Parçalayıp Birleştirmek

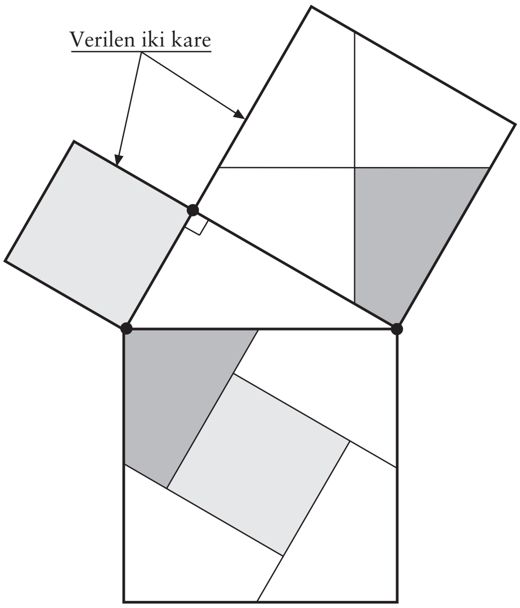
Gülnihal Bunehal

Önünüzde rastgele seçilmiş iki adet kare var. Bu iki kareyi sadece düz kesen bir testereyle (yani doğrularla) öyle sonlu sayıda parçaya ayırabilir misiniz ki, parçaları bir başka türlü birleştirip tek bir kare elde edesiniz?

Evet!

Ünlü Pisagor Teoremi'nin bir tür kanıtıdır.

Verilmiş iki karenin birer köşesini, aşağıdaki gibi 90 derecelik bir açı yapacak biçimde birbirine değdirin. (Aşağıdaki şekilden izleyin.) 90 derece



Elde edilen kare

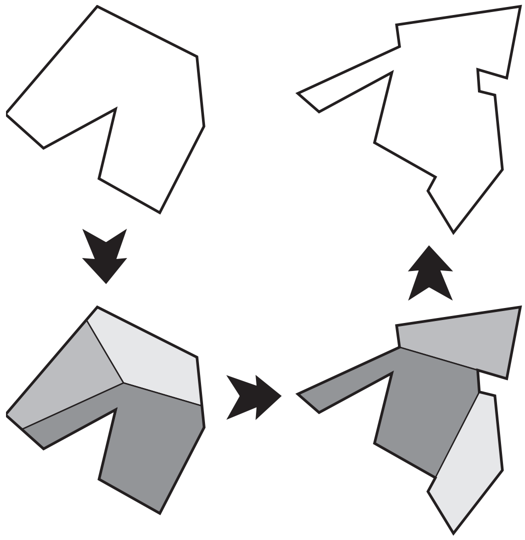
yapan iki kenarın birbirine değmeyen noktalarıyla birbirine değen noktaları bir dik üçgen oluştururlar. Verilen iki kareyi, resimdeki gibi toplam beş parçaya ayırarak ve sonra tekrardan birleştirerek, dik üçgenin hipotenüsüne oturtulan üçüncü kareyi elde edebiliriz. (Biçimsel kanıtı okura bırakıyoruz.)

Yukardaki şeklin her şeyi anlatması lazım.

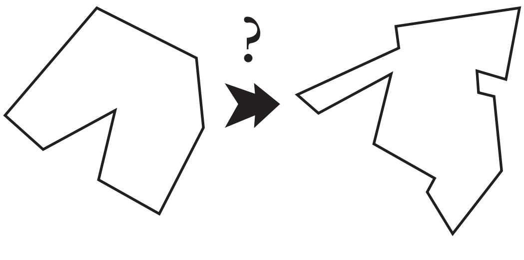
Pisagor Teoremi sayesinde, büyük kareyi dört parçaya bölerek ve küçük kareye hiç dokunmadan elde edilen toplam beş parçayı bir kare olacak biçimde tekrar bir araya getirebiliriz.

Bundan çok daha genel bir teorem doğrudur. Bu çok daha genel teoremi açıklayalım.

