Elipsin Çevre Uzunluğunun En Kısa Olduğu Ülke

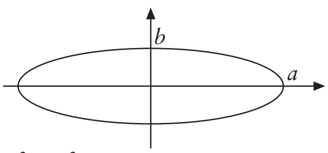
İlham Aliyev* / *ialiev@akdeniz.edu.tr*

Bu yazımızın başlığını gören okurumuz, kuzey ülkelerin birinden bahsedeceğimizi düşünebilir. Çünkü soğukta, örneğin, metal tellerin kısaldığı biliniyor ve dolayısıyla, demir telden yapılmış bir elipsin çevre uzunluğunun soğuk kuzeyde, sıcak güneye göre bir az daha kısa olacağı beklenen bir şeydir.

Bizim bahsedeceğimiz elips metal telden yapılmamış, eti kemiği olmayan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

formülüyle belirlenen klasik ve çok ünlü bir eğridir. Bu eğrinin uzunluğunun, güzelim ülkemizde gerçeğinden çok daha kısa olduğunu biliyor muydunuz?



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ denklemiyle verilen elips

"Olay" şöyle gelişti.

TUBİTAK'ın, Fen Liseleri Matematik öğretmenleri için Antalya'da düzenlemiş olduğu çalışmalara, analizin çeşitli dallarından seminer vermek üzere ben de davet edilmiştim. Nerden açıldı bilmiyorum ama konu döndü dolaştı elipsin çevre uzunluğuna geldi.

Seminerde bulunan öğretmenlerin (hem de fen liseleri matematik öğretmenlerinin!) hemen hepsi elipsin çevre uzunluğunun

$$(a+b)\pi$$

formülüyle hesaplandığını söyledi. Öğretmenlerimiz, bu formülü çok iyi bildiklerini ve çok sayıda test sorusuna uygulayarak hiç "fire vermediklerini" ısrarla söylüyorlardı.

Ezbere dayalı eğitim sisteminin fesatlarını az çok biliyordum, ama böylesiyle hiç karşılaşmamıştım. Öğretmenlerle aramızda aşağıdakine benzer bir diyalog geçti:

– Nereden çıkardınız bu $(a+b)\pi$ formülünü? diye sordum.

– Bu formülü bilmeyen yok ki... Biz bu formülü hep uyguluyoruz ve hep doğru çıkıyor...

Neredeyse "bilmeyen cahildir" diyeceklerdi!

– Nereye uyguluyorsunuz formülü?

– Test sorularına!

– Tabii ki, test sorularına uygularsanız "doğru" çıkar. Çünkü o soruları sizin için (ve masum öğrencilerimiz için) hazırlayanlar da aynı yanlış formülü kullanıyorlar ve sizin beş şık içinden bulup işaretlediğiniz "doğru" da o zatların "doğrusudur". Çocuklarımız da, yüzlerini görmedikleri amcaların "doğrularını" bulmak için çabalıyorlar.

– Hayır Hocam, formül kesinlikle doğrudur. Çünkü elipsin kapsadığı bölgenin alan formülü $ab\pi$ olduğu gibi, çevre uzunluğu da $(a+b)\pi$'dir ve her ikisinde de $b=a$ koyarsak, sırasıyla, yarıçapı a olan dairenin alanı ve çemberin uzunluğu elde edilir.

– Elipsin alan formülünün $ab\pi$ olduğu doğrudur. Gönül isterdi ki, çevre uzunluğu formülü de $(a+b)\pi$ kadar basit olsun. Ama, maalesef, böyle değildir ve basit bir formülün olmaması da matematikçilerin suçu değildir.

– Hayır Hocam, biz bu formülü iyi biliriz...

O anda kendimi, cenazedeki hoca gibi hissettim: "Rahmetli elipsi nasıl bilirdiniz?" "İyi bilirdik... Çevre uzunluğu da $(a+b)\pi$'dir..."

Fen Liseleri Matematik öğretmenlerinin neden $(a+b)\pi$ formülü üzerinde ısrar ettiklerini anlamaya başlamıştım: formülde $b=a$ konulduğunda - olması gerektiği gibi - çemberin uzunluğu elde edilir ve bu da formülün doğruluğunun "kanıtı" oluyor. Bir özel durumu, genelin dolaylı kanıtı olarak kabul ediyorlar.

Bir televizyon programında, Ortadoğu uzmanı Hüsnü Mahalli'nin şöyle bir konuşmasını hatırlıyorum:

– Söylediklerimi, bir örnekle kanıtlayayım...

Sosyal bilimlerde "ispatlar" böyle yapılır ve ortaya atılan iddiayı destekleyen bir iki örnek ispat

* Akdeniz Üniversitesi öğretim üyesi.

sayılır. Çünkü o bilimlerde "istisnalar kaideyi bozmaz..." Matematikte tam tersinedir: Bir değil, milyarlarca örnek ispat sayılmadığı gibi, tek bir ters örnek bile koskoca bir iddiayı çürütür.

