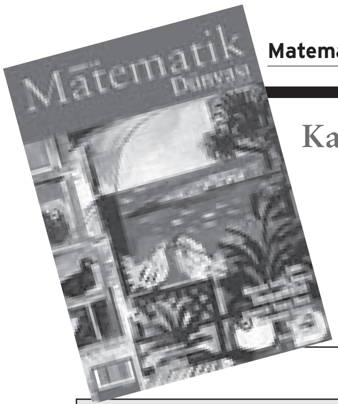






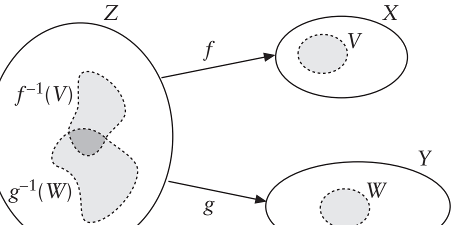

# Çarpım Topolojisi

Bu yazıda topolojik uzayların kartezyen çarpımını “doğal” bir topolojik uzay yapısıyla donatacağız. Eğer $X$ ve $Y$ topolojik uzaylarsa, $X \times Y$ üzerine en doğal topolojik yapı, herhalde, $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık altkümeleri için $U \times V$ türünden yazılan altkümelerinin ve bunların bileşimlerinin açık olduklarına hükmederek elde edilir. Nitekim, bu tanımla, $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine doğal ve işlevsel bir topolojik yapı tanımlanmış olur. Aynı düşünce sonsuz sayıda topolojik uzayın çarpımı için de düşünülebilir: $U_i \subseteq X_i$ açık kümeleri için, $\prod_{i \in I} X_i$ kartezyen çarpımının $\prod_{i \in I} U_i$ biçiminde yazılan altkümelerine ve bunların bileşimlerine açık dersek, kartezyen çarpım üstüne doğal bir topoloji tanımlamış oluruz; hatta daha doğalı olamaz diye bile düşünülebilir. Ama ne yazık ki eğer $I$ sonsuzsa, bu topoloji pek kullanışlı değildir, çok incedir, biraz fazla açık kümesi vardır. Bu yazıda, sonsuz kartezyen çarpım üzerine gene doğal ama yukardakinden daha kullanışlı (ve daha kaba) bir topoloji tanımlayacağız. Önce, çok daha basit olan iki topolojik uzayın kartezyen çarpımını irdeleyeceğiz, sonra sonsuz sayıda topolojik uzayın kartezyen çarpımına geçeceğiz.

**İki Fonksiyonu Aynı Anda Sürekli Kılmak.** $Z$ bir küme ve $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun.
$$f : Z \to X \text{ ve } g : Z \to Y$$
iki fonksiyon olsun. Bu sefer, $Z$ üzerinde hem $f$'yi hem de $g$'yi sürekli kılan en kaba topolojiyi bulmak istiyoruz.

$Z$'nin $f$'yi sürekli kılan en kaba topolojisini biliyoruz; $g$'yi sürekli yapan en kaba topolojisini de biliyoruz. İstediğimiz topoloji elbette bu iki topolojiyi içeren en küçük topoloji olmalı, yani bu iki topolojiyle üretilen topoloji olmalı.

$f$'yi sürekli yapan $Z$'nin en kaba topolojisinin açık kümeleri, $X$'in $V$ açık kümeleri için,
$$f^{-1}(V)$$
biçiminde yazılan kümelerdir. $g$'yi sürekli yapan $Z$'nin en kaba topolojisinin açık kümeleri de $Y$'nin $W$ açık kümeleri için,
$$g^{-1}(W)$$
biçiminde yazılan kümelerdir. Demek ki $Z$ üzerinde koymak istediğimiz topolojide, $X$'in $V$ açık kümeleri ve $Y$'nin $W$ açık kümeleri için,
$$f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$$
biçiminde yazılan kümeler açık olmalı.




