Kapak Konusu: Metrik Uzaylar ve Topoloji

Tıkız Topolojik Uzaylar

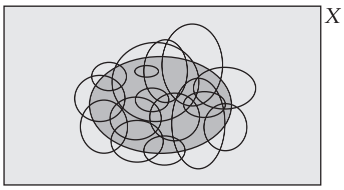
Yazının uzunluğundan da anlaşılacağı üzere, bir topolojik uzayın tıkız altkümeleri çok önemlidir. (Bu giriş yazısı daha ilginç bir cümleyle başlayabilirdi ama ne yapalım ki bu dediğimiz çok doğru! Topologların azımsanamayacak bir bölümü yıllarını topolojik uzayların tıkız altkümelerini bulmaya ya da betimlemeye harcarlar.) Çünkü birazdan tanımlayacağımız tıkız altkümeler - çoğu zaman sonsuz olmalarına karşın - birçok anlamda sonlu altkümelerin oynadığı rolü oynarlar. Analiz de büyük ölçüde tıkız kümeler, bu da olmadı yerel olarak tıkız topolojik uzaylar üzerinde yapılır. Tıkız kümeler sadece matematikte değil, (en azından diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığında oynadıkları rolden dolayı) fizikte de çok önemlidirler. Ayrıca topolojiyi anlayıp anlamadığınızı bu yazıdaki teoremlerin hepsini kendi kendinize hiç yardım görmeden kanıtlayıp kanıtlayamadığınıza göre sınayabilirsiniz.

Örtü

Bir tanımla başlayalım. X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A'nın bir ***örtüsü***,

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan, X'in U_i altkümelerinden oluşan bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ ailesidir. Temsili resim aşağıda.

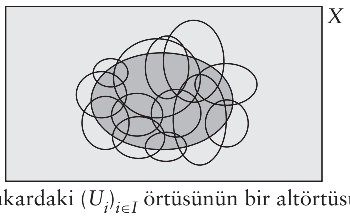


A koyu gri alan, U_i'ler küçük oval alanlar.

$\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ ailesi, $\bigcup_{i\in I} U_i$ bileşiminin her altkümesinin bir örtüsüdür elbette. Her ne kadar bir $\mathcal{U}$ ancak bir kümenin örtüsü olabiliyorsa, kendi başına bir örtü olması anlamsızsa da biz sık sık kümenin bilindiğini varsayıp $\mathcal{U}$ örtüsünden bahsedeceğiz.

Eğer $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün her U_i kümesi açıksa, o zaman ***açık örtüden*** söz edilir.

Eğer bir $J \subseteq I$ altkümesi için $\mathcal{V} = (U_j)_{j\in j}$ ailesi de A'nın bir örtüsü oluyorsa, o zaman $\mathcal{V}$ örtüsüne $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün bir ***altörtüsü*** denir.



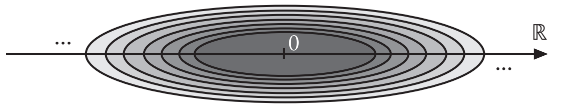
Yukardaki $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün bir altörtüsü
(Yukardaki U_i'lerden üçü eksik.)

Eğer I göstergeç kümesi sonluysa A'nın $(U_i)_{i\in I}$ örtüsüne ***sonlu örtü*** adı verilir. "Sonlu altörtü" deyiminin ne demek olduğu belli olmalı: Altörtü tanımındaki J sonluysa, A'nın $\mathcal{V} = (U_j)_{j\in J}$ örtüsüne $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ örtüsünün ***sonlu altörtüsü*** adı verilir.

$(U_i)_{i\in I}$, A'nın bir örtüsüyse ve $B \subseteq A$ ise $(U_i)_{i\in I}$, B'nin de bir örtüsüdür. Elbette. Ve eğer $A \subseteq B$ ise $(U_i \cap B)_{i\in I}$ de A'nın bir örtüsüdür. Bu da elbette.

Birkaç basit örnek verelim.

Örnek 1. $((-n, n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$'nin, aralıklardan oluşan bir açık örtüsüdür. Eğer bu örtüden sonlu sayıda aralık atarsak gene $\mathbb{R}$'nin bir örtüsünü (dolayısıyla orijinal örtünün bir altörtüsünü) elde ede-

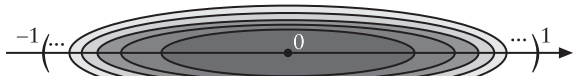


riz. $((-n, n))_{n\in 2\mathbb{N}}$ de bu örtünün bir altörtüsüdür. Daha genel olarak, eğer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sınırlı olmayan bir fonksiyonsa, $((-f(n), f(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ de bu örtünün bir altörtüsüdür. Bu ailenin sonlu bir altörtüsü yoktur.

Örnek 2. $((-1+1/n, 1-1/n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ailesi $(-1, 1)$ açık aralığının açık bir örtüsüdür:

$$(-1, 1) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (-1+1/n, 1-1/n).$$

(Aslında eşitlik geçerli.) Bu aileden sonlu sayıda aralık silersek, gene $(-1, 1)$ aralığının bir örtüsünü

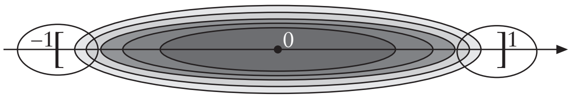


elde ederiz, yani orijinal örtünün bir altörtüsünü buluruz. Bu ailenin de sonlu bir altörtüsü yoktur.

Örnek 3. $((-1+1/n,\ 1-1/n))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ ailesi $[-1, 1]$ kapalı aralığının bir örtüsü değildir, çünkü örtü -1 ve 1 elemanlarını örtmez, ama bu örtüye

$$(-8/7, -7/8) \text{ ve } (7/8, 8/7)$$

aralıklarını eklersek $[-1, 1]$ kapalı aralığının açık



bir örtüsünü elde ederiz.

$$(-8/7, -7/8), (-8/9, 8/9), (7/8, 8/7)$$

aralıkları yukardaki örtünün sonlu bir altörtüsüdür.

Örnek 1 ve 2'yle Örnek 3 arasındaki ayrımı gözler önüne serelim: Örnek 1 ve 2'deki örtülerin sonlu altörtüleri yoktur, ama Örnek 3'teki örtünün vardır. Örnek 1'deki $\mathbb{R}$ ve Örnek 2'deki $(-1, 1)$ açık aralığı "tıkız" değildirler ama Örnek 3'teki $[-1, 1]$ kapalı aralığı "tıkız"dır. Tıkız kümenin matematiksel tanımı hemen şimdi geliyor.

Alıştırma 1. $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $\mathscr{V} = (V_i)_{i\in I}$ ailesi Y'nin bir örtüsüyse, $\mathscr{U} = (f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ ailesinin X'in bir örtüsü olduğunu kanıtlayın. Eğer f sürekliyse ve $\mathscr{V}$, Y'nin bir açık örtüsüyse, $\mathscr{U}$'nun X'in bir açık örtüsü olduğunu kanıtlayın.

Tıkız Küme

X bir topolojik uzay ve $K \subseteq X$ olsun. Eğer K'nın **her** açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa K'ya ***tıkız*** küme denir. (Tıkışık ya da kompakt dendiği de olur.) Yani K'nın tıkız olması için,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

içindeliğini sağlayan X'in **her** $U_i \subseteq X$ açık altkümeleri için,

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci olmalıdır.

Yukardaki tanımdaki "her" sözcüğünün altını çizeriz (üstünü değil!); tanımın kilit sözcüğüdür. Bulunan sonlu örtü de orijinal örtünün **altörtüsü** olmak zorundadır... (Bunlar, bin yıllık öğretmenlik tecrübesinden damıtılmış altın niteliğinde uyarılardır.)

Bazı yazarlar, örneğin Bourbaki ve Fransız ekolü tıkızlığı sadece Hausdorff uzaylar için tanımlarlar. Biz daha genel olan akıma uyup öyle yapmayacağız.

Hemen birkaç örnek ve naörnek verelim.

Örnek 4. Her topolojik uzayın her sonlu altkümesi (dolayısıyla boşküme de) tıkızdır. Elbette! Eğer X kümesi ayrık metrikle donatılmışsa, o zaman bu topolojik uzayın sadece sonlu altkümeleri tıkız olabilirler. Nitekim her A altkümesi için $(\{a\})_{a\in A}$ ailesi A'nın açık bir örtüsüdür.

Örnek 5. Sadece sonlu sayıda açık kümesi olan bir topolojik uzayın her altkümesi tıkızdır. Örneğin kaba topolojiyle donatılmış her küme tıkızdır.

Örnek 6. Örnek 2'den $(-1, 1)$ açık aralığının (Öklid topolojisinde) tıkız olmadığı anlaşılıyor. Bu örnekten yola çıkarak, boş olmayan açık bir aralığın Öklid topolojisinde tıkız olmadığı kolaylıkla anlaşılır. Örnek 1'den de $\mathbb{R}$'nin (Öklid topolojisiyle) tıkız olmadığı anlaşılıyor.

Örnek 7. Sonlu sayıda tıkız kümenin bileşimi de tıkızdır. Bunun kanıtı hiç zor değildir ve okura bırakılmıştır.

Örnek 8. X herhangi bir küme olsun ve X'i Fréchet topolojisiyle donatalım, yani sadece $\emptyset$ ve tümleyeni sonlu olan kümeler açık olsun. O zaman X'in her altkümesi tıkızdır. Nitekim eğer $A \subseteq X$ ise, A'yı örten açık bir örtünün boş olmayan herhangi bir elemanı A'yı nerdeyse tamamen örter, sadece sonlu sayıda eleman açıkta kalabilir. Bu açıkta kalan elemanları örtünün sonlu sayıda elemanıyla örtebiliriz.

Çok daha önemli örnekler ileride verilecektir. Örneğin $\mathbb{R}$'nin tüm tıkız altkümelerini kolay bir biçimde betimleyeceğiz. (Ama hayat her zaman $\mathbb{R}$'de olduğu kadar basit değildir.) Ve ilerde tıkız kümelerden başka tıkız kümeler yaratmanın çeşitli reçetelerini göreceğiz.

Sezgi kazandırması açısından $\mathbb{R}$'nin tıkız altkümelerinin neler olduğunu kanıtlamadan söyleyelim: $\mathbb{R}$'nin tıkız altkümeleri aynen ve aynen $\mathbb{R}$'nin kapalı ve sınırlı altkümeleridir. Bu, meşhur Heine-Borel teoremidir ve bu yazıda kanıtlanacaktır. Belki bu olgu "tıkız"ın menşeine dair bir bilgi verir: Tıkız altkümeler uzayıp gitmeyen, kendi içine kapalı altkümeler olarak algılanmalıdır. Tabii bu sadece bir algı olarak kalmalı, matematiksel bir olgu yatmıyor bu dediğimizin temelinde.

Okur $[0, 1)$ aralığının tıkız olmadığını kanıtlayabilir. İlerde $[0, 1]$ aralığının tıkız olduğunu göreceğiz. Demek ki tıkızlık tek bir nokta çıkarılınca bozulabiliyor, yani oldukça narin bir kavram. İlerde, herhangi bir topolojik uzaya tek bir nokta ekleyerek ve elde edilen kümeyi münasip bir topolojiyle donatarak, nokta eklenmiş kümeyi tıkız bir topolojiye dönüştürebileceğimizi göreceğiz.

Alıştırmalar

2. X bir küme olsun. X üzerine τ_1 ve τ_2 topolojilerini alalım. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olsun. X'in bir altkümesi τ_2 için tıkızsa τ_1 için de tıkız olduğunu kanıtlayın.

3. $\mathbb{R}$'nin sınırsız bir altkümesinin (Öklid topolojisinde) tıkız olamayacağını kanıtlayın. Genel olarak, tıkız bir metrik uzayın sınırlı olduğunu kanıtlayın.

4. $[0, 1)$ aralığının (Öklid topolojisinde elbet) tıkız olmadığını kanıtlayın.

Basit ve Temel Özellikler

İlk olarak tıkızlığın mutlak bir kavram olduğunu kanıtlayalım.

