Kümeler Kuramı Sınavı Final Soruları

Birinci Kısım.

1. $I \subseteq \mathbb{R}$, n elemanlı bir küme olsun.

$$\{(i_1, i_2, i_3) \in I^3 : i_1 < i_2 < i_3\}.$$

kümesinin eleman sayısını bulun. Eğer 3 yerine rastgele bir $\ell = 1, ..., n$ alırsak sonuç ne olur?

2. Bir $s \geq 1$ tamsayısı için şu eşitliği gösterin:

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} - \cdots + (-1)^{s-1}\binom{s}{s} = 1.$$

3. $A_1, ..., A_n$ kümeler olsun. x, bu kümelerin tam s tanesinde bulunan bir eleman olsun. x'in

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

sayısına olan katkısını hesaplayın, yani eğer

$$B_i = A_i \setminus \{x\}$$

ise

$$\sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{i<j<k} |B_i \cap B_j \cap B_k|$$

sayısını hesaplayın.

4. Yukardaki verilerle, x'in

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısına katkısını hesaplayın.

5. Yukardakilerden, $|A_1 \cup ... \cup A_n|$ sayısının

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

6. $|A_1 \cap ... \cap A_n|$ sayısının,

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots.$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Yukardaki sonucu $A_1, ..., A_n$ kümelerinin tümleyenlerine uygulayın.

İkinci Kısım. A ve B kümeleri için,

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

olsun. (A ile B'nin ***simetrik farkı***.)

1. Δ'nın birleşme ve değişme özelliklerinin olduğunu ve $\cap$ işleminin Δ üzerine dağıldığını kanıtlayın.

2. $A_1 \,\Delta\, ... \,\Delta\, A_n$ kümesinin, tek sayıda A_i'lere ait elemanlardan oluştuğunu kanıtlayın.

3. $\sum_{i=1}^{s} (-1)^{i-1} 2^{i-1} \binom{s}{i}$ sayısının eğer s çiftse 0, tekse 1 olduğunu kanıtlayın.

4. Yukardaki iki sorudan, $|A_1 \,\Delta\, ... \,\Delta\, A_n|$ sayısının

$$\sum_i |A_i| - 2\sum_{i<j} |A_i \cup A_j| + 2^2 \sum_{i<j<k} |A_i \cup A_j \cup A_k| - \cdots$$

sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

Üçüncü Kısım. Sabit bir X kümesinin A ve B altkümeleri için,

$$A \downarrow B = (A \cup B)^c$$

olsun. $\cup$, $\cap$, $\setminus$ ikili işlemlerinin herbirinin sadece $\downarrow$ işlemi kullanılarak ifade edilebileceğini kanıtlayın.

Dördüncü Kısım. Eğer $(X_i)_{i \in I}$ bir kümeler ailesiyse, bu ailenin $\prod_{i \in I} X_i$ ***kartezyen çarpımının***

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \prod_{i \in I} X_i : \text{her } i \in I \text{ için, } f(i) \in X_i\}$$

olarak tanımlandığını anımsatalım.

$(J_i)_{i \in I}$ bir göstergeçler ailesi ve $(A_{i,j})_{i \in I,\, j \in J_i}$ bir kümeler ailesi olsun.

1. Aşağıdakilerden birini kanıtlayın:

$$\bigcup_{i \in I}\left(\bigcap_{j \in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcap_{f \in \prod_{i \in I} J_i}\left(\bigcup_{i \in I} A_{i,\, f(i)}\right),$$

$$\bigcap_{i \in I}\left(\bigcup_{j \in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}\left(\bigcap_{i \in I} A_{i,\, f(i)}\right).$$

2. Aşağıdakilerden birini kanıtlayın:

$$\prod_{i \in I}\left(\bigcup_{j \in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f \in \prod_{i \in I} J_i}\left(\prod_{i \in I} A_{i,\, f(i)}\right),$$

$$\prod_{i \in I}\left(\bigcap_{j \in J_i} A_{i,j}\right) = \bigcap_{f \in \prod_{i \in I} J_i}\left(\prod_{i \in I} A_{i,\, f(i)}\right).$$

Beşinci Kısım. $(A_n)_n$ ve $(B_n)_n$ iki küme dizisi olsun. Aşağıdaki önermelerin eşdeğer olduklarını kanıtlayın:

a) Her n ve m için, $A_n \cap B_m$ sonludur.

b) Öyle ayrık A ve B kümeleri vardır ki her n için $A_n \setminus A$ ve $B_n \setminus B$ kümeleri sonlu olur.

Altıncı Kısım. $(A_i)_{i \in I}$ ve $(B_i)_{i \in I}$ kümeler ailesi için aşağıdaki denklem sistemlerinin (olduğunda) çözümlerini bulun. Çözümün biricikliğini tartışın.

a) $A_i \cap X = B_i \; (i \in I)$ **a)** $A_i \cup X = B_i \; (i \in I)$

c) $A_i \setminus X = B_i \; (i \in I)$ **d)** $X \setminus A_i = B_i \; (i \in I)$. ♦