**Önsav 1.** *Her şey yukardaki gibi olsun.* $\{f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W) : V \subseteq X,\ W \subseteq Y,\ V \text{ ve } W \text{ açık}\}$ *kümesinin $Z$ üzerinde ürettiği topoloji, $Z$'nin, $f$ ve $g$ fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojisidir. Ayrıca bu küme bu topolojinin bir tabanıdır.*

**Kanıt:** Kümeye $\alpha$, gerdiği topolojiye de $\tau$ adını verelim. $\alpha$'nın $\tau$'nun bir tabanı olacağı belli çünkü $\alpha$ kesişim altında kapalı (bkz. Sonuç 4, sayfa 43):
$$\begin{aligned}(f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)) &\cap (f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(W_1)) \\ &= f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V_1) \cap g^{-1}(W) \cap g^{-1}(W_1) \\ &= f^{-1}(V \cap V_1) \cap g^{-1}(W \cap W_1).\end{aligned}$$

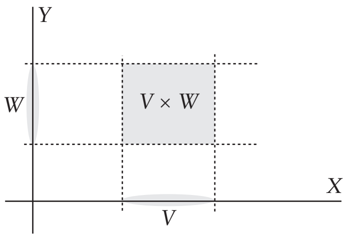
$f^{-1}(V) \cap g^{-1}(W)$ ifadesinde $W = Y$ alırsak, sadece $f^{-1}(V)$ kalır. Gene aynı ifadede bu sefer $V = X$ alırsak, sadece $g^{-1}(W)$ kalır. Demek ki $f$ ve $g$'yi sürekli kılan en kaba topolojilerin açık kümeleri $\alpha$'da. Bundan da $\tau$'nun, hem $f$ hem de $g$ fonksiyonlarını sürekli kıldığı ortaya çıkar. Öte yandan $f$ ve $g$'yi sürekli kılan her topolojinin $\alpha$'yı içerdiğini Önsav'ı yazmadan önce gördük: Bu topoloji hem $f^{-1}(V)$ kümesini hem de $g^{-1}(W)$ kümesini de içerdiğinden, bu iki kümenin kesişimini de içerir. Önsav kanıtlanmıştır. □

**Çarpım Topolojisi.** Yukardaki sonucu özel bir duruma uygulayalım. $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun. Daha önceki yazılıma uyup $Z = X \times Y$ tanımını yapalım.

$\pi_1$, $X \times Y$'den $X$'e giden ve
$$\pi_1(x, y) = x$$
kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. (Buna ***birinci izdüşüm fonksiyonu*** denir.)

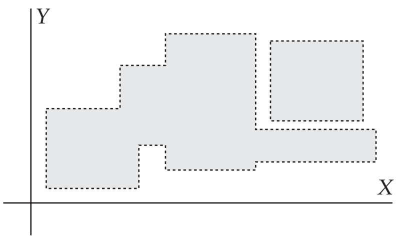
$\pi_2$, $X \times Y$'den $Y$'e giden ve
$$\pi_2(x, y) = y$$
kuralıyla tanımlanmış fonksiyon olsun. (Buna da ***ikinci izdüşüm fonksiyonu*** denir.)

$X \times Y$ kartezyen çarpımını, $\pi_1$ ve $\pi_2$ fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topolojiyle donatalım. Bu topoloji, yukarda gördüğümüz gibi, $X$'in bir $V$ açık altkümesi ve $Y$'nin bir $W$ açık altkümesi için,
$$\pi_1^{-1}(V) \cap \pi_2^{-1}(W)$$
kümeleri tarafından gerilmiştir ve bu kümeler gerdikleri topolojinin bir tabanını oluştururlar. Gerilen topolojiyi daha iyi anlamak için, tabanı oluştu-



Çarpım topolojisini üreten kümeler

ran kümelerin neye benzediklerini görelim:
$$\pi_1^{-1}(V) \cap \pi_2^{-1}(W)$$
$$= \{(x, y) \in X \times Y : \pi_1(x, y) \in V, \pi_2(x, y) \in W\}$$
$$= \{(x, y) \in X \times Y : x \in V, y \in W\} = V \times W.$$
Bunu bir teorem olarak yazalım.