Önsav 1. *X bir topolojik uzay ve $K \subseteq Y \subseteq X$ olsun. K'nın X'te tıkız olmasıyla (X'ten indirgenmiş topolojiyle) Y'de tıkız olması (Y'den indirgenmiş topolojiyle) arasında hiçbir fark yoktur, biri doğruysa diğeri de doğrudur.*

Kanıt: Önce K'nın X'te tıkız olduğunu varsayalım. $(V_i)_{i\in I}$, K'nın Y-açık (yani Y'nin topolojisine göre açık) bir örtüsü olsun. Her $i \in I$ için, V_i kümesi Y'de açık olduğundan, indirgenmiş topolojinin tanımına göre,

$$V_i = U_i \cap Y$$

eşitliğini sağlayan bir $U_i \subseteq X$ açık kümesi vardır. (U_i, X'in topolojisinde açıktır.)

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

olduğundan, ve K, X'te tıkız olduğundan, ve $(U_i)_{i\in I}$, K'nın X-açık bir örtüsü olduğundan,

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Ama $K \subseteq Y$ olduğundan, bundan,

$$K \subseteq (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \cap Y$$
$$= (U_{i_1} \cap Y) \cup \ldots \cup (U_{i_n} \cap Y)$$
$$= V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n}$$

çıkar. Demek ki K, Y'de tıkızdır.

Şimdi de K'nın Y'de tıkız olduğunu varsayalım. $(U_i)_{i\in I}$, K'nın X-açık bir örtüsü olsun:

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

$K \subseteq Y$ olduğundan, bundan,

$$K \subseteq (\bigcup_{i\in I} U_i) \cap Y = \bigcup_{i\in I} (U_i \cap Y)$$

çıkar. İndirgenmiş topolojinin tanımına göre $U_i \cap Y$ kümesi Y-açıktır. Demek ki $(U_i \cap Y)_{i\in I}$, K'nın Y-açık bir örtüsüdür. K, Y'de tıkız olduğundan,

$$K \subseteq (U_{i_1} \cap Y) \cup \ldots \cup (U_{i_n} \cap Y)$$
$$= (U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}) \cap Y$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Demek ki

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}.$$

Bu da K'nın X'te tıkız olduğunu gösterir. □

"Tıkızlıktan kaçış yok" olarak nitelendirilebilecek aşağıdaki teorem çok önemlidir ve sık sık kullanılır.

Teorem 2. *Tıkız bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altında imgesi de tıkızdır.*

Bu teorem bariz bir biçimde aşağıdaki teoremin sonucu olduğu gibi, yukardaki önsav sayesinde ona denktir de. (Denkliği görmek için bir de ayrıca geçen sayıda sayfa 47'de kanıtlanan Önsav 3 gerekiyor.)

Teorem 2 bis. *X ve Y iki topolojik uzay ve*

$$f : X \to Y$$

sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $K \subseteq X$ tıkız bir kümeyse $f(K)$ da tıkızdır.

Kanıt: $(V_i)_{i\in I}$, $f(K)$'nın açık bir örtüsü olsun:

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i.$$

Demek ki

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i),$$

ve $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ ailesi K'nın bir örtüsü. f sürekli olduğundan, $f^{-1}(V_i)$ açık bir küme. Yani bu aile K'nın açık bir örtüsü. K tıkız olduğundan,

$$K \subseteq f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n})$$

içindeliğini sağlayan sonlu sayıda $i_1, \ldots, i_n \in I$ göstergeci vardır. Her iki tarafın da f-imgesini alalım:

$$f(K) \subseteq f(f^{-1}(V_{i_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{i_n}))$$
$$= f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \ldots \cup f(f^{-1}(V_{i_n}))$$
$$\subseteq V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n}$$

olur. □

Alıştırmalar

5. Topolojik uzayların kartezyen çarpımı tıkızsa, kartezyen çarpımı alınan her uzayın tıkız olmak zorunda olduğunu kanıtlayın.

6. X ve Y iki topolojik uzay olsun.

$$K \subseteq X \times Y,$$

kartezyen çarpımın tıkız bir altkümesi olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ tıkız altkümeleri için $K \subseteq A \times B$ içindeliğini kanıtlayın.

Ama dikkat, tıkız bir kümenin sürekli bir fonksiyon altında **önimgesi** tıkız olmak zorunda değildir, öyle olsaydı sabit fonksiyonun önimgesini alarak her topolojik uzayının tıkız olduğunu gösterebilirdik!

Örnek 2 ve 3'ten tıkız bir kümenin bir altkümesinin illa tıkız olmak zorunda olmadığı görülüyor. Ama tıkız bir kümenin kapalı altkümeleri her zaman tıkız olur:

Teorem 3. *Tıkız bir topolojik uzayın her kapalı altkümesi tıkızdır.*

Kanıt: X, tıkız bir topolojik uzay olsun. K, X'in kapalı bir altkümesi olsun. $(U_i)_{i\in I}$, K'nın açık bir örtüsü olsun. Bu açık örtüye $X \setminus K$ açık kümesini eklersek X'in açık bir örtüsünü elde ederiz. X tıkız olduğundan, X'in bu açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır. Bu sonlu altörtüye gerekiyorsa $X \setminus K$ altkümesini ekleyerek, $i_1, ..., i_n \in I$ göstergeçleri için,

$$X = U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n} \cup (X \setminus K)$$

eşitliğini varsayabiliriz. Şimdi bu eşitliğin her iki tarafını da K ile kesiştirelim.

$$K = (U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}) \cap K$$

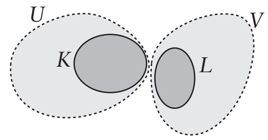
eşitliğini buluruz. Demek ki

$$K \subseteq U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_n}.$$

İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Hausdorff bir uzayda, tanım gereği, iki noktayı açık kümelerle ayrıştırabiliriz. Bir sonraki teorem, Hausdorff bir uzayda iki ayrık tıkız kümeyi açık kümelerle ayrıştırabileceğimizi gösterecek. Teoremin kanıtı, neden tıkız kümelerin bir anlamda sonlu kümelerin genelleşmesi olduğunu da gösterecek.

Teorem 4. *X, Hausdorff bir uzay olsun. K ve L, X'in ayrık ve tıkız iki altkümesi olsun. O zaman $K \subseteq U$ ve $L \subseteq V$ özelliklerini sağlayan ayrık U ve V açık kümeleri vardır.*



Kanıt: Önce L'nin tek bir noktadan oluştuğunu varsayalım. Diyelim $L = \{y\}$. X Hausdorff olduğundan her $x \in K$ için,

$$x \in U_x,\ y \in V_x,\ U_x \cap V_x = \emptyset$$

ilişkilerini sağlayan U_x ve V_x açık kümeleri vardır. $(U_x)_{x\in K}$ ailesi K'nın bir açık örtüsü olduğundan, öyle $x_1, ..., x_n \in K$ vardır ki,

$$K \subseteq U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$$

olur. Şimdi

$$U_y = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$$

ve

$$V_y = V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$$

tanımlarını yapalım. O zaman, U_y ve V_y açık kümelerdir; ayrıca $K \subseteq U_y$ ve $y \in V_y$ olur ve son olarak,

$$U_y \cap V_y = \emptyset$$

olur. Böylece $L = \{y\}$ ise teoremi kanıtladık.

Şimdi genel duruma geçelim. Her $y \in L$ için,

$$K \subseteq U_y,\ y \in V_y \text{ ve } U_y \cap V_y = \emptyset$$

ilişkilerini sağlayan U_y ve V_y açık kümeleri seçelim. $(V_y)_{y\in L}$ ailesi L'nin bir açık örtüsü olduğundan, öyle $y_1, ..., y_n \in L$ vardır ki,

$$L \subseteq V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$$

olur. Şimdi

$$V = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$$

ve

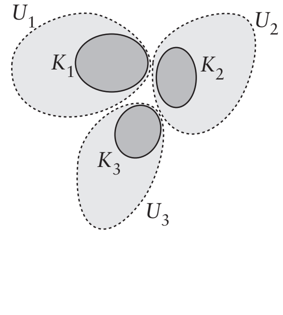
$$U = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$$

tanımlarını yapalım. O zaman, U ve V açık kümelerdir; ayrıca $K \subseteq U$ ve $L \subseteq V$ olur ve son olarak,

$$U \cap V = \emptyset$$

olur. Böylece teoremin de kanıtı bitmiş oldu. □

Alıştırma 7. Bir Hausdorff topolojik uzayda, sonlu sayıda tıkız kümenin açık kümeler tarafından ayrıştırılabileceğini kanıtlayın.



Sonuç 5. *Hausdorff bir uzayda (dolayısıyla bir metrik uzayda da) tıkız kümeler kapalıdırlar.*

Kanıt: X Hausdorff uzay ve $K \subseteq X$ tıkız bir altküme olsun. $x \in X \setminus K$ olsun. Bir önceki teoreme göre x'i içeren ama K ile kesişmeyen bir açık küme vardır. Demek ki $X \setminus K$ açık bir kümedir, dolayısıyla K kapalıdır. □

Alıştırmalar

8. Yukardaki sonucun Hausdorff olmayan uzaylar için doğru olmadığını gösterin.

9. Tıkız bir topolojik uzaydan Hausdorff bir uzaya giden her sürekli fonksiyonun kapalı bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın.

10. $f : X \to Y$, iki topolojik uzay arasında sürekli bir eşleme olsun. Eğer X tıkız ve Y Hausdorff ise f'nin bir homeomorfizma olduğunu kanıtlayın.

11. Hausdorff bir uzayda tıkız kümelerin kesişiminin tıkız olduğunu kanıtlayın.

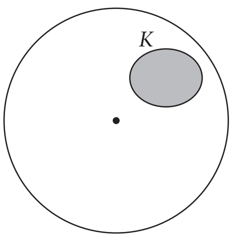
12. X bir küme olsun. X üzerine τ_1 ve τ_2 topolojilerini alalım. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ olsun. Eğer X her iki topoloji için hem Hausdorff hem de tıkızsa $\tau_1 = \tau_2$ eşitliğini kanıtlayın.

Metrik Uzaylarda Tıkız Altkümeler

Tıkızlık topolojik bir özellik olduğuna göre, iki ayrı metrik aynı topolojiyi veriyorsa, bir metriğe göre tıkız olan diğer metriğe göre de tıkızdır.

Kaba topoloji örneği de gösteriyor ki, herhangi bir topolojik uzayın tıkız altkümeleri hakkında fazla bir şey söylemek mümkün değil. Metrik uzaylarda tıkız kümeler hakkında daha fazla bilgiye sahibiz.

Teorem 6. *Metrik bir uzayda tıkız kümeler sınırlı ve kapalıdırlar.*



Bir metrik uzayda tıkız bir küme fazla uzağa gidemez!

Kanıt: (X, d) bir metrik uzay ve K, X'in tıkız bir altkümesi olsun. Bir metrik uzay Hausdorff olduğundan, Sonuç 5'e göre K kapalıdır.

Şimdi K'nın sınırlı olduğunu kanıtlayalım. X'ten herhangi bir $a \in X$ noktası seçelim.

$$(\mathrm{B}(a, n))_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

ailesi K'nın açık bir örtüsüdür elbette. Demek ki K sonlu sayıda $\mathrm{B}(a, n)$ yuvarı tarafından kaplanır. Eğer n bu sonlu sayıdaki yuvarın en büyük yarıçapıysa, $K \subseteq \mathrm{B}(a, n)$ olur. Böylece K'nın sınırlı olduğunu kanıtlamış olduk. □

Bu teoremin tersi doğru değildir. Örneğin ayrık metrikle donatılmış her küme sınırlıdır (ve elbette kapalıdır) ama uzay sonlu değilse tıkız olamaz.

Tıkız Kümelerin Sonlu Kartezyen Çarpımı

Tıkız uzayların kartezyen çarpımının (çarpım topolojisinde) tıkız olup olmayacağı merak konusu olmalı.

İki tıkız kümenin kartezyen çarpımının tıkız olduğunu kanıtlayacağız. Dolayısıyla sonlu sayıda tıkız kümenin de kartezyen çarpımı tıkız olur.

Aynı sonuç sonsuz sayıda tıkız kümenin kartezyen çarpımı için de geçerlidir ama bu çok daha zor bir teoremdir. Bu sonucu bu yazıda kanıtlayacağız.

Önce bazı genel kelamlarda bulunalım.