Eğer bir çokgeni sonlu sayıda doğru parçasıyla parçalara ayırırsanız ve sonra bu parçaları başka bir çokgen olacak biçimde tekrardan birleştirirseniz, elbette alanı aynı olan bir başka çokgen elde edersiniz. Yukardaki şekilde bir örnek var.



Peki, alanları aynı olan herhangi iki çokgen verilmişse, bunlardan birini yukardaki gibi parçalara ayırıp tekrar birleştirerek diğerini elde edebilir misiniz?



Yanıt gene olumlu.

Bu soruyu ilk soran Farkas Bolyai'dir. Bundan 220 – 1 yıl önce, 1790'da sormuştur. William Wallace 1808'de soruyu yanıtlamıştır. Wallace'ın kanıtından bihaber olan Paul Gerwien 1833'te aynı teoremi tekrardan kanıtlamıştır. Her iki kanıttan da bihaber olan Bolyai 1835'te, yani soruyu sorduktan tam 45 yıl sonra teoremi bir kez daha kanıtlamıştır.


Farka Bolyai

O çağlarda haberleşme şimdiki gibi çabuk değilmiş anlaşılacağı üzere.

Birazdan bu teoremi kanıtlayacağız. Her ne kadar bu sırayı takip etmeyeceksek de, kanıtımızı

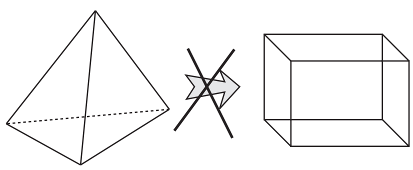
$$\text{Çokgen} \rightarrow \text{Üçgenler} \rightarrow \text{Dikdörtgenler} \rightarrow \text{Kareler} \rightarrow \text{Kare}$$

olarak özetleyebiliriz.

Benzer sorunun 3 boyutlu çokyüzlüler için sorulmasından daha doğal ne olabilir? Aynı hacimli iki çokyüzlü verilmişse, bunlardan birini düzlemlerle keserek sonlu parçaya ayırıp uzayda dönüp dönüştürerek diğer parçayı bulabilir miyiz?

19'uncu yüzyılın ikinci yarısının ve 20'nci yüzyılın birinci yarısının tartışılmaz en büyük matematikçisi Alman David Hilbert, 1900 yılındaki ünlü konferansında, çözülememiş önemli problemlerden biri olarak bu problemi sunar. Listesinde üçüncüdür bu problem. Problem Dehn tarafından Hilbert soruyu sorduktan hemen sonra negatif olarak çözülmüştür. (Bkz. yan sayfadaki gri kare.)

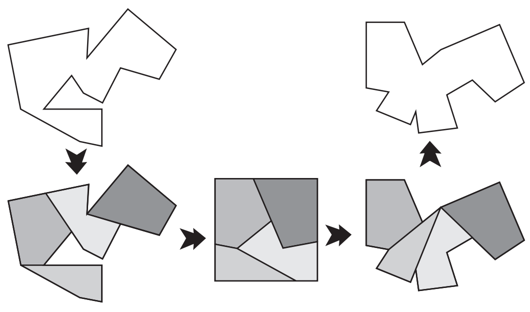
Örneğin, bir üçgenin alanının taban çarpı yükseklik bölü 2 olduğunu üçgeni dikdörtgenleştirerek kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Benzer kanıtı bir üçgen piramitin hacmi için yapabilir miyiz? Örneğin düzgün tetrahedrayı (tüm kenarları birbirine eşit dört yüzlü piramiti) düzlemlerle parçalara ayırıp tekrar birleştirerek bir dikdörtgenler prizması elde edebilir miyiz? Yanıt olumsuzdur. Kanıtı da yan sayfadaki gri karede verilmiştir.



Düzgün bir piramit kesip parçalayarak bir dikdörtgenler prizmasına dönüştürülemez.

Bu yazıdaki amacımız alanları aynı olan iki çokgenin yukardaki yöntemle birbirine dönüştürülebileceğini kanıtlamak.