Çarpım topolojisinin tipik bir açık kümesi: "Açık dikdörtgen"lerin bileşimi (dikdörtgenlerden sonsuz tane olabilir)

**Teorem 2.** *$X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun. $X \times Y$ üzerinde birinci ve ikinci izdüşüm fonksiyonlarını sürekli kılan en kaba topoloji*
$$\{V \times W : V \subseteq X,\ W \subseteq Y,\ V,\ W \text{ açık}\}$$
*kümesiyle üretilen topolojidir. Bu küme topolojinin bir tabanıdır.*

Bu topolojiye ***çarpım topolojisi*** ya da ***Tychnoff topolojisi*** adı verilir. Eğer $X$ ve $Y$ iki topolojik uzaysa, ve $X \times Y$ kartezyen çarpımından herhangi bir açıklama yapılmaksızın topolojik uzay olarak bahsediliyorsa, bilin ki çarpım topolojisi alınmıştır.

Pek sık yapılan bir yanlışa karşı okuru uyaralım, çarpım topolojisinin bir açık kümesi illa $V \times W$ biçiminde yazılmayabilir, ama kesinlikle bu tür kümelerin sonlu ya da sonsuz birleşimidir.

**Sürekli Fonksiyonlar.** Bir $A$ topolojik uzayından $X \times Y$'ye giden bir fonksiyonun ne zaman sürekli olduğunu anlamak kolaydır. Bu paragrafta bu konuyu ele alacağız.

$A$, $X$ ve $Y$ şimdilik üç küme olsun.
$$f : A \to X \times Y$$
bir fonksiyon olsun. O zaman her $a \in A$ için, $f(a)$ değeri, biri $X$'ten biri $Y$'den olmak üzere, iki koordinat tarafından verilmiştir. Birinci koordinata $f_1(a)$, ikinci koordinata $f_2(a)$ diyelim. Demek ki,
$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$
Buradaki $f_1$ ve $f_2$, $A$'dan, sırasıyla, $X$'e ve $Y$'ye giden fonksiyonlardır. Elbette
$$f_1 = \pi_1 \circ f \text{ ve } f_2 = \pi_2 \circ f$$
eşitlikleri geçerlidir. Bunun tersi de doğrudur: Eğer $f_1$ ve $f_2$, $A$'dan $X$'e ve $Y$'ye giden fonksiyonlarsa o zaman
$$f(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$
kuralı bize $A$'dan $X \times Y$ kartezyen çarpımına giden bir fonksiyon verir. Bu fonksiyonu $f_1 \times f_2$ olarak gösterelim:
$$(f_1 \times f_2)(a) = (f_1(a), f_2(a)).$$

Sonuç olarak, Fonk$(A, X \times Y)$ kümesiyle Fonk$(A, X) \times$ Fonk$(A, Y)$ kümesi arasında
$$f \mapsto (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$$
formülüyle verilmiş (doğal) bir eşleme vardır. Bu eşlemenin tersi,
$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \times f_2$$
kuralıyla verilmiştir. $f_1 \times f_2$ fonksiyonu daha ziyade $(f_1, f_2)$ olarak yazılır.

Eğer $S$ ve $T$ birer topolojik uzaysa, $C(S, T)$, $S$'den $T$'ye giden sürekli fonksiyonlar kümesini simgelesin. O zaman, Fonk$(A, X \times Y)$ kümesiyle Fonk$(A, X) \times$ Fonk$(A, Y)$ kümesi arasında yukarda verdiğimiz eşlemeler, $C(A, X \times Y)$ kümesiyle $C(A, X) \times C(A, Y)$ kümesi arasında eşlemelere yol açarlar:

**Teorem 3.** *A, X ve Y topolojik uzaylar olsun.*
$$f : A \to X \times Y$$
*bir fonksiyon olsun. O zaman f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul,*
$$f_1 = \pi_1 \circ f \text{ ve } f_2 = \pi_2 \circ f$$
*fonksiyonlarının sürekli olmalarıdır.*

**Kanıt:** Eğer $f$ sürekliyse, izdüşüm fonksiyonları (çarpım topolojisinin tanımından dolayı!) sürekli olduklarından $f_1 = \pi_1 \circ f$ ve $f_2 = \pi_2 \circ f$ fonksiyonları süreklidir. Şimdi
$$f_1 : A \to X \text{ ve } f_2 : A \to Y$$
fonksiyonlarının sürekli olduklarını varsayıp,
$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$
formülüyle tanımlanmış
$$f : A \to X \times Y$$
fonksiyonunun sürekli olduğunu kanıtlamak yeterli. Bunun için de $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ açık kümeleri için,
$$f^{-1}(U \times V)$$
kümesinin $A$'da açık olduğunu kanıtlamak yeterli.
$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{a \in A : f(a) \in U \times V\} \\ &= \{a \in A : (f_1(a), f_2(a)) \in U \times V\} \\ &= \{a \in A : f_1(a) \in U \text{ ve } f_2(a) \in V\} \\ &= \{a \in A : a \in f_1^{-1}(U) \text{ ve } a \in f_2^{-1}(V)\} \\ &= f^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V), \end{aligned}$$
ve bu da, iki açık kümenin kesişimi olduğundan $A$'da açıktır. □