Bir kümenin tıkız olup olmadığını kanıtlamak için, önce kümenin rastgele bir $(U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü seçilir ve sonra bu açık örtünün **sonlu** bir **altörtüsü** bulunur. Elbette, eğer her $i \in I$ için $V_i \subseteq U_i$ ise ve $(V_i)_{i \in I}$ de aynı kümenin bir örtüsüyse, $(U_i)_{i \in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak için $(V_i)_{i \in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak yeterlidir, çünkü o zaman bu sayede $(U_i)_{i \in I}$ örtüsünün de sonlu bir altörtüsü bulunmuş olur. Ya da diyelim her U_i açık kümesini V_{ij} türünden kümelerin bileşimi olarak yazdık; o zaman $(V_{ij})_{ij}$ de aynı kümenin bir örtüsü olur ve $(U_i)_{i \in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak için $(V_{ij})_{ij}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsünü bulmak yeterlidir.

Bu söylediklerimizden de anlaşılıyor ki, eğer bir topolojik uzayın bir tabanı verilmişse, bir kümenin tıkız olup olmadığını kanıtlamak için, kümenin, **tabanın elemanlarından oluşan** rastgele bir $(U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü seçmek ve sonra bu örtünün sonlu bir altörtüsünün olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Yani tabanın elemanlarından oluşan örtülerle yetinebiliriz. Bu, çoğu zaman bize hatırı sayılır bir kolaylık sağlar. Örneğin $\mathbb{R}$'de açık aralıklardan oluşan örtüleri almak yeterlidir; burada da yapacağımız gibi kartezyen çarpımda $U \times V$ türünden yazılan açık kümelerden oluşan örtüleri almak yeterlidir; bir metrik uzayda her U_i'nin bir yuvar olduğunu, yani $B(x_i, r_i)$ türünden bir küme olduğunu varsayabiliriz.

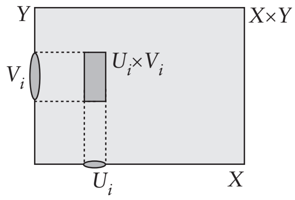
İlerde, bir alttabanın elemanlarından oluşan rastgele bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örtüsü seçmek ve sonra bu örtünün sonlu bir altörtüsünün olduğunu kanıtlamanın yeterli olduğunu göreceğiz (Teorem 29, Alexander'ın Alttaban Teoremi, sayfa 79).

Teorem 7. *İki (dolayısıyla sıonlu sayıda) tıkız topolojik uzayın kartezyen çarpımı tıkızdır.*

Kanıt: X ve Y herhangi iki tıkız topolojik uzay olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımının herhangi bir açık örtüsünü alalım. Yukarda söylenenlerden, açık örtünün, X'in $(U_i)_{i\in I}$ açık kümeleri ve Y'nin $(V_i)_{i\in I}$ açık kümeleri için,

$$(U_i \times V_i)_{i\in I}$$

türünden bir örtü (yani açık dikdörtgenlerden oluşan bir örtü) olduğunu varsayabiliriz.

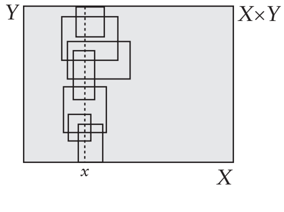


Elbette $(U_i)_{i\in I}$ ailesi X'in ve $(V_i)_{i\in I}$ ailesi Y'nin örtüleridir. (Bu aşamada cinliğe soyunup kanıtın gerisini tahmin ettiklerini sananları tarih hiçbir zaman afetmemiştir.)

Her $x \in X$ için, $\{x\} \times Y$, Y'ye topolojik olarak denktir (yani homeomorftur, geçen sayı, sayfa 52, Alıştırma 4), demek ki tıkızdır. Ayrıca $(U_i \times V_i)_{i\in I}$ ailesi $X \times Y$'nin olduğu gibi $\{x\} \times Y$'nin de bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla $\{x\} \times Y$'yi sonlu sayıda $U_i \times V_i$'lerle örtebiliriz. Diyelim sonlu bir $I(x) \subseteq I$ göstergeç kümesi için,

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i\in I(x)} (U_i \times V_i)$$

oluyor.



Açık örtümüzden gereksiz $U_i \times V_i$'leri atarak, her $i \in I(x)$ için,

$$x \in U_i$$

varsayımını yapabiliriz. $I(x)$ sonlu olduğu için,

$$U(x) = \bigcap_{i\in I(x)} U_i$$

kümesi, X'in x'i içeren açık bir altkümesidir. Bu arada,

$$\left(\bigcap_{i\in I(x)} U_i\right) \times Y = \left(\bigcap_{i\in I(x)} U_i\right) \times \left(\bigcup_{i\in I(x)} V_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I(x)} (U_i \times V_i)$$

içindeliğini aklımızda tutalım, gerekecek birazdan. Bu $U(x)$ kümeleri X'in bir açık örtüsünü oluştururlar. X tıkız olduğundan, sonlu sayıda $x_1, \ldots, x_n \in X$ için,

$$X = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_n)$$

olur. Şimdi $(U_i \times V_i)_{i\in I}$ örtüsünün,

$$(U_i \times V_i)_{j = 1, \ldots, n \text{ ve } i \in I(x_j)}$$

altailesinin $X \times Y$'nin sonlu bir altörtüsü olduğunu göstereceğiz. $X \times Y$'den rastgele bir (x, y) elemanı alalım. Bir $j = 1, \ldots, n$ için,

$$x \in U(x_j) = \bigcap_{i\in I(x_j)} U_i$$

olur.

$$(x, y) \in U(x_j) \times Y \subseteq \bigcup_{i\in I(x_j)} (U_i \times V_i)$$

olduğundan, bir $i \in I(x_j)$ için $(x, y) \in U_i \times V_i$ olur. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Alıştırmalar

13. X ve Y iki topolojik uzay olsun.

$$K \subseteq X \times Y$$

kapalı bir altküme olsun. Eğer $\mathrm{pr}_1(K)$ ve $\mathrm{pr}_2(K)$ kümeleri tıkızsa K'nın da tıkız olduğunu kanıtlayın.

14. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ iki tıkız küme olsun. $W \subseteq X \times Y$ altkümesi $A \times B$'yi içeren açık bir küme olsun.

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$$

içindeliklerini sağlayan $U \subseteq X$ ve $V \subseteq Y$ açık altkümelerinin olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Yukardaki kanıttan esinlenebilirsiniz.

15. X ve Y iki topolojik uzay olsun. Eğer Y tıkızsa, $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ birinci izdüşüm fonksiyonunun kapalı bir fonksiyon olduğunu kanıtlayın. (Yani kapalı kümelerin izdüşümleri kapalıdır.)

16. X ve Y iki topolojik uzay olsun.

$$f : X \to Y$$

bir fonksiyon olsun. Y'nin tıkız ve Hausdorff olduğunu varsayalım. f'nin sürekli olmasıyla f'nin grafiğinin $X \times Y$ uzayında kapalı olmasının eşdeğer koşullar olduklarını gösterin.

17. $(x_n)_n$ yakınsak bir gerçel sayı kümesi olsun. x bu dizinin limiti olsun. $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kümesinin tıkız olduğunu kanıtlayın.

18. $\mathbb{Q}$'nün tıkız bir sonsuz altkümesini bulun.

$\mathbb{R}^n$'nin Tıkız Altkümeleri

Daha önce $\mathbb{R}$ için söylediğimiz daha da genel olarak $\mathbb{R}^n$ için doğrudur:

Teorem 8 [Heine-Borel]. *$\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesinin tıkız olması için yeter ve gerek koşul altkümenin sınırlı ve kapalı olmasıdır.*

Kanıt: Teoremin soldan sağa kısmı her metrik uzayda doğrudur (Teorem 6). Teoremin diğer yönünü $\mathbb{R}$ için kanıtlamak yeterli. Nitekim teoremi $\mathbb{R}$ için bildiğimiz varsayalım. $K \subseteq \mathbb{R}^n$, sınırlı ve kapalı bir küme olsun. O zaman öyle $a < b$ vardır ki, $K \subseteq [a, b]^n$ olur. Teoremi $\mathbb{R}$ için bildiğimizi varsaydığımızdan, $[a, b]$, $\mathbb{R}$'nin tıkız bir altkümesidir. Teorem 7'ye göre $[a, b]^n$ de tıkızdır. (Bunun için Önsav 1 de gerekir.) Teorem 3'e göre K da tıkızdır. Demek ki teoremi $\mathbb{R}$ için kanıtlamak yeterli.

Şimdi $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve kapalı bir K altkümesi verilmiş olsun. K sınırlı olduğundan, belli $a < b$ sayıları için, $K \subseteq [a, b]$ olur. K kapalı olduğundan, Teorem 3'e göre $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığının tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli.

$(U_i)_{i\in I}$, $[a, b]$ aralığının açık bir örtüsü olsun. Bir $c \in [a, b]$ için, $(U_i)_{i\in I}$ aynı zamanda $[a, c]$ aralığının örtüsüdür. Eğer bu örtünün sonlu sayıda elemanı $[a, c]$ kapalı aralığını örtüyorsa, c sayısına bu kanıtlık "güzel sayı" diyelim. a elbette güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi boş değildir. Amacımız c'nin güzel bir sayı olduğunu kanıtlamak. Eğer c güzel bir sayıysa ve c_1 sayısı $a \le c_1 \le c$ eşitsizliklerini sağlıyorsa, o zaman c_1 sayısı da güzel bir sayıdır. Demek ki güzel sayılar kümesi G, $\mathbb{R}$'nin bir aralığıdır. G, b tarafından üstten sınırlı olduğundan G'nin en küçük üstsınırı vardır. Bu en küçük üstsınıra g diyelim. U_i'ler arasından g'yi içeren bir U_i alalım. U_i açık olduğundan ve g'yi içerdiğinden, öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki,

$$(g - \varepsilon, g + \varepsilon) \subseteq U_i$$

olur. Öte yandan $g - \varepsilon < g$ olduğundan, $g - \varepsilon$ güzel bir sayıdır. Demek ki sonlu sayıda $i_1, \dots, i_n \in I$ göstergeci için $[a, g - \varepsilon]$ aralığı

$$U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$$

açık kümeleri tarafından kaplanır. Ama o zaman, $[a, g + \varepsilon/2]$ aralığı

$$U_{i_1}, \dots, U_{i_n}, U_i$$

tarafından kaplanır. Bundan, her şeyden önce g'nin güzel bir nokta olduğu çıkar. Sonra g'nin b'den küçük olmayacağı çıkar, çünkü aksi halde bir $0 < \alpha \le \varepsilon/2$ için $g < g + \alpha < b$ olur ve $g + \alpha$, g'den büyük bir güzel nokta olur. Demek ki $g = b$ ve b güzel bir nokta. Dolayısıyla $[a, b]$ aralığı $(U_i)_{i\in I}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü tarafından örtülür. □

Yukarda verilen kanıt şık, zarif, zekice ve son derece anlaşılır. Ama standart kanıtlardan değil. Ortalama bir matematikçinin hemen aklına gelmeyecek kadar zekice bu yazarın zevkine göre. Bu teoremin daha standart kanıtı topolojinin yöntemleri açısından daha eğitici olduğunu düşünüyoruz. Daha standart kanıtı verelim:

Teorem 8'in İkinci Kanıtı: $[a, b]$ aralığının tıkız olmadığını varsayalım. O zaman $[a, b]$ aralığının sonlu altörtüsü olmayan bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örtüsü vardır. c_1, a ve b noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_1]$ aralığı ya da $[c_1, b]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. Diyelim $[a, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_2, a ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[a, c_2]$ ya da $[c_2, c_1]$ aralığı tarafından örtülmez. Diyelim $[c_2, c_1]$ sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor. c_3, c_2 ve c_1 noktalarının tam orta noktası olsun. Ya $[c_2, c_3]$ ya da $[c_3, c_1]$ aralığı sonlu sayıda U_i tarafından örtülmüyor... Bunu böyle devam ettirerek, öyle

$$[a, b] = [d_0, e_0] \supseteq [d_1, e_1] \supseteq [d_2, e_2] \supseteq \dots$$

aralıkları bulabiliriz ki, hem

$$(d_n - e_n) = (b - a)/2^n$$

olur hem de $[d_n, e_n]$ aralıkları sonlu sayıda U_i tarafından örtülmez. MD-2007-IV, sayfa 21'deki Kapalı Kutular Teoremi'ne göre, bütün bu $[d_n, e_n]$ aralıkları tek bir noktada kesişir, diyelim

$$f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n$$

noktasında kesişiyorlar. $f \in [a, b]$ olduğundan, bir $i \in I$ için $f \in U_i$ olur. U_i açık olduğundan, bir $\in > 0$ için, $(f - \varepsilon, f + \varepsilon) \subseteq U_i$ olur.

$$f = \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} e_n$$

olduğundan, bir n göstergeci için,

$$[d_n, e_n] \subseteq (f - \varepsilon, f + \varepsilon) \subseteq U_i$$

olur. Ama o zaman da $[d_n, e_n]$ tek bir (dolayısıyla sonlu sayıda) U_i tarafından kaplanır. Bir çelişki. Demek ki $[a, b]$ aralığı tıkız bir kümedir. □

Bu ikinci kanıtın $\mathbb{R}^n$'ye kolaylıkla genelleştiğine dikkatinizi çekeriz. Aralıkların yerini alan n boyutlu kutuları bu sefer 2 yerine 2^n parçaya böleriz.