Eğer bu yöntemle herhangi bir çokgeni bir kareye dönüştürebilirsek problemi çözmüş oluruz, çünkü o zaman her iki çokgenin de aynı kareye (alanlar eşit çünkü) dönüşebileceğini kanıtlamış oluruz ve bu işlemlerden birini ters çevirerek - yukardaki şekildeki gibi - bir çokgenden diğerine erişebiliriz.

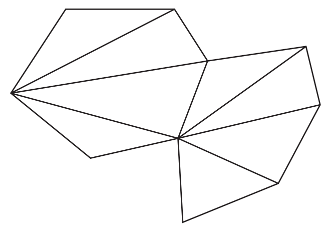


Demek ki bir çokgeni parçalara ayırarak bir kareye dönüştürebileceğimizi kanıtlamamız yeterlidir. Bunu kanıtlayacağız.

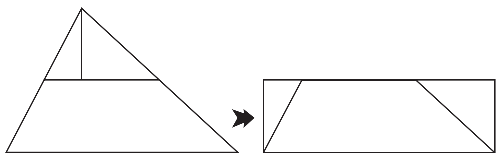
Bir çokgeni kolaylıkla (binbir değişik biçimde) üçgenlere bölebiliriz. Böylece kanıtın

$$\text{Çokgen} \rightarrow \text{Üçgenler}$$

kısmını kolaylıkla halletmiş oluruz.



Ayrıca bir üçgenden de bir dikdörtgen elde edebiliriz. bir örnek aşağıda ama bu örneği genelleştirmek işten bile değil.



Bir üçgen bir dikdörtgene dönüştürülebilir

Demek ki bir çokgenden birkaç dikdörtgen elde edebiliriz. Böylelikle kanıtın

$$\text{Üçgenler} \rightarrow \text{Dikdörtgenler}$$

kısmıyla da başa çıkmış oluyoruz.

Eğer bir dikdörtgenden sonlu sayıda kare elde edebilirsek, işimiz iş, çünkü iki kareden bir kare elde etmeyi bildiğimizden, sonlu sayıda kareden de bir kare elde edebiliriz. Yani kanıtın

$$\text{Kareler} \rightarrow \text{Kare}$$

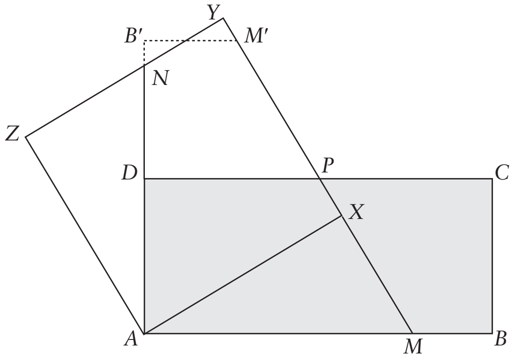
kısmını yazının başında kanıtladık

Dikdörtgeni Karelere Dönüştürme. $ABCD$, parçalayıp kareler oluşturmak istediğimiz herhangi bir dörtgen olsun. Gerekirse daha küçük dikdörtgenlere bölerek,

$$\frac{AB}{4} \leq BC \leq \frac{AB}{2}$$

varsayımını yapabiliriz. Bu eşitsizlikleri sağlayan bir dikdörtgenden bir kare elde edeceğiz.

Alanı $ABCD$ dikdörtgeninin alanına eşit olan öyle bir $AXYZ$ karesi inşa edelim ki, XY kenarı DC kenarını tam ortadan (aşağıdaki şekilde P noktasında) kessin. $ABCD$ dikdörtgenini bu kareye dönüştüreceğiz.