**Alıştırmalar.**

Aşağıdaki alıştırmalarda $X$ ve $Y$ iki topolojik uzaydır ve $X \times Y$ üzerinde hep çarpım topolojisi alınmıştır.

**1.** $X \times Y$'nin topolojisinin ayrık olması için $X$ ve $Y$'nin topolojilerinin ayrık olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

**2.** $X \times Y$'nin topolojisinin en kaba topoloji olması için $X$ ve $Y$'nin topolojilerinin en kaba topoloji olmasının gerek ve yeter olduğunu kanıtlayın.

**3.** $\pi_1$ ve $\pi_2$ izdüşüm fonksiyonlarının $X \times Y$ kartezyen çarpımının açık kümelerini sırasıyla $X$'in ve $Y$'nin açık kümelerine götürdüğünü kanıtlayın. (Açık kümeleri açık kümelere götüren fonksiyonlar enderdir. Bunlara ***açık fonksiyonlar*** denir.)

**4.** $y \in Y$ olsun.
$$g(x) = (x, y)$$
kuralıyla tanımlanmış
$$g : X \to X \times \{y\}$$
eşlemesinin $X$ ile $X \times \{y\}$ topolojik uzayları arasında bir homeomorfizma (yani hem $g$ hem de $g^{-1}$'in sürekli) olduğunu kanıtlayın. (Burada, $X \times \{y\}$'nin topolojisi, $X \times Y$'nin çarpım topolojisinden indirgenmiş topolojidir elbette!)

**5.** $X \times Y$'nin Hausdorff olması için hem $X$'in hem de $Y$'nin Hausdorff olmasının gerek ve yeter olduğunu gösterin.

**6.** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun. $A$ ve $B$ sırasıyla $X$ ve $Y$'nin altuzayları olsun. $A \times B$'yi iki değişik topolojiyle görebiliriz: $A$ ve $B$'nin çarpım topolojisiyle ve $X \times Y$'den indirgenmiş topolojiyle. Bu iki topolojinin aynı topolojiler olduğunu kanıtlayın.

Eğer $X$ ve $Y$'nin öntabanları ya da tabanları verilmişse, $X \times Y$'nin de tabanını ya da öntabanını bulmak mümkündür:

**Önsav 4.** *X ve Y iki topolojik uzay olsun.* $\alpha$ *ve* $\beta$*'nın sırasıyla X ve Y'nin öntabanları (ya da tabanları) olduklarını varsayalım. O zaman*
$$\{A \times B : A \in \alpha, B \in \beta\}$$
*kümesi* $X \times Y$*'nin bir öntabanıdır (ya da tabanıdır).*

**Kanıt:** Öntaban için kanıtlayalım. $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ iki açık küme olsun. O zaman, $V$,
$$A_1, A_2, ..., A_n \in \alpha$$
olmak üzere,
$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$
biçiminde yazılan kümelerin bileşimidir. Yazılımda tasarruf sağlamak amacıyla,
$$V = \bigcup (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$
yazalım. Aynı şekilde,
$$W = \bigcup (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_m)$$
yazalım. Eğer $m$ ve $n$ eşit değilse, $A_n$ ya da $B_m$'yi yeterince tekrar ederek $n = m$ varsayımını yapabiliriz. O zaman
$$\begin{aligned} V \times W &= \left(\bigcup (A_1 \cap ... \cap A_n)\right) \times \left(\bigcup (B_1 \cap ... \cap B_n)\right) \\ &= \bigcup ((A_1 \cap ... \cap A_n) \times (B_1 \cap ... \cap B_n)) \\ &= \bigcup ((A_1 \times B_1) \cap ... \cap (A_n \times B_n)) \end{aligned}$$
olur ve bu da istediğimizi kanıtlar. □

$\mathbb{R}^2$ **Üzerinde Öklid Topolojisi.** Önemli bir örnek verelim: $X = Y = \mathbb{R}$ olsun (elbette Öklid topolojileriyle donatılmış olarak).Teorem 7'ye göre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$'nin çarpım topolojisi
$$(a, b) \times (c, d)$$
dikdörtgenleri tarafından gerilmiştir, ki bu da Öklid topolojisini verir.