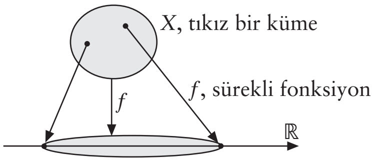
Sonuç 9 [Uç Değerler Teoremi]. *X tıkız bir topolojik uzay ve*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu X üzerine minimum ve maksimum değerini alır; yani öyle a, $b \in X$ vardır ki her $x \in X$ için

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

olur.



Tıkız bir küme, sürekli bir fonksiyon altında uç değerlerini alır.

Kanıt: X tıkız ve f sürekli olduğundan, Teorem 2'den dolayı $f(X)$ de tıkızdır. Teorem 8'e göre $f(X)$ kapalı ve sınırlıdır. $f(X)$ sınırlı olduğundan $\sup f(X)$ bir gerçel sayıdır. $f(X)$ kapalı olduğundan $\sup f(X) \in f(X)$ olur; çünkü terimleri $f(X)$'te olan ve $\sup f(X)$'e yakınsayan bir dizi vardır (okura alıştırma), ve sayfa 53'teki Önsav 8'e göre bu dizinin limiti olan $\sup f(X)$ sayısı $f(X)$'tedir.) Benzer bir kanıt $\inf f(X)$ için de yapılabilir. □

Alıştırmalar

19. $a < b$ kesirli sayıları için $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{Q}$'de tıkız olmadığını kanıtlayın. **İpucu:** a ile b arasında kesirli olmayan bir sayı vardır. Bu kesirli olmayan sayıyı kullanarak $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ kümesinin sonlu altörtüsü olmayan bir altörtüsünü bulun.

20. X tamsıralı bir küme olsun. X'in aralıklarıyla üretilen topolojisine ***sıra topolojisi*** adı verilir. X'in bir de ayrıca SUP ve INF özelliğini sağladığını varsayalım, yani üstten sınırlı ve boş olmayan her altkümesinin bir en küçük üstsınırı olsun. X'in her $[a, b]$ kapalı aralığının tıkız olduğunu kanıtlayın.

21 [Uç Değerler Teoremi]. X yukardaki gibi olsun. K tıkız bir küme olsun.

$$f : K \to X$$

sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu X üzerine minimum ve maksimum değerini alır; yani öyle a, $b \in K$ vardır ki her $x \in K$ için

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

olur. Bunu kanıtlayın.

Buraya kadar yaptıklarımız tıkızlık üzerine bilinmesi gerekenin minimumudur. Bu satırdan sonra tıkızlık konusunda biraz daha ileri gideceğiz. Çeşitli tıkızlık kavramları göreceğiz ve bu kavramların aralarındaki ilişkiyi irdeleyeceğiz.

Metrik uzaylarda birbirine denk olan, ama genel olarak topolojik uzaylar için birbirine denk olmayan, gördüğümüz standart ve klasik tıkızlık kavramı dışında değişik "tıkızlık" kavramları vardır. Bunların en önemlilerinden birkaçını aşağıda irdeleyeceğiz. Ayrıca, Lebesgue sayısı, tümden sınırlılık, tıkızlaştırma gibi kavramları göreceğiz, düzgün sürekliliği tıkızlık kapsamında irdeleyeceğiz ve meşhur Tychonoff Teoremi'ni kanıtlayacağız. Yapacaklarımızın her biri analizde çok önemlidir.

Yoğunlaşma Noktası Açısından Tıkızlık

X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in X$ olsun. Eğer a'yı içeren her açık küme A'nın a'dan değişik bir elemanını içeriyorsa, a'ya A'nın ***yoğunlaşma noktası*** dendiğini görmüştük (MD-2009-I, sayfa 61 ya da bu sayının 52'nci sayfası). Eğer A tüm yoğunlaşma noktalarını içeriyorsa A'nın kapalı olduğunu görmüştük (MD-2009-I, sayfa 62, Sonuç 8).

Eğer bir topolojik uzayın her sonsuz altkümesinin bir limit noktası varsa o topolojik uzaya ***yoğunlaşma noktası tıkız*** (*limit point compact*) denir.

Teorem 10. *Tıkız bir topolojik uzay yoğunlaşma noktası tıkızdır.*

Kanıt: X, tıkız topolojik uzay olsun. A, X'in sonsuz bir altkümesi olsun. A'nın bir yoğunlaşma noktasını bulacağız. A'nın sayılabilir sonsuzlukta olduğunu varsayabiliriz. Diyelim

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

A'nın yoğunlaşma noktası olmadığını varsayalım. O zaman A (tüm yoğunlaşma noktalarını içerdiğinden!) kapalıdır. Her n için, A'dan sadece a_n elemanını içeren bir U_n açık kümesi vardır. Bu U_n açık kümelerine bir de $X \setminus A$ açık kümesini eklersek, o zaman X'in bir açık örtüsünü elde ederiz. Bu açık örtünün sonlu bir altörtüsü X'i, dolayısıyla A'yı da örtmeli. A'yı örten bir örtüde $X \setminus A$ gereksizdir elbette. Demek ki A sonlu sayıda U_n'lerin bileşimidir; ama her U_n, A'dan tek bir eleman içerdiğinden bu bir çelişkidir. □

Yukardaki teorem, tıkız kelimesinin tıkız kümelere neden yakıştırıldığını bir kez daha söylüyor.

Yoğunlaşma noktası tıkız bir topolojik uzay tıkız olmak zorunda değildir. Aşağıda iki örnek var.

Karşıörnek 1. X herhangi bir topolojik uzay olsun. $Y = \{0, 1\}$ olsun. Y üzerine en kaba topolojiyi alalım. $X \times Y$ kartezyen çarpımını çarpım topolojisiyle ele alalım. Bu topolojik uzayın açık kümeleri ya boşkümedir ya da bir $U \subseteq X$ açık kümesi için $U \times Y$ biçimindedir; dolayısıyla (x, i)'nin her komşuluğu $(x, 1 - i)$ noktasını da içerir, yani $X \times Y$ yoğunlaşma noktası tıkızdır. Ama X tıkız değilse, izdüşüm fonksiyonları sürekli olduğundan, Teorem 2'ye göre $X \times Y$ de tıkız olamaz.

Karşıörnek 2. Eğer X herhangi bir sıralı kümeyse, X üzerine açık aralıklarla, yani $a, b \in X$ için,

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in X : a < x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\}$$

altkümeleriyle üretilen topolojiye ***sıralama topolojisi*** denir. Eğer $X = \mathbb{N}$ (= ω, sayılabilir ilk ordinal) ise, bu X üzerine ayrık topolojiyi verir elbet, pek ilginç sayılmaz.

Bundan böyle $X = \omega_1$ (sayılamaz ilk ordinal) olsun. ω_1, sayılabilir ordinaller kümesidir.

Limit ordinal olmayan her $\gamma \in \omega_1$ için, $\{\gamma\}$ bu topolojide hem açık hem de kapalı bir kümedir ama eğer $\gamma \neq 0$ bir limit ordinalse, $\{\gamma\}$ açık bir küme değildir.

ω_1'i sıralama topolojisiyle donatırsak tıkız olmayan ama yoğunlaşma noktası tıkız bir uzay elde ederiz.

ω_1'in tıkız olmadığını göstermek kolay, ne de olsa ω_1, elemanlarının bileşimidir ve her α ordinali için $\alpha = (-\infty, \alpha)$'dır (yani açıktır) ama ω_1, sayılamaz olduğundan, sonlu sayıda (hatta sayılabilir sonsuzlukta da) elemanının bileşimi olamaz.

Şimdi ω_1'in yoğunlaşma noktası tıkız olduğunu gösterelim. $A \subseteq \omega_1$ sonsuz bir altküme olsun. A'nın sayılabilir sonsuzlukta bir B altkümesi vardır. B'nin elemanlarını küçükten büyüğe doğru $(\beta_n)_n$ olarak yazalım. O zaman $\beta = \bigcup_n \beta_n = \sup_n \beta_n$ elemanı sayılabilirdir, dolayısıyla ω_1'in bir elemanıdır. β'nın A'nın bir yoğunlaşma noktası olduğunu, hatta $(\beta_n)_n$ dizisinin bir limiti olduğunu kanıtlamak zor değildir.

Bir Uyarı. Bir metrik uzayda bir a elemanının bir A altkümesinin yoğunlaşma noktası olması demek, a'nın, terimleri A'nın birbirinden değişik elemanlarından oluşan bir dizinin limiti olması demektir. (Çok bariz.) Ama topolojik uzaylarda böyle bir denklik yoktur. Örneğin

$$X = \omega_1{}^+ = \omega_1 + 1 = \omega_1 \cup \{\omega_1\}$$

olsun. X, ω_1'den sonraki ilk ordinaldir. X üzerine sıralama topolojisini alalım. ω_1'in tıkız olmadığını yukarda Karşıörnek 2'de gördük. Ama X tıkızdır. Ordinalleri biraz bilen biri için bunun kanıtı oldukça kolaydır ve okura bırakılmıştır. ω_1, kolayca görüleceği üzere X'in ω_1 altkümesinin bir yoğunlaşma noktasıdır ama terimleri ω_1'de olan bir dizi ω_1'e yakınsayamaz. Demek ki X topolojik uzayı metrikleşemez.

Dizisel Tıkızlık

Eğer topolojik bir uzayın her dizisinin yakınsak bir altdizisi varsa, o zaman bu topolojik uzaya ***dizisel tıkız*** denir.

Her tıkız topolojik uzay dizisel tıkız değildir ve her dizisel tıkız uzay tıkız değildir. Karşıörnek vereceğiz. Ama birazdan kanıtlayacağımız üzere her tıkız metrik uzay dizisel tıkızdır.

Karşıörnek 3. Yukarda karşıörnek 2 olarak ele aldığımız ω_1 uzayı dizisel tıkızdır (okura alıştırma) ama gördüğümüz üzere tıkız değildir.

Karşıörnek 4 ve Alıştırma. $2 = \{0, 1\}$ ve

$$X = 2^{[0,\,1]} = \prod\nolimits_{[0,\,1]} 2 = \{f : [0, 1] \to \{0, 1\}\}$$

olsun. Yani X, $[0, 1]$ kapalı aralığından $\{0, 1\}$ kümesine giden fonksiyonlar kümesi olsun. (X, $[0, 1]$ kapalı aralığının altkümeler kümesiyle eşleniktir.) 2'yi ayrık topolojiyle (yani her altkümenin açık olduğu topolojiyle) ve X'i çarpım topolojisiyle donatalım. Daha sonra bu yazıda X'in tıkız olduğunu göreceğiz (bkz. Tychonoff Teoremi), şimdilik bu olguyu kabul edelim. X'in topolojisini anımsatalım. Bir $x \in [0, 1]$ için,

$$U_{x,0} = \{f \in X : f(x) = 0\}$$

ve

$$U_{x,1} = \{f \in X : f(x) = 1\}$$

olsun. Bu altkümeler X'in topolojisinin bir alttabanını oluşur, yani X'in açık kümeleri, $\alpha = 0, 1$ için $U_{x,\alpha}$ türünden kümelerin sonlu sayıda kesişimlerinin herhangi bir bileşimidir; yani X'in açık kümeleri, sonlu sayıda $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ için,

$$f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

değerlerinin (0 ya da 1 olarak) belirlendiği fonksiyon kümelerinin bileşimidir. X'in dizisel tıkız olmadığını kanıtlayın.