XY doğrusu AB kenarını M noktasında kessin. AD doğrusu da ZY kenarını N noktasında kessin. AZN üçgeniyle AXM üçgeni aynı üçgenler, biri diğerinin 90 derece döndürülmüşü. $ADPX$ dörtgeni hem $ABCD$'de hem de $AXYZ$'de ortak. Geriye $MBCP$ dörgenini $YNDP$ dörtgenine dönüştürmek kaldı. $MBCP$ dörgeniyle $M'B'DP$ dörtgenleri birbirine eş, biri diğerinin P noktasına göre yansıması. Bu yansımayı yaptıktan sonra, $M'B'DP$ dörtgeninden şekildeki gibi küçük bir üçgen kesersek aynen $YNDP$ dörtgenini elde ederiz. (Şekilde noktalı doğrularla gösterilmiş.) Demek ki $ABCD$ dikdörtgenini dört parçaya bölerek bir kare elde edebiliriz.

Böylece alanları aynı olan herhangi iki çokgenden birini doğrularla parçalayıp toparlayarak diğerine dönüştürebiliriz. ♦

Kaynakça

[1] Titu Andreescu, *Mathematical Olympiad Chalenges*, Springer.
[2] www.planetMath.org
[3] Timothy G. Abbott, Zachary Abel, David Charlton, Eric D. Demaine, Martin L. Demaine, Scott D. Kominers, *Hinged Dissections Exist*, http://arxiv.org
[4] J.-P. Sydler, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Commentarii Mathematici Helvetici 40, 43-80, 1965.

Dehn Teoremi

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için,
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
ve
$$f(\pi) = 0$$
eşitliklerini sağlayan herhangi bir
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
fonksiyonu alalım. P herhangi bir çokyüzlü olsun. e bu çokyüzlünün herhangi bir kenarı olsun. Bu kenarı var eden yüzler arasındaki açıya $\theta(e)$ diyelim. e kenarının uzunluğu da $|e|$ olsun. Şimdi çokyüzlünün tüm e kenarları için $f(\theta(e))|e|$ sayılarını toplayalım. Elde edilen toplam ***Dehn değişmezi*** olarak bilinir ve $D(P)$ olarak yazılır:
$$D(P) = \sum\nolimits_{e,\ P\text{'nin kenarı}} f(\theta(e))|e|.$$
$D(P)$ elbette f fonksiyonunun seçimine göre değişir ve bu özellikleri sağlayan pek çok f fonksiyonu vardır. Biz bunlardan birini şimdilik sabitleyelim.

Eğer P çokyüzlüsü düzlemlerle kesilip P_1, P_2, ..., P_k çokyüzlüleri elde edilirse, o zaman
$$D(P) = D(P_1) + D(P_2) + \cdots + D(P_k)$$
eşitliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak çok zor değildir (sadece biraz zordur). Dolayısıyla eğer bir P çokyüzlüsü kesilip biçilerek Q çokyüzlüsüne dönüşürse, o zaman $D(P) = D(Q)$ olmak zorundadır.

Şimdi dört yüzlü ve birim kenarlı bir T düzgün piramiti ele alalım. Düzlemler arasındaki açı da θ olsun. θ/π sayısının kesirli olmadığı bilinir. Dolayısıyla
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
ve
$$f(\pi/2) = 0 \text{ ve } f(\theta) = 1$$
eşitliklerini sağlayan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. (Böyle bir fonksiyonun varlığı Seçim Aksiyomu'yla kolaylıkla kanıtlanabilir. İpucu: $\mathbb{R}$'yi $\mathbb{Q}$ üzerine bir vektör uzayı olarak görün ve $\pi/2$ ve θ sayılarını içeren bir taban seçin.) $f(\pi/2) = 0$ olduğundan,
$$f(\pi) = f(\pi/2) + f(\pi/2) = 0 + 0 = 0$$
olur. Dehn değişmezini bu f ile hesaplayalım. Böylece $D(T) = 6$ buluruz. Öte yandan hangi P dikdörtgenler prizması alınırsa alınsın, açı $\pi/2$ olduğundan ve $f(\pi/2) = 0$ olduğundan, $D(P) = 0$ olur. Demek ki T ile P birbirlerine dönüştürülemezler.

1965'te J.-P. Sydney, f, sabit 0 fonksiyonu değilse, aynı Dehn değişmezii olan çokyüzlülerin sonlu sayıda parçaya kesilip diğerine dönüştürülebileceğini kanıtlamıştır [4].