İki topolojik uzayın çarpımı alınabildiğine göre, üç ya da sonlu sayıda topolojik uzayın da çarpımı alınabilir. Ama bir şeye dikkat etmek lazım: Böyle bir tanıma girişmeden önce, örneğin, $(X \times Y) \times Z$ topolojik uzayıyla $X \times (Y \times Z)$ topolojik uzaylarının homeomorfik olduklarını göstermek gerekir, yoksa tanım muğlak olur. Telaşa mahal yok, gerçekten de öyledir. Ama bir sonraki bölümde çok daha genel bir şey yapacağımızdan bunun ayrıntılarına girmiyoruz ve kanıtı okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

**Alıştırmalar**

**7.** $X$, $Y$ ve $Z$ üç topolojik uzay olsun.
$$(X \times Y) \times Z$$
topolojik uzayıyla
$$X \times (Y \times Z)$$
topolojik uzayları arasında hem kendi hem de tersi sürekli olan bir eşleme olduğunu, yani uzayların homeomorfik olduklarını gösterin.

**8.** $s(x, y) = x + y$ kuralıyla tanımlanmış
$$s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
fonksiyonuyla, $\boldsymbol{m}(x, y) = xy$ kuralıyla tanımlanmış
$$m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
fonksiyonunun sürekli olduklarını kanıtlayın. Bu fonksiyonlar açık mıdırlar (bkz. alıştırma 3)?

**9.** $X$ ve $Y$ iki topolojik uzay olsun. $A$ ve $B$ sırasıyla $X$ ve $Y$'nin altkümeleri olsun.
$$A° \times B° = (A \times B)°$$
eşitliğini kanıtlayın.

**Birçok Fonksiyonu Aynı Anda Sürekli Kılmak ve Çarpım Topolojisi.** $X$ bir küme, $(X_i)_{i\in I}$ bir topolojik uzay ailesi ve
$$(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$$
bir fonksiyon ailesi olsun. $X$ üzerinde $f_i$ fonksiyonlarının her birini sürekli kılan en kaba topoloji - elbette,
$$\{f_i^{-1}(U) : i \in I,\ U \subseteq X_i,\ U \text{ açık}\}$$
kümesiyle üretilen topolojidir. Bu küme bu topolojinin bir öntabanıdır ama illa bir tabanı olmayabilir. Topolojinin bir tabanını bulmak için, bu öntabanın kümelerinin sonlu kesişimlerini almak gerekir: Her $n \in \mathbb{N}$, her $i_1, ..., i_n \in I$, her $j = 1, ..., n$ ve $X_{i_j}$'nin her $U_{i_j}$ açık altkümesi için, $X$'in
$$f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap f_{i_2}^{-1}(U_{i_2}) \cap ... \cap f_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$
biçiminde yazılan altkümelerinden oluşan küme, bu topolojinin bir tabanıdır.

Bu dediklerimizi,
$$X = \prod_{i\in I} X_i$$
kartezyen çarpımına ve
$$\pi_i : X \to X_i$$
izdüşüm fonksiyonlarına uygulayalım. $\pi_i$ izdüşüm fonksiyonlarının,
$$\pi_i((x_i)_{i\in I}) = x_i$$
olarak tanımlandığını anımsatalım. Yukarda açıklanan yöntemle elde edilen topolojiye ***çarpım topolojisi*** ya da ***Tychonoff topolojisi*** denir. Önemli ve belki ilk bakışta kavranması güç bir tanım olduğundan, bu topolojinin tabanını daha açık bir biçimde gösterelim.
$$\pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : x_{i_j} \in U_{i_j}\}$$
olduğundan, çarpım topolojisinin tabanı, her $n \in \mathbb{N}$, her $i_1, ..., i_n \in I$ ve $X_{i_j}$'nin her $U_{i_j}$ açık altkümesi için, $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımının
$$\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : \text{her } 1 \le j \le n \text{ için } x_{i_j} \in U_{i_j}\}$$
türünden yazılan altkümelerinden oluşur. Bunlar da aynen $\prod_{i\in I} X_i$ kümesinin her $j = 1, 2, ..., n$ için $i_j$'inci koordinatı $U_{i_j}$'de olan altkümeleridir. Daha sade ve şık bir gösterimle, $\prod_{i\in I} X_i$ uzayının tabanı, sadece sonlu tane $i \in I$ için $U_i \neq X_i$ olduğu,

