bariz, $A°$'ın tanımından çıkıyor.

(iv) Eğer $A° = A$ ise, (ii)'den dolayı A açıktır. Eğer A açıksa, A'nın en büyük açık altkümesi ancak A olabilir, dolayısıyla $A° = A$ eşitliği doğru olmak zorundadır.

(v) $B° \subseteq B \subseteq A$ içindeliklerinden ve (ii)'den dolayı, $B°$, A'nın açık bir altkümesidir. (iii)'ten, daha doğrusu tanımdan dolayı da $B° \subseteq A°$ olur.

(vi) $A° \subseteq A$ ve $B° \subseteq B$ olduğundan, $A° \cap B° \subseteq A \cap B$ olur. Ama, iki açık kümenin kesişimi olduğundan $A° \cap B°$ açıktır. Demek ki

$$A° \cap B° \subseteq (A \cap B)°.$$

Ters içindeliği kanıtlayalım:

$$A \cap B \subseteq A \text{ ve } A \cap B \subseteq B$$

olduğundan, (v)'e göre

$$(A \cap B)° \subseteq A° \text{ ve } (A \cap B)° \subseteq B°$$

olur. Demek ki $(A \cap B)° \subseteq A° \cap B°$.

(vii) $\bigcup_{i\in I} A_i°$ kümesi, $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesinin açık bir altkümesidir, dolayısıyla iddia edilen içindelik doğrudur. □

(vii)'deki içindelik illa eşitlik olmayabilir. Örneğin $\mathbb{R}$'nin Öklid topolojisinde, $\bigcup_{i\in\mathbb{R}} \{i\}° = \emptyset$ ama $(\bigcup_{i\in\mathbb{R}} \{i\})° = \mathbb{R}° = \mathbb{R}$ olur.

Alıştırmalar

1. Fréchet topolojisinde her A altkümesi için $A° = A$ ya da $A° = \emptyset$ eşitliklerinden birinin doğru olduğunu kanıtlayın.

2. $B° \subseteq A \subseteq B$ ise $A° = B°$ eşitliğini kanıtlayın.