Bu altbölümde metrik uzaylarda dizisel tıkızlıkla tıkızlığın eşdeğer kavramlar olduğunu ve daha fazlasını kanıtlayacağız.

Teorem 11. *Tıkız metrik uzaylar dizisel tıkızdır.*

Kanıt: X tıkız bir metrik uzay ve $(x_n)_n$ bu uzayda bir dizi olsun. Diyelim dizinin yakınsak bir altdizisi yok.

$x \in X$ olsun. Her $m > 0$ doğal sayısı için $x_n \in B(x\ 1/m)$ içindeliğini sağlayan sonsuz sayıda n göstergeci olsaydı, o zaman kolaylıkla x'e yakınsayan bir altdizi bulabilirdik. Demek ki

$$I(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U(x)\}$$

göstergeç kümesinin sonlu olduğu x'i içeren bir $U(x)$ açık kümesi vardır. Her $x \in X$ için $x \in U(x)$ olduğundan, $(U(x))_{x \in X}$, X'in bir açık örtüsüdür. X tıkız olduğundan,

$$X = U(x_1) \cup \ldots \cup U(x_k)$$

eşitliğini sağlayan $x_1, \ldots, x_k \in X$ vardır. Ama o zaman da

$$I(x_1) \cup \ldots \cup I(x_k)$$

göstergeç kümesi hem sonludur hem de $\mathbb{N}$'ye eşittir. Bir çelişki. □

Sonuç 12. *Tıkız bir metrik uzay tamdır, yani tıkız bir metrik uzayın Cauchy dizileri yakınsaktır.*

Kanıt: $(x_n)_n$ bir Cauchy dizisi olsun. Yukardaki teoreme göre $(x_n)_n$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. Sayfa 48'deki Önsav 8'e göre $(x_n)_n$ dizisi de yakınsaktır. □

Şimdi metrik uzaylarda Teorem 11'in tersinin de doğru olduğunu kanıtlayacağız. Ama bu teorem metrik uzaylardan daha genel topolojik uzaylarda doğru olduğundan, biz daha genel bir sonuç kanıtlayacağız.

Eğer bir topolojik uzayda sayılabilir bir yoğun altküme varsa, o uzaya ***ayrıştırılabilir uzay*** adı verilir. (İngilizcesi *separable space*.) Örneğin $\mathbb{R}$ ve hatta $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}$'nün varlığından dolayı ayrıştırılabilir bir uzaydır.

Önsav 13. *Dizisel tıkız bir metrik uzayı ayrıştırılabilir bir uzaydır.*

Kanıt: (X, d) dizisel tıkız bir metrik uzayı olsun. $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. (Daha sonra çeşitli $n > 0$ tamsayıları için $\varepsilon = 1/n$ alacağız.) $x_0 \in X$ herhangi bir nokta olsun. Eğer varsa, $B(x_0, \varepsilon)$ dışından bir x_1 noktası seçelim. Eğer varsa, $B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon)$ dışından bir x_2 noktası seçelim. Eğer varsa,

$$B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$$

dışından bir x_3 noktası seçelim. Bu prosedür bir zaman sonra bitmeli yoksa herhangi ikisi arasındaki mesafenin ε'dan büyük olduğu bir dizi elde ederiz ki böyle bir dizinin yakınsak bir altdizisi olamaz.

$n > 0$ herhangi bir tamsayı olsun. Yukarda yapılandan dolayı öyle

$$x_{n,0}, \ldots, x_{n,k(n)} \in X$$

noktaları vardır ki,

$$X = B(x_{n,0}, 1/n) \cup \ldots \cup B(x_{n,k(n)}, 1/n)$$

olur. Y, bütün bu $x_{n,i}$ noktalarından oluşan küme olsun:

$$Y = \{x_{n,i} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, i = 0, \ldots, k(n)\}.$$

Y elbette sayılabilir bir kümedir. Y'nin X'te yoğun olduğunu kanıtlayalım. $x \in X$ herhangi bir nokta ve $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. $n > 1$ doğal sayısı $1/n < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlasın.

$$X = B(x_{n,0}, 1/n) \cup \ldots \cup B(x_{n,k(n)}, 1/n)$$

olduğundan, bir $i = 0, \ldots, k(n)$ için,

$$x \in B(x_{n,i}, 1/n)$$

olur. Demek ki,

$$d(x, x_{n,i}) < 1/n < \varepsilon.$$

$x_{n,i} \in Y$ olduğundan, önsavımız kanıtlanmıştır. □

Karşıörnek 5. Ayrıştırılabilir bir metrik uzay illa dizisel tıkız olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Q}$ sayılabilirdir, dolayısıyla ayrıştırılabilir ama tıkız değildir elbette.

Önsav 14. *Bir metrik uzayın ayrıştırılabilir olması için sayılabilir bir tabanı olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Eğer metrik uzayın sayılabilir bir tabanı varsa, tabanın her açık kümesinden rastgele bir eleman seçelim. Bu elemanlardan oluşan küme elbette yoğun bir altküme oluşturur.

Şimdi (X, d) ayrıştırılabilir bir metrik uzay olsun. $Y \subseteq X$ sayılabilir ve yoğun bir altküme olsun.

$$\mathcal{T} = \{B(y, q) : y \in Y, q \in \mathbb{Q}\}$$

kümesinin bir taban olduğunu savlayıp kanıtlıyoruz. (Y ve $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduklarından, Y'nin sayılabilir olduğu bariz.) U herhangi bir açık küme ve $x \in U$ herhangi bir eleman olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ olur. q kesirli sayısı $0 < q < \varepsilon/2$ eşitsiliklerini sağlasın. Y yoğun olduğundan, $B(x, q)$ yuvarının içinde Y'den bir eleman vardır, diyelim y. Şimdi

$$B(y, q) \subseteq B(x, \varepsilon)$$

içindeliğini kanıtlayalım. $z \in B(y, q)$ ise,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < q + q = 2q < \varepsilon$$

olur. Demek ki,

$$x \in B(y, q) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U,$$

yani

$$x \in B(y, q) \subseteq U.$$

Bu da $\mathscr{T}$'nin bir taban olduğunu kanıtlar. □

Teorem 15. *Sayılabilir tabanı olan bir topolojik uzay dizisel tıkızsa tıkızdır.*

Kanıt: X dizisel tıkız olsun. $(U_i)_{i\in I}$, X'in açık bir örtüsü olsun. Bu örtünün sonlu bir altörtüsü olduğunu kanıtlayacağız. U_i'leri daha da incelterek U_i'ler yerine sayılabilir tabanın elemanlarını alıp I'nin en fazla sayılabilir sonsuzlukta olduğunu varsayabiliriz. Artık $I = \mathbb{N}$ varsayımını yapabiliriz. Eğer $i \in \mathbb{N}$ için,

$$U_i \subseteq \bigcup_{j<i} U_j$$

ise U_i'yi örtüden silebiliriz. Geriye hâlâ daha sonsuz sayıda U_i kaldığını varsayalım ve U_i'leri yeniden numaralandırıp her $i \in \mathbb{N}$ için,

$$U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j \neq \emptyset$$

varsayımını yapalım.

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j<i} U_j$$

olsun. $(x_i)_i$ dizisinin yakınsak bir altdizisi vardır. x bu altdizinin bir limiti olsun. $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, X'in bir örtüsü olduğundan, bir $i \in \mathbb{N}$ için

$$x \in U_i$$

olur. Demek ki sonsuz tane $j \in \mathbb{N}$ için

$$x_j \in U_i$$

olur. Ama o zaman da $x_j \in U_i$ özelliğini sağlayan bir $j > i$ bulunur ki bu da $(x_i)_i$ dizisinin tanımıyla çelişir. □

Sonuç 16. *Metrik uzaylarda dizisel tıkızlıkla tıkızlık eşdeğer kavramlardır.*

Kanıt: Teorem 11 ve sonrası. □

Tümden Sınırlılık

Heine-Borel Teoremi (Teorem 8) bir anlamda tam metrik uzaylara genelleştirilebilir. Önce bir tanım verelim.

Her $\varepsilon > 0$ için sonlu sayıda ε yarıçaplı yuvarlarla kaplanabilen bir metrik uzaya ***tümden sınırlı*** (*totally bounded*) adı verilir.

Bunun eşdeğer bir tanımı şöyledir: (X, d) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $d(X, F) < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan sonlu bir $F \subseteq X$ altkümesi varsa, o zaman X'e ***tümden sınırlı*** denir. Bu iki tanımın eşdeğer olduğunun kanıtı kolaydır ve okura bırakılmıştır.

Tümden sınırlı metrik uzayları sınırlıdır elbette ama bunun tersi doğru değildir, örneğin ayrık metrikle donatılmış sonsuz bir küme sınırlıdır ama tümden sınırlı değildir. Öte yandan $\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesinin tümden sınırlı olmasıyla sınırlı olması arasında bir ayrım yoktur. Bunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Tıkız metrik uzaylar tümden sınırlıdır elbette. Öte yandan tıkız olmayan tümden sınırlı metrik uzaylar vardır, örneğin $(0, 1)$ açık aralığı.

Alıştırmalar

22. Yukardaki iki tanımın eşdeğer olduklarını kanıtlayın.

23. Tümden sınırlı bir metrik uzayın altkümelerinin de tümden sınırlı olduğunu kanıtlayın.

24. $\mathbb{R}^n$'nin bir altkümesinin tümden sınırlı olmasıyla sınırlı olması arasında bir ayrım olmadığını kanıtlayın.

Teorem 17. *Tam bir metrik uzayın bir altkümesinin tıkız olması için, kapalı ve tümden sınırlı olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: Önce gerekliliği kanıtlayalım. Tümden sınırlılık bariz. Teorem 6 da tıkız bir altkümenin kapalı olması gerektiğini söylüyor.

Şimdi (X, d) tam bir metrik uzay olsun. X tam olduğundan, X'in her kapalı altkümesi de tamdır. Dolayısıyla X'in tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli. Sonuç 16'ya göre, Xin dizisel tıkız olduğunu kanıtlamak yeterli. Son olarak, X tam olduğundan, X'in her dizisinin bir Cauchy altdizisi olduğunu kanıtlamak yeterli.

$(x_n)_n$, bir dizi olsun. X'i sonlu sayıda 1 yarıçaplı yuvarlarla kaplayalım. Sonsuz sayıda n göstergeci için, dizinin x_n terimi bu yuvarlardan birinin, diyelim B_1'in içine düşer. Dizinin diğer terimlerini unutup, tüm terimlerin B_1'de olduğunu varsayalım. Şimdi B_1'i sonlu sayıda 1/2 yarıçaplı yuvarlarla kaplayalım. (B_1 de tümden sınırlıdır.) Sonsuz sayıda n göstergeci için, dizinin x_n terimi bu 1/2 yarıçaplı yuvarlardan birinin içine düşer, diyelim B_2'nin içine. Dizinin diğer terimlerini unutup, tüm terimlerin B_2'de olduğunu varsayalım. Böylece öyle $1/n$ yarıçaplı B_n yuvarları buluruz ki, her B_n'de diziden sonsuz sayıda terim vardır. Diziden bir $x_{n_1} \in B_1$ terimi seçelim. $n_2 > n_1$ için $x_{n_2} \in B_2$ seçelim. Sonra, $n_3 > n_2$ için $x_{n_3} \in B_3$ seçelim. Ve bunu böyle devam ettirelim. Eğer $k \geq \ell$ ise $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq 1/k$ olur. Dolayısıyla $(x_{n_k})_k$ bir Cauchy dizisidir. □

Bu altbölümün geri kalanını bu yazıda kullanmayacağız.