## Kartezyen Çarpım

Bir $(X_i)_{i\in I}$ küme ailesi verilmiş olsun. (Bir ***küme ailesi*** aslında sadece bir fonksiyondur; $(X_i)_{i\in I}$ küme ailesi de, tanım kümesi $I$ olan ve her $i \in I$ elemanında $X_i$ değerini alan bir fonksiyondur.)

$\prod_{i\in I} X_i$ ***kartezyen çarpımının*** matematiksel tanımı şöyledir:
$$\{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i : \text{her } i \in I \text{ için } x(i) \in X_i\}.$$
Eğer $x \in \prod_{i\in I} X_i$ ise, $x(i)$ yerine $x_i$ yazılır ve $x_i$'ye $x$'in $i$'inci ***koordinatı*** adı verilir. $x$ fonksiyonu aldığı değerler tarafından belirlendiğinden, çoğu zaman $x$ yerine $(x_i)_{i\in I}$ yazılır.

Eğer her $i \in I$ için $X_i$ kümesi boş değilse, $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımı da boşküme olmaz. Ama bunu kanıtlamak için Seçim Beliti'ne ihtiyaç vardır: Eğer $x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ fonksiyonu $(X_i)_{i\in I}$ ailesinin bir seçim fonksiyonuysa, yani her $i \in I$ için $x(i) \in X_i$ oluyorsa, o zaman $(x(i))_{i\in I}$, $\prod_{i\in I} X_i$ kartezyen çarpımının bir elemanıdır.

**Alıştırma.** $(X_i)_{i\in I}$ bir küme ailesi ve $A$ sayılabilir bir küme olsun. Her $i \in I$ için, $A \cap X_i \neq \emptyset$ varsayımını yapalım. O zaman Seçim Beliti'ni kullanmadan $\prod_{i\in I} X_i$ kümesinin boş olmadığını kanıtlayın.

$X_i$'nin $U_i$ açık altkümeleri için,

$$\prod_{i\in I} U_i$$

biçiminde yazılan altkümelerden oluşur.

Örneğin, $I = \mathbb{N}$ ve her $i \in I$ için, $X_i = \mathbb{R}$ ise,

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

kümesinin

$$(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$
$$\mathbb{R} \times (0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$
$$(0, 1) \times (0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$$

altkümeleri tabanın birer elemanıdır ve dolayısıyla açıktırlar ama

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} (0, 1) = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times \ldots$$

altkümesi çarpım topolojisinde açık değildir.

**Teorem 5.** *A bir topolojik uzay, $(X_i)_{i\in I}$ bir topolojik uzay ailesi ve*

$$f : A \to \prod_{i\in I} X_i$$

*bir fonksiyon olsun. O zaman f'nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $i \in I$ için*

$$f_i = \pi_i \circ f : A \to X_i$$

*fonksiyonlarının sürekli olmalarıdır.*

**Kanıt:** Aynen Teorem 1 gibi. Okura alıştırma olarak burakılmıştır. □

Çarpım topolojisinde dizi yakınsaklığı gayet hoştur:

**Teorem 6.** *Her $n \in \mathbb{N}$ için, $x_n \in \prod_{i\in I} X_i$ olsun. $x_n = (x_{n,i})_{i\in I}$ olsun. Ayrıca $a = (a_i)_{i\in I}$ olsun. O zaman, a'nın $(x_n)_n$ dizisinin ($\prod_{i\in I} X_i$'nin çarpım topolojisinde) bir limiti olması için her $i \in I$ için $a_i$'nin $(x_{n,i})_n$ dizisinin limiti olması gerek ve yeter koşuldur. Yani $\prod_{i\in I} X_i$ topolojik uzayında dizi yakınsaklığı, dizinin koordinatlarının yakınsaklığına eşdeğerdir.*