Her sorunun çözümüne bir buçuk dakika zaman tanıyan eğitim sisteminde, formüllerin hiç sorgulanmaması ve neredeyse bir ayet gibi kabul edilmesi elbette doğaldır.

Oysa liselerimizde çok değerli, çok zeki öğretmenlerimizin olduğunu biliyorum; eğer bu öğretmenler

$$\ell = (a + b)\pi$$

formülünü sorgulamaya zaman ayırsalardı, onun yanlış olduğunu hemen anlarlardı.

Fen liseleri matematik öğretmenleriyle

$$\ell = (a + b)\pi$$

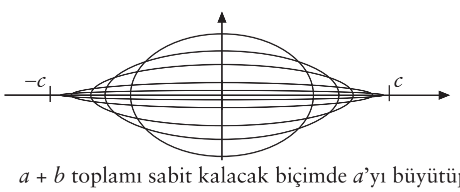
muhabbetinin yapıldığı günün akşamı evde, lise son sınıfta okuyan oğluma, elipsin çevre uzunluğu ile ilgili neler bildiğini sordum. Söz konusu uzunluğun $(a + b)\pi$ olduğunu ve kitapların da böyle yazdığını söyledi. O an için elinde bulunan kaynağı gösterdi: **ÖSS Analitik Geometri, Konu Anlatımı**, Güvender Yayınları, Kasım 2008. Sayfa 210'da aynen şöyle yazıyor:

$$\text{elipsin çevresi} = (a + b)\pi.$$

Hemen sonra da bu formül uygulanarak bir soru çözülüyor.

Maalesef durum böyle.

Matematikçi olarak, hepimiz kitap ve makaleler yazarız ve bazen de hata yaparız. Fakat, bu hata o hatalardan değil. Burda durum daha farklı ve çok daha vahim: Söz konusu olan, bin yılların elipsidir. Birileri okullarda çocuklarımıza çok yanlış şeyler öğretiyor (ayet gibi ezberletiyor) ve bundan kimsenin haberi yok!



$a + b$ toplamı sabit kalacak biçimde a'yı büyütüp b'yi küçültürsek,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemiyle verilen elips giderek yassılaşır ve $a + b$ uzunluğunda bir doğru parçasına dönüşür.

Şimdi de $\ell = (a + b)\pi$ formülünün yanlış olduğunu gösterelim.

Önce şu gözlemi yapalım: $\ell = (a + b)\pi$ formülü aslında a'ya ve b'ye göre değil, $a + b$'ye göre değişiyor. Yani $a + b$ saysısı aynı olduğunda, elipsin çevresi bu formüle göre hep aynı çıkar... Madem öyle biz de $a + b$ sabit kalacak biçimde, a'yı büyütüp b'yi küçültelim.

c bir sabit olsun. $a + b = c$ eşitliğini koruyarak, a'yı c'ye, b'yi de 0'a çok çok yaklaştıralım. Uzun ve yassı bir elips elde ederiz.

Aşağıdaki şekilden de görüleceği üzere yassı elipsin çevresi $4c$'ye çok yakındır. Oysa formül bize

$$\ell = (a + b)\pi = c\pi$$

verir, ki bu da

$$\ell = (a + b)\pi = c\pi < 3{,}2c < 4c$$

eşitsizliklerinden dolayı bir çelişkidir.

Böylece, küçük b ve büyük a'lar için

$$\ell = (a + b)\pi$$

formülünün çok ciddi hatalar verdiği görülüyor. Aslında formülün doğru olduğu tek durum, $b = a$ (çember) durumudur.

Doğal olarak, şöyle bir soru çıkar: Elipsin çevre uzunluğunu ifade eden formül yok mudur? Tabii ki, vardır. Ancak bu formül hiç basit değildir, bir integralle ifade edilir.

Elipsin uzunluğunu hesaplama çabası, matematiğin özel bir dalının - eliptik integraller teorisinin - ortaya çıkmasına neden olmuştur. Elipsin uzunluğunu ifade eden basit formülün olmaması uygulamada çok büyük sorunlar yaratmaz çünkü herhangi bir belirli integrali, dolayısıyla elipsin çevresini de, istenilen kadar az hata ile hesaplayan sayısal yöntemler ve güçlü bilgisayar programları vardır. Aslında biz, yarıçapı verilmiş olan çemberin de uzunluğunu tam olarak bilmiyoruz ki... Çünkü

$$\ell = 2\pi r$$

formülünde, r'yi bilmiş olsak bile, π irrasyonel sayısının onluk açılımında virgülden sonra sonsuz çoklukta (ve düzensiz!) rakam bulunduğundan, yarı çapı verilmiş olan çemberin uzunluğunu kesin olarak hesaplayamayız.

Son Not: Bunu liseli oğluma söylediğimde, önünde şapka çıkaracağım bir yanıt aldım: yarı çapı $1/\pi$ olan çemberin uzunluğu, tam olarak 2'dir! ♠