Önsav 18. *Eğer bir metrik uzayın bir A altkümesi tümden sınırlıysa, A'nın kapanışı da tümden sınırlıdır.*

Kanıt: $\varepsilon > 0$ olsun. A tümden sınırlı olduğundan A'yı, yarıçapı $\varepsilon/2$ olan sonlu sayıda yuvarla kaplayabiliriz; diyelim:

$$A \subseteq B(a_1, \varepsilon/2) \cup \ldots \cup B(a_n, \varepsilon/2).$$

O zaman,

$$\begin{aligned}\overline{A} &\subseteq \overline{B(a_1,\varepsilon/2) \cup \ldots \cup B(a_n,\varepsilon/2)}\\ &= \overline{B(a_1,\varepsilon/2)} \cup \ldots \cup \overline{B(a_n,\varepsilon/2)}\\ &\subseteq B(a_1,\varepsilon) \cup \ldots \cup B(a_n,\varepsilon)\end{aligned}$$

olur. □

Alıştırma 25. Bir (X, d) metrik uzayında, yukarıdaki kanıtta (zayıf bir versiyonu) kullanılan

$$\overline{B(a, r)} \subseteq \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$$

içindeliğini kanıtlayın. Eşitliğin doğru olmayabileceğini gösterin.

Sonuç 19. *Tam bir metrik uzayın bir altkümesi ancak ve ancak kapanışı tıkızsa tümden sınırlıdır.*

Kanıt: Altkümenin kapanışı tıkızsa, o zaman kapanış tümden sınırlıdır elbette, dolayısıyla altküme de tümden sınırlıdır.

Şimdi altkümenin tümden sınırlı olduğunu varsayalım. Yukardaki önsava göre altkümenin kapanışı da tümden sınırlıdır. Yukardaki teoreme göre de kapanış tıkızdır. □

Tıkızlığın Bir Başka Eşdeğer Koşulu

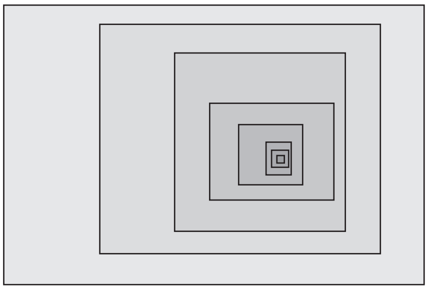
Tıkızlığın çok yararlı bir başka tanımı daha vardır. Bu kısa bölümde okurun her an karşısına çıkabilecek bu tanımdan söz edeyim.

X bir küme ve $\mathscr{E}$, X'in bir altkümeler kümesi olsun. Eğer $\mathscr{E}$ kümesinin sonlu sayıda (ama en az bir) elemanının kesişimi hiçbir zaman boşküme olmuyorsa, $\mathscr{E}$ kümesinin ***sonlu kesişim özelliği*** olduğu söylenir. (İngilizcesi "finite intersection property" ya da kısaca FIP, Türkçesi SKÖ olabilir.) Örneğin,

$$\mathscr{E} = \{[a, b] \cap \mathbb{Q} : a < \sqrt{2} < b\}$$

kümesi, sonlu kesişim özeliği olan bir kümedir. Ama $\mathscr{E}$'nin tüm altkümelerinin kesişimi boşkümedir.

Teorem 20. *Bir topolojik uzayın tıkız olması için gerek ve yeter koşul, sonlu kesişim özelliği olan her kapalı kümeler ailesinin kesişiminin boşküme olmamasıdır.*



İçiçe geçmiş tıkız kümelerin kesişimi (eğer biri boş değilse) boş olamaz.

Kanıt: X tıkız bir küme ve $\mathscr{E}$, X'in kapalı kümelerinden oluşan ve sonlu kesişim özelliği olan bir küme olsun. $\mathscr{E}$'nin tüm altkümelerinin kesişiminin boşküme olduğunu varsayalım. Demek ki,

$$\bigcap_{F\in \mathscr{E}} F = \emptyset;$$

yani

$$\bigcup_{F\in \mathscr{E}} F^c = X.$$

Ama F^c kümeleri açık. X tıkız olduğundan, sonlu sayıda $F_1, .., F_n \in \mathscr{E}$ için

$$F_1^c \cup \cdots \cup F_n^c = X$$

olmalı. Ama o zaman da

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$$

olur ki bu da $\mathscr{E}$'nin sonlu kesişim özelliğini sağlamasıyla çelişir.

Şimdi X'in sonlu kesişim özelliği olan her kapalı kümeler ailesinin kesişiminin boş olmadığını, ama X'in natıkız oluğunu varsayalım. Natıkızlığa tanık olarak, X'in sonlu altörtüsü olmayan bir $(U_i)_{i\in I}$ açık örtüsünü ele alalım. Sonlu sayıda U_i, X'i örtmeye yetmediğine göre, sonlu sayıda U_i^c kümesinin kesişimi boş olamaz. Varsayıma göre, U_i^c kümelerinin kesişimi de boş olamaz, yani tüm U_i kümelerinin bileşimi X olamaz. Bir çelişki. □

Sonuç 21. *Tıkız bir uzayda* $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ *bir kapalı kümeler zinciri olsun. Eğer hiçbir* C_n *boş değilse,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ *de boş değildir.*

Kanıt: Teorem 3'e göre, her C_n, tıkız bir kümenin kapalı bir altkümesi olduğundan tıkızdır. Sonuç bir önceki teoremden çıkar. □

Bir topolojik uzayın bir x elemanını alalım. Eğer $\{x\}$ açık bir kümeyse, x'e ***ayrık*** ya da ***tecrit edilmiş eleman*** (İngilzcesi *isolated point*) adı verilir.

Her ne kadar tıkız kümeleri sonsuza kadar yayılamayan kümeler olarak hayal etmemiz gerektiğini söylediysek de, bu hayalimiz bizi yanıltmasın, bir sonraki sonucun göstereceği üzere tıkız kümelerde bol bol eleman vardır.

Sonuç 22. *Ayrık noktası olmayan, boşkümeden farklı, tıkız ve Hausdorff bir topolojik uzay sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: Uzaya X diyelim. Önce kolay bir sav kanıtlayalım.

Sav. *$\emptyset \neq U \subseteq X$ açık bir küme ve $x \in X$ olsun. O zaman öyle bir $\emptyset \neq V \subseteq U$ açık kümesi vardır ki, $x \notin \overline{V}$ olur.*

Savın Kanıtı: U'da x'ten değişik bir y noktası seçelim. (x, U'nun bir elemanı olsa da olmasa da böyle bir nokta vardır çünkü x ayrık bir nokta değildir ve $\emptyset \neq U$.) X Hausdorff bir uzay olduğundan,

$$y \in V,\ x \in W,\ V \cap W = \emptyset$$

özelliklerini sağlayan V ve W açık kümeleri vardır. $V \cap U$ istenen özellikleri sağlar. Böylece savımız kanıtlanmış oldu.

Şimdi teoremi kanıtlayabiliriz. $f : \mathbb{N} \to X$ herhangi bir fonksiyon olsun. f'nin örten olamayacağını kanıtlayacağız.

Yukardaki savı kullanarak X'in öyle bir $(V_n)_n$ açık kümeler dizisini bulacağız ki,

$$f(n) \notin \overline{V}_n \text{ ve } \emptyset \neq V_{n+1} \subseteq V_n$$

olacak. Yukardaki savda $U = X$ alırsak, istediğimiz gibi bir V_0 açık kümesi olduğu belli. Şimdi istenildiği gibi $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \ldots \supseteq V_n$ açık kümelerinin seçildiğini varsayalım. Savda $U = V_n$ alarak, istediğimiz gibi bir V_{n+1} açık kümesi buluruz.

V_n açık kümelerinin kapanışını alırsak

$$\overline{V}_0 \supseteq \overline{V}_1 \supseteq \ldots \supseteq \overline{V}_n \supseteq \ldots$$

zincirini buluruz. Bir önceki sonuca göre bu dizinin kesişimi boşküme olamaz. Kesişimden bir x alalım. Bu x hiçbir $f(n)$'ye eşit olamaz çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) \notin \overline{V}_n \text{ ve } x \in \overline{V}_n.$$

Sonuç kanıtlanmıştır. □

Sonuç 23. $\mathbb{R}$*'nin boş olmayan her kapalı aralığı sayılamaz sonsuzluktadır.* $\mathbb{R}$ *sayılamaz sonsuzluktadır.*

Lebesgue Sayısı

Bir (X, d) metrik uzayının sınırlı bir A altkümesinin ***çapı***,

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır. $B(a, r)$ yuvarının çapı en fazla $2r$'dir. ($2r$'den de küçük olabilir!)

Aşağıdaki oldukça teknik önsav tıkız kümelerin açık örtülerinin çok küçük çaplı elemanlarının gereksiz olduğunu söylüyor.

Önsav 24 [Lebesgue Sayısı] *(X, d) tıkız bir metrik uzay ve $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ailesi, X'in açık bir örtüsü olsun. O zaman öyle bir $\delta > 0$ vardır ki X'in çapı en fazla δ olan her altkümesi $\mathcal{U}$ ailesinin bir elemanının (yani U_i'lerden birinin) altkümesidir.*

Kanıt: Eğer U_i'lerden biri X'e eşitse, kanıtlayacak bir şey yok. Bundan böyle hiçbir U_i'nin X'e eşit olmadığını varsayalım. $\mathcal{U}$ ailesinin sonlu bir $\mathcal{V}$ altörtüsünü seçelim. Diyelim,

$$\mathcal{V} = \{U_1, \ldots, U_n\}.$$

$C_i = U_i^c$ olsun. C_i kapalıdır. $d(x, C_i)$, x'in C_i'ye olan uzaklığı olsun. (Bkz. sayfa 57, gri sayfa.)

$$U_1 \cup \ldots \cup U_n = X$$

olduğundan,

$$C_1 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$$

olur. Demek ki X'in her x elemanı C_i kümelerinden en az birinin elemanı değildir ve, C_i kapalı olduğundan, $d(x, C_i)$ sayılarından en az biri pozitiftir (sayfa 57, gri sayfa) ve

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) > 0$$

olur. Böylece tanımlanan

$$f : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu da biliyoruz (sayfa 57, gri sayfa). X tıkız olduğundan, f minimum değerini alır. Bu minimum değer x_0'da alınmış olsun ve

$$\delta = f(x_0) > 0$$

olsun. B, yarıçapı δ'dan küçük bir altküme olsun. $x \in B$ olsun. Demek ki

$$B \subseteq B(x, \delta).$$

Şimdi, $d(x, C_1), \ldots, d(x, C_n)$ sayılarının en büyüğüne $d(x, C_i)$ diyelim. O zaman,

$$\delta \leq f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) \leq d(x, C_i)$$

olur. Demek ki

$$B(x, \delta) \cap C_i = \emptyset,$$

yani

$$B(x, \delta) \subseteq U_i.$$

Ama $B \subseteq B(x, \delta)$ olduğundan, bu son içindelik istediğimizi kanıtlar. □

X'in verilmiş bir $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ açık örtüsü için, yukardaki önsavdaki gibi bir $\delta > 0$ sayısına $\mathcal{U}$'nun ***Lebesgue sayısı*** adı verilir. Elbette bir Lebesgue sayısından daha küçük sayılar da Lebesgue sayılarıdır. Lebesgue sayılarının varlığını bir sonraki altbölümde kullanacağız.

Düzgün Süreklilik

Düzgün süreklilik, sürekliliğin çok özel bir halidir. Ama genel olarak tüm topolojik uzaylarda değil, sadece metrik uzaylarda geçerli olan bir kavramdır. Tanımı anımsatalım:

(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay ve

$$f : X \to Y$$

bir fonksiyon olsun. Önce f'nin sürekli olduğunun ne demek olduğunu anımsatalım. f'nin sürekli olması için f'nin X'in her x noktasında sürekli olması gerekmektedir; yani her $a \in X$ için şu özellik doğru olmalıdır:

Her $\varepsilon > 0$ *için öyle bir* $\delta > 0$ *olmalıdır ki, her* $x \in X$ *için*

$$d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(a, x) < \varepsilon.$$

Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, süreklilik

$$\forall a\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(a,x) < \varepsilon)$$

önermesine denktir. Buradaki δ sayısı verilmiş olan ε'a göre değişir elbette, ama a'ya göre de değişebilir, hatta çoğu zaman a'ya göre değişir. Bu yüzden kimi zaman δ yerine $\delta_{a,\varepsilon}$ yazılır.