**Kanıt:** İzdüşüm fonksiyonları sürekli olduklarından sayfa 39'daki Teorem 2'ye göre, koşul gereklidir. Şimdi her $i \in I$ için $a_i$'nin $(x_{n,i})_n$ dizisinin limiti olduğunu varsayalım. $U$, $a$'yı içeren bir açık küme olsun. Yeterince büyük $n$ göstergeçleri için, $x_n$ elemanlarının $U$'nun içine düştüğünü göstereceğiz. $U$ temel açık altkümelerin bileşimi olduğundan,

$$a \in V \subseteq U$$

özelliklerini sağlayan bir $V$ temel açık kümesi vardır. $V$'yi betimleyelim: Diyelim, $i_1, \ldots, i_k \in I$ ve $U_{i_1} \subseteq X_{i_1}, \ldots, U_{i_k} \subseteq X_{i_k}$ açık altkümeleri için

$$Y_i = \begin{cases} U_{i_j} & \text{eğer } j = 1, \ldots, k \text{ için } i = i_j \text{ ise} \\ X_i & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

ve

$$a \in V = \prod_{i\in I} Y_i \subseteq U.$$

Her $j = 1, \ldots, k$ için, $a_{i_j}$, $(x_{n,i_j})_n$ dizisinin limiti olduğu için, öyle bir $N_j$ vardır ki her $n > N_j$ için $x_{n,i_j} \in U_{i_j}$ olur. Şimdi $N = \max\{N_1, \ldots, N_k\}$ olsun. O zaman $n > N$ için

$$x_n = (x_{n,i})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i = V \subseteq U$$

olur. Teorem kanıtlanmıştır. □

**Kutu Topolojisi.** $(X_i)_{i\in I}$ topolojik uzaylarının kartezyen çarpımı üzerinde ilk bakışta çok daha doğal gelebilecek, hatta galiba gerçekten daha doğal olan bir başka topoloji daha tanımlanabilir: Eğer her $i$ için $U_i \subseteq X_i$ açıksa, temel açık kümeler,

$$\prod_{i\in I} Y_i$$

türünden yazılan kümeler olsun ve açık kümeler de bu tür kümelerin her türlü bileşimi olsun. Böylece kartezyen çarpım üzerinde bir topoloji elde ederiz. ***Kutu topolojisi*** denilen bu topolojiyle çarpım topolojisi arasında eğer $I$ sonluysa bir ayrım yoktur, ama eğer $I$ sonsuzsa, o zaman çoğu zaman kutu topolojisi çarpım topolojisinden kesinlikle daha zengindir. Örneğin $I = \mathbb{N}$ ise, kutu topolojisinde açık olan

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (0, 1)$$

kümesi, kartezyen çarpımda açık değildir. ♠

**Alıştırmalar**

**10.** $X$ bir Hausdorff uzayıysa,

$$X \times X \setminus \{(x, x) : x \in X\}$$

altkümesinin açık olduğunu kanıtlayın. Eğer bu küme açıksa $X$'in Hausdorff olması gerektiğini kanıtlayın.

**11.** $(X_i)_{i\in I}$, sonsuz bir topolojik uzay ailesi olsun. $X_i$'nin bir $U_i$ açık kümesi için, $\prod_{i\in I} X_i$ kümesinin $\prod_{i\in I} U_i$ biçiminde yazılan altkümelerine açık diyelim. Bunun, Tychonoff topolojisini içeren bir topoloji olduğunu ama Tychonoff topolojisinden daha ince olduğunu kanıtlayın.

**12.** $\prod_{i\in I} X_i$ topolojik uzayının Hausdorff olması için her $X_i$'nin Hausdorff olmasının gerek ve yeter olduğunu gösterin.

**13.** İzdüşüm fonksiyonlarının açık fonksiyon olduklarını (yani açık kümeleri açık kümelere götürdüklerini) gösterin.

**14.** $I = J \sqcup K$ olsun.

$$\prod_{i\in I} X_i \approx \prod_{j\in J} X_j \times \prod_{k\in K} X_k$$

topolojik denkliğini kanıtlayın. ♠