Ama kimi zaman da δ sayısını a'dan bağımsız (sadece ε'a bağımlı) seçebiliriz. O zaman çok özel, çok daha güçlü bir süreklilik söz konusu olur. Bu durumda f'nin ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir. Yani eğer

Her $\varepsilon > 0$ *ve* X*'in her* a *ve* x *elemanları için*

$$d_X(a, x) < \delta \Rightarrow d_Y(a, x) < \varepsilon$$

önermesini sağlayan bir $\delta > 0$ *varsa*

o zaman f fonksiyonuna ***düzgün sürekli*** denir. Bunu daha biçimsel olarak yazacak olursak, düzgün süreklilik,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a\ \forall x\ (d_X(a,x) < \delta \Rightarrow d_Y(a,x) < \varepsilon)$$

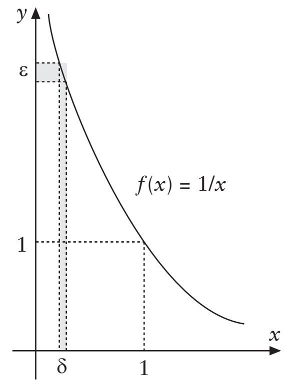
önermesine denktir. Burada "$\forall a$" ifadesinin en baştan ortalara, "$\exists \delta > 0$" ifadesinden sonraya gittiğine dikkatinizi çekerim: Verilmiş bir $\varepsilon > 0$ için **tüm** a ve x'ler için geçerli olan bir $\delta > 0$ bulunuyor. Ama artık a ile x arasında büyük bir ayrım yok, dolayısıyla a ve x yerine x ve y kullanırsak daha şık bir tanıma ulaşmış oluruz: Düzgün süreklilik

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \forall y\ (d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(x,y) < \varepsilon)$$

önermesine denktir.

Eğer $A \subseteq X$ ise ve $f_{|A}$ fonksiyonu düzgün sürekliyse, o zaman f'nin A üzerine ***düzgün sürekli*** olduğu söylenir.

Örnek. $(0, \infty)$ kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanan fonksiyon düzgün sürekli değildir çünkü a küçüldükçe δ sayısı küçülür.



Öte yandan (sınırlı ya da sınırsız) kapalı bir aralığa kısıtlarsak bu fonksiyon düzgün sürekli olur. Yani $f(x) = 1/x$ formülüyle tanımlanmış fonksiyon kapalı aralıklar üzerine düzgün süreklidir.

Düzgün sürekliliğin yararlarını daha ilerde göreceğiz ama tıkız kümelerden sözederken düzgün süreklilikten sözetmemek olmazdı.

Teorem 25. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay olsun. Eğer X tıkızsa, X'ten Y'ye giden her sürekli fonksiyon düzgün süreklidir.*

Kanıt: $f : X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ olsun. $(B(y, \varepsilon/2))_{y \in Y}$ yuvarlar ailesi Y'nin açık bir örtüsüdür. f sürekli olduğundan,

$$(f^{-1}(B(y, \varepsilon/2)))_{y \in Y}$$

ailesi de X'in bir açık örtüsüdür. $\delta > 0$ bu açık örtünün Lebesgue sayısı olsun. Şimdi $x_1, x_2 \in X$ olsun ve $d_X(x_1, x_2) < \delta$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x_1, x_2\}$ kümesinin çapı δ'dan küçüktür. Demek ki bir $y \in Y$ için,

$$\{x_1, x_2\} \subseteq f^{-1}(B(y, \varepsilon/2)),$$

yani

$$x_1, x_2 \in f^{-1}(B(y, \varepsilon/2)),$$

yani

$$f(x_1), f(x_2) \in B(y, \varepsilon/2),$$

yani

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le d_Y(f(x_1), y) + d_Y(y, f(x_2))$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. Bu da f'nin düzgün sürekliliğini kanıtlar. □

Alıştırma 26. $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olmadığını ama sınırlı ya da sınırsız kapalı aralıklar üzerine düzgün sürekli olduğunu kanıtlayın. Sonucu artan içbükey fonksiyonlar için genelleştirin.

Sayılabilir Tıkızlık

Eğer bir topolojik uzayın sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa o uzaya ***sayılabilir tıkız*** *denir.*

Karşıörnek 6. Her tıkız uzay sayılabilir tıkızdır elbet ama bunun tersi doğru değildir. Tersinin doğru olmadığına standart örnek ω_1 (sayılamaz ilk ordinal) üzerine kurulan "sıra topolojisi"dir. Bu uzay sayılabilir tıkızdır (okura alıştırma) ama bildiğimiz üzere tıkız değildir.

Teorem 26. *Dizisel tıkız bir topolojik uzay sayılabilir tıkızdır.*

Kanıt: X, dizisel tıkız bir topolojik uzay olsun. $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$, X'in sonlu örtüsü olmayan sayılabilir bir açık örtüsü olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in X \setminus (U_0 \cup \ldots \cup U_{n-1})$$

olsun. Demek ki U_n, ancak sonlu sayıda $i \in \mathbb{N}$ için x_i'yi içerir. $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisi yakınsaktır. x, $(x_n)_n$ dizisinin bir altdizisinin bir limiti olsun. $x \in U_n$ olsun. O zaman sonsuz tane $i \in \mathbb{N}$ için $x_i \in U_n$ olur ki bu da $(x_n)_n$ dizisinin seçimiyle çelişir. □

Alıştırma 27. ω_1'in sıra topolojisiyle sayılabilir tıkız olduğunu ama tıkız olmadığını kanıtlayın.

Teorem 27. *Sayılabilir tıkız bir topolojik uzay (dolayısıyla tıkız bir topolojik uzay da) yoğunlaşma noktası tıkızdır.*

Kanıt: Teorem 10'un kanıtına dikkatlice bakarsanız, aslında bu (daha güçlü) teoremin kanıtlandığını görürsünüz. □

Karşıörnek 7. Yoğunlaşma noktası tıkız bir uzay dizisel tıkız olmak zorunda değildir. Nitekim Karşıörnek 1'de X dizisel tıkız değilse, $X \times Y$ de dizisel tıkız olamaz ama yoğunlaşma noktası tıkızdır.

Metrik Uzaylarda Tıkızlık Kavramları

Şimdiye kadar birçok tıkızlık kavramı gördük:

1) Tıkızlık,
2) Dizisel tıkızlık,
3) Sayılabilir tıkızlık,
4) Yoğunlaşma noktası tıkızlık,

$2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ ve $1 \Rightarrow 3$ çıkarımlarının doğru olduklarını (Teorem 26, 27) ama ters çıkarımların genelde doğru olmadıklarını (Karşıörnek 1-7), öte yandan bunlardan bazılarının metrik uzaylarda denk kavramlar olduklarını gördük. Aslında metrik uzaylarda tüm bu tıkızlık kavramları birbirine denktir.

Teorem 28. *Bir metrik uzayın tıkız, dizisel tıkız, sayılabilir tıkız ya da yoğunlaşma noktası tıkız olması arasında ayrım yoktur, biri doğruysa diğerleri de doğrudur.*

Kanıt: Sonuç 16, Teorem 26, Teorem 27 ve yukardaki son iki alıştırmaya göre sadece yoğunlaşma noktası tıkız bir metrik uzayın dizsel tıkız olduğunu kanıtlamalıyız.

(X, d), yoğunlaşma noktası tıkız bir metrik uzay olsun. $(x_n)_n$, bu uzaydan bir dizi olsun.

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olsun. Eğer A sonluysa, elbette $(x_n)_n$ dizisinin sabit, dolayısıyla yakınsak bir altdizisi vardır. Eğer A sonsuzsa, varsayıma göre A'nın bir yoğunlaşma noktası vardır. Diyelim x. Şimdi x'e yakınsayan bir altdizi bulmak zor değildir: Her $k > 0$ doğal sayısı için,

$$B(x, 1/k) \cap A$$

kümesi sonsuzdur. Bu olguyu kullanarak, öyle

$$n_1 < \ldots < n_k < \ldots$$

göstergeçleri bulunabilir ki,

$$x_{n_k} \in B(x, 1/k)$$

olur. Kanıtımız tamamlanmıştır. □

Tychonoff Teoremi

İki (dolayısıyla sonlu sayıda) tıkız topolojik uzayın kartezyen çarpımının tıkız olduğunu gördük. Aynı sonuç sonsuz sayıda topolojik uzay için de geçerlidir ama kanıtı çok daha zordur. Şimdi Tychonoff Teoremi adı altında bilinen bu teoremi kanıtlayalım. Ama önce kendi başına değerli bir sonuç kanıtlayalım.

Teorem 29 [Alexander'ın Alttaban Teoremi]. *X bir topolojik uzay ve β, bu topolojik uzayın bir* *alttabanı olsun. X'in tıkız olması için yeter ve gerek koşul, β'nın elemanlarından oluşan X'in her örtüsünün sonlu bir altörtüsü olmasıdır.*

Kanıt: Gereklilik bariz. Yeterliliği kanıtlayalım. X'in tıkız olmadığını varsayalım. $\mathscr{P}$, X'in, sonlu altörtüsü olmayan açık örtülerinden oluşan küme olsun. $\mathscr{P}$'yi "altküme" olma ilişkisine göre sıralayalım. $\mathscr{P}$'ye Zorn Önsavı'nı [MD-2006-II, sayfa 46] uygulayacağız. Bu amaçla $\mathscr{P}$'den bir $\mathscr{Z}$ zinciri alalım. $\bigcup\mathscr{Z}$'nin de $\mathscr{P}$'de olduğunu kanıtlayacağız. $\bigcup\mathscr{Z}$'nin bir örtü olduğu besbelli. $\bigcup\mathscr{Z}$'nin sonlu bir altörtüsü olduğunu varsayalım. Diyelim $U_1, ..., U_n \in \bigcup\mathscr{Z}$ elemanları X'i örtüyor. Her $i = 1, ..., n$ için

$$U_i \in \mathscr{U}_i \in \mathscr{Z}$$

içindeliklerini sağlayan bir $\mathscr{U}_i$ örtüsü seçelim. $\mathscr{Z}$ bir zincir olduğundan, $\mathscr{U}_i$ örtülerinden biri, diyelim $\mathscr{U}_j$ diğerlerini kapsar. Demek ki her $i = 1, ..., n$ için

$$U_i \in \mathscr{U}_j$$

olur. Ama bu da $\mathscr{U}_j$'nin sonlu bir altörtüsü var demektir. Çelişki. Dolayısıyla $\bigcup\mathscr{Z} \in \mathscr{P}$ olur ve $\mathscr{P}$'ye Zorn Önsavı'nı uygulayabiliriz. Bir başka deyişli, X'in, sonlu altörtüsü olmayan maksimum bir açık örtüsü vardır. Bu açık örtüye $\mathscr{U}$ diyelim.

Şimdi $\mathscr{U} \cap \beta$'nın X'in bir örtüsü olduğunu kanıtlayacağız.

Diyelim $\mathscr{U} \cap \beta$, X'in bir örtüsü değil. Diyelim bir $x \in X$ noktası $\mathscr{U} \cap \beta$'nın elemanları tarafından örtülmüyor. x elbette $\mathscr{U}$'nun elemanlarından birindedir, diyelim U'da. U, x'i içeren açık bir küme olduğundan, β da topolojinin bir alttabanı olduğundan,

$$x \in V_1 \cap ... \cap V_n \subseteq U$$

ilişkilerini sağlayan $V_1, ... V_n \in \beta$ vardır. Demek ki her $i = 1, ..., n$ için $x \in V_i$. Ama $x \in X$ noktası $\mathscr{U} \cap \beta$'nın elemanları tarafından örtülmediğinden hiçbir V_i kümesi $\mathscr{U}$'da olamaz. Şimdi $\mathscr{U} \cup \{V_i\}$ örtüsüne bakalım. $\mathscr{U}$, sonlu örtüsü olmayan en büyük açık örtü olduğundan, $\mathscr{U} \cup \{V_i\}$ örtüsünün sonlu bir altörtüsü vardır. Demek ki $\mathscr{U}$'dan sonlu sayıda açık kümenin bileşimi olan bir Y_i için,

$$X = Y_i \cup V_i$$

olur. O zaman, elbette,

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^n Y_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right)$$

olur. Buradan da

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^n Y_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^n V_i\right) \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^n Y_i\right) \cup U,$$

yani

$$X = \left(\bigcup_{i=1}^n Y_i\right) \cup U$$

olur. Ama bu da X'in $\mathscr{U}$'nun sonlu sayıda elemanı tarafından örtüldüğü anlamına gelir. Çelişki. Demek ki $\mathscr{U} \cap \beta$, X'in bir örtüsü.

Ama bu örtü aynı zamanda β'nın elemanlarından oluşuyor. teoremin varsayımına göre $\mathscr{U} \cap \beta$'nın sonlu bir altörtüsü var. Bu altörtü elbette aynı zamanda $\mathscr{U}$'nun sonlu bir altörtüsüdür. Önsav kanıtlanmıştır. □

Kanıtta Zorn Önsavı'nı, dolayısıyla Seçim Aksiyomu'nu kullandığımıza dikkatinizi çekeriz. Ne bu önsav ne de bir sonraki Tychonoff Teoremi Seçim Aksiyomu olmadan kanıtlanabilir.

Teorem 30 [Tychonoff]. *$(X_i)_i$ bir topolojik uzay ailesi olsun. $\prod_i X_i$'nin tıkız olması için her X_i'nin tıkız olması gerek ve yeter koşuldur.*

Kanıt: $X = \prod_i X_i$ olsun.

İzdüşüm fonksiyonları sürekli olduklarından gereklilik belli. Yeterliliği kanıtlayalım.

Bir j göstergeci ve bir $U \subseteq X_j$ açık kümesi için,

$$\mathrm{pr}_j^{-1}(U) = \{x = (x_i)_i \in X : x_j \in U\}$$

olsun. Bu tür kümeler X'in bir alttabanını oluşturur. Bir önceki önsavı bu öntabana uygulayacağız.

$\mathscr{U}$, X'in $\mathrm{pr}_i^{-1}(U)$ türünden altkümelerinden oluşan herhangi bir örtüsü olsun. $\mathscr{U}$'nun sonlu bir altörtüsünü bulacağız. $\mathscr{U}$'da $X = \mathrm{pr}_i^{-1}(X_i)$'nin olmadığını varsayabiliriz.

Bir i göstergeci için,

$$\mathscr{U}_i = \{\mathrm{pr}_i^{-1}(U) \in \mathscr{U} : U \subset X_i\}$$

olsun. $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}_i$'lerin (ayrık) bileşimidir.

Bu $\mathscr{U}_i$'lerden biri X'in bir örtüsü olmalı: Çünkü aksi halde her i göstergeci için $\mathscr{U}_i$ tarafından örtülmeyen bir $x(i) \in X$ buluruz. Eğer

$$y_i = \mathrm{pr}_i(x(i)) \in X_i$$

tanımını yaparsak, o zaman X'in $(y_i)_i$ elemanı $\mathscr{U}_i$'lerin hiçbiri tarafından örtülmez, dolayısıyla bunların bileşimi olan $\mathscr{U}$ tarafından da örtülmez.

$\mathscr{U}_i$, X'in örtüsü olsun. O zaman,

$$\mathscr{A} = \{U \subseteq X_i : \mathrm{pr}_i^{-1}(U) \in \mathscr{U}_i\}$$

ailesi X_i'nin bir açık örtüsü olur. X_i tıkız olduğundan, $\mathscr{A}$'nın sonlu bir altörtüsü X_i'yi örter, diyelim

$$U_1, ..., U_n$$

X_i'yi örter. O zaman $\mathscr{U}_i$'nin (dolayısıyla $\mathscr{U}$'nun)

$$\mathrm{pr}_i^{-1}(U_1), ..., \mathrm{pr}_i^{-1}(U_n)$$

elemanları X'i örter. □

Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaşması

Bir topolojik uzay tıkız değilse tıkız değildir, yapacak bir şey yok. Ama uzayı tıkız bir topolojik içine (altuzay olarak) gömebiliriz. Ya da başka bir dille söyleyelim: Tıkız olmayan topolojik uzayı genişletip ve bu genişlemiş küme üstüne uygun bir topoloji koyarak, genişlemiş kümeyı tıkız bir topolojik uzaya dönüştürebiliriz. Hatta bunu orijinal uzayımız genişletilmiş kümenin yoğun bir altkümesi olacak biçimde bile yapabiliriz.

Bu dediklerimizi yapmanın, yani bir uzayı ***tıkızlaştırmanın*** değişik yöntemleri vardır. Değişik tıkızlaştırma yöntemler birbirinden tamamen değişik sonuçlar verebilirler. Her biri önemlidir.

En kolay tıkızlaştırma yöntemi, uzaya, "sonsuza" diye betimlenen bir yere, genellikle ∞ diye gösterilen yeni bir eleman eklemektir. Eleman eklemek yetmez tabii, bir de bu yeni küme üzerine (eski kümenin topolojisiyle uyumlu) bir topoloji koymak gerekir. Bu topoloji, eski uzayda "sonsuza gittiği hissedilen" dizilerin yeni uzayda artık ∞ elemanına yakınsayacak biçimde yapılır.

Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaşması. X herhangi bir topolojik bir uzay olsun. ∞, X'te olmayan yepyeni bir eleman olsun.

$$Y = X \cup \{\infty\}$$

olsun. Şimdi Y üzerine bir topoloji tanımlayacağız. Y'nin açık altkümeleri ya X'in açık altkümeleri (birinci türden kümeler) ya da X'in tıkız ve kapalı bir K altkümesi için

$$(X \setminus K) \cup \{\infty\}$$

biçiminde yazılan altkümeleri (ikinci türden kümeler) olsun. (Buradaki $X \setminus K$ kümesinin X'te açık olduğuna dikkatinizi çekeriz. Bundan böyle X'in bir A altkümesi için $X \setminus A$ yerine A^c yazacağız.)

Teorem 31. *Yukarda betimlenen kümeler Y üzerine bir topoloji tanımlarlar ve Y böylece tıkız bir topolojik uzay olur. Ayrıca X, Y'nin açık bir altkümesidir ve eğer X tıkız değilse, X, Y'de yoğundur.*

Kanıt: Önce betimlenen kümelerin bir topolojide açık altkümelerin uyması gereken kurallara uyduklarını gösterelim.

$\emptyset$, X'te açık olduğundan Y'de de açıktır. İkinci türden kümelerde $K = \emptyset$ alırsak, Y'nin de Y'de açık olduğunu görürüz.

Birinci türden iki açık kümenin kesişiminin açık olduğu belli.

Şimdi birinci türden bir $U \subseteq X$ açık kümesiyle, ikinci türden bir $K^c \cup \{\infty\}$ açık kümesi alıp bu ikisini kesiştirelim:

$$U \cap (K^c \cup \{\infty\}) = U \cap K^c = (U^c)^c \cap K^c = (U^c \cup K)^c.$$

Ama $U^c \cup K$, X'te kapalı olduğundan, bu kesişim birinci türden bir açık kümedir.

Şimdi de ikinci türden iki

$$K^c \cup \{\infty\} \text{ ve } L^c \cup \{\infty\}$$

açık kümesi alıp bu ikisini kesiştirelim. Bu kesişimin ikinci türden bir küme olduğunu kanıtlamak için

$$K^c \cap L^c = (K \cup L)^c$$

kümesinin X'teki tümleyeninin, yani $K \cup L$ kümesinin X'te kapalı ve tıkız olduğunu kanıtlamalıyız, ki bu da bariz bir şey.

Şimdi bileşime geçelim. Birinci türden kümelerin bileşiminin gene birinci türden küme olduğu belli. İkinci türden kümelerin bileşimine bakalım.

$$K_i^c \cup \{\infty\}$$

ikinci türden kümeler olsun (ve bunlardan en az bir tane olsun). Bunların bileşiminin gene ikinci türden olduğunu kanıtlamak için

$$\bigcup_i K_i^c = (\bigcap_i K_i)^c$$

kümesinin X'teki tümleyeninin, yani

$$\bigcap_i K_i$$

kümesinin X'te kapalı ve tıkız olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Teorem 3'e göre kapalı olduğunu kanıtlamak yeterli. Ama K_i'ler X'te kapalı, dolayısıyla kesişimleri de X'te kapalı.

Son olarak birinci türden açık bir kümeyle ikinci türden açık bir kümenin bileşiminin ikinci türden açık bir küme olduğunu kanıtlamalıyız. Bu da oldukça kolay: Okurun tahmin edeceği notasyonla, bu, $U \cup K^c = (U^c \cap K)^c$ eşitliğinden ve $U^c \cap K$ kümesinin kapalı ve K'nın (dolayısıyla $U^c \cap K$ kümesinin de) tıkız olmasından çıkar.

Böylece Y'nin bir topolojik uzay olduğu kanıtlanmış oldu. X'in bir altuzay olduğu ve açık olduğu çok bariz. Eğer X kapalı olsaydı, $\{\infty\}$ açık olurdu ve o zaman da X tıkız olurdu. Demek ki X tıkız değilse, X'in kapanışı X'ten büyük olmalı ama bu durumda da X'in kapanışının Y'ye eşit olmaktan başka şansı yok. □

Bu topolojiye X'in ***Alexandroff Tek Nokta Tıkızlaşması*** adı verilir. ♦

Çeşitli Alıştırmalar

28. X tıkız bir topolojik uzay ve $(f_n : X \to \mathbb{R})_n$ bir sürekli fonksiyonlar dizisi olsun. f_n dizisinin noktasal olarak f fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım, yani her $x \in X$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

olsun. Ayrıca $(f_n)_n$ artan bir dizi olsun, yani her n ve her x için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ olsun. Bir de ayrıca f'nin sürekli olduğunu varsayalım. $(f_n)_n$ dizisinin f'ye düzgün yakınsadığını kanıtlayın. Eğer X tıkız değilse ya da $(f_n)_n$ artan değilse düzgün yakınsaklığın her zaman doğru olmadığını gösterin.

29. X, tıkız ve Hausdorff bir uzay olsun. $\mathscr{A}$, X'in bir kapalı ve bağlantılı (geçen sayı, sayfa 63) altkümeler zinciri olsun (yani her $A, B \in \mathscr{A}$ için ya $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$ olsun). $\bigcap \mathscr{A}$'nın bağlantılı olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** C ve D, bileşimi $\bigcap \mathscr{A}$ olan $\bigcap \mathscr{A}$'nın ayrık iki açık altkümesi olsun. U ve V, sırasıyla, C ve D'yi içeren X'in ayrık iki açık altkümesi olsun. $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} (A \setminus (U \cup V))$ kümesinin boş olmadığını gösterin. X Hausdorff değilse bir karşıörnek bulun.

30. X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f : X \to Y$ kapalı, sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ tıkızsa X ve Y'nin tıkızlığının eşdeğer olduğunu kanıtlayın.

31. X topolojik bir uzay olsun. Eğer X'in her x noktasının, kapanışı tıkız olan bir komşuluğu varsa, o zaman X'e ***yerel tıkız*** denir. Y, X'in Alexandroff tek nokta tıkızlaşması olsun. Y'nin Hausdorff olması için X'in Hausdorff ve yerel tıkız olmasının yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

32. Bir topolojik uzayda herhangi iki x ve y noktası için, x'i içeren ama y'yi içermeyen açık bir küme varsa, o topolojik uzaya $\boldsymbol{T_1}$, bazen de ***Fréchet uzayı*** adı verilir. Hausdorff uzaylar T_1'dir ama bunun tersi doğru değildir, örneğin Fréchet topolojisi her zaman T_1'dir ama küme sonsuzsa Hausdorff değildir.

Bir X topolojik uzayında aşağıdakilerin denk olduğunu kanıtlayın.

a. X, T_1'dir.

b. Her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı bir kümedir.

c. X'in her altkümesi altkümeyi içeren açık altkümelerin kesişimidir.

d. Her sonlu küme kapalıdır.

e. X, Fréchet topolojisinden daha incedir.

f. Her $A \subseteq X$ ve her $x \in X$ için, x, A'nın bir yoğunlaşma noktasıdır ancak ve ancak x'i içeren her açık küme A'dan sonsuz sayıda eleman içeriyorsa.