Kapak Konusu: Türev

Geniş halk yığınlarına

Türev

Ali Nesin* / *anesin@nesinvakfi.org*

Hızlı giden bir arabada geçen şöyle bir konuşma hayal edin.

Çocuk şoföre soruyor:

– Şu anki hızımız ne kadar Şoför Amca?

– Arabanın hız göstergeci bozuk çocuğum... Ama bir saattir yoldayız ve bu bir saatte 60 km yol gittik. Demek ki hızımız saatte 60 km.

– Ama bu, son bir saatteki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

– Son on dakikada 20 km yol gittik evladım. Demek ki hızımız saatte 120 km.

– Ama bu, son on dakikadaki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

– Son beş dakikada 11 km yol gittik yavrum. Demek ki hızımız saatte 132 km.

– Ama bu, son beş dakikadaki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

– Son bir dakikada 2,5 km yol gittik canımın içi. Demek ki hızımız saatte 150 km.

– Ama bu, son bir dakikadaki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

– Son on saniyede 500 m yol gittik bitanem. Demek ki hızımız saatte 180 km.

– Ama bu, son on saniyedeki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

– Son bir saniyede 52 m yol gittik başımın belası. Demek ki hızımız saatte $52 \times 60 \times 60$ m = 187,2 km.

– Ama bu, son bir saniyedeki ortalama hızımız, ben şu anki hızımızı soruyorum.

– Elinin körü! Kaza yapacağım şimdi...

– Şu anki hızımız ne kadar?

– Seni okula yollayanda kabahat! Düşünüyorum... Patlamadın ya!

– Şu anki hızımız ne kadar?

– Hız dediğin şey, yol bölü zamandır evlat, yani belirli bir zaman süresinde alınan mesafenin o süreye olan oranıdır. Sen bana **şu anki** hızımızı soruyorsun. “Şu an” demekle ne demek istiyorsun? Şu an ne kadar uzundur, kaç saniye ya da salise sürer?

– Ben şu anki hızımızı bilmek istiyorum o kadar... Şu anki hızımız ne kadar?

– Son 1 saniyedeki ortalama hızımızla yetinemez misin?

– Hayır! Şu anki gerçek hızımızı bilmek istiyorum. Tam tamına şu anki...

– Yani son 0 saniyedeki ortalama hızmızı bilmek istiyorsun, öyle mi?

– Aynen!

– Son 0 saniyede 0 metre yol aldık. Daha hızlı gidemediğimiz için kusura bakma! Son 0 saniyede durduk da diyebilirsin... Dolayısıyla son 0 saniyedeki ortalama hızımız 0/0’dır. Ayrıntılı hesapları sana bırakıyorum... Ne de olsa okula giden sensin, ben değilim...

xxx

Hikâyemiz bitti!

İlkel ve absürd belki ama önemli ve felsefi bir noktaya parmak basan bir hikâye.

Son 0 saniyedeki ortalama hız nasıl hesaplanabilir ki? Gidilen yol yok ki, hız olsun!

İnanması belki zor ama 0 saniyede gidilen ortalama hızı hesaplamak mümkündür; bu ortalama hıza da o anki hız denir!

Bir örnekle anlatmaya çalışalım. Diyelim araba t’inci saniyede t^2 metrede.

$$x(t) = t^2$$

olsun. Demek ki araba başlangıçta, yani $t = 0$ iken, $0^2 = 0$ metrede. Araba,

1 saniye sonra $1^2 = 1$ metrede,

2 saniye sonra $2^2 = 4$ metrede,

3 saniye sonra $3^2 = 9$ metrede,

10 saniye sonra $10^2 = 100$ metrede,

12,3 saniye sonra $12{,}3^2 = 151{,}29$ metrede.

Genel olarak, t saniye sonra araba t^2 metrede olacak.

Görüldüğü üzere araba giderek hızlanıyor. Geçen her saniye bir önceki saniyeden daha fazla yol katediyor. İlk saniyede 1, ikinci saniyede 3, üçüncü saniyede 5 metre yol katediyor.

---

1 Bu yazının bir versiyonu NTV BLM dergisinin Haziran 2010 sayısında yayımlanmıştır.

Diyelim arabanın 5 saniye sonraki anlık hızını, yani 5'inci saniyeden sonra (ya da önce!) geçen 0 saniye içindeki ortalama hızını hesaplamak istiyoruz. Bunu yapmanın zor, hatta galiba imkânsız olduğunu anladık. Bunun yerine, arabanın 0'ıncı saniye ile 5'inci saniye arasındaki, yani ilk 5 saniyedeki ortalama hızını hesaplayalım: İlk beş saniyede araba 25 metre gittiğine göre, arabanın ilk 5 saniyedeki ortalama hızı

$$25/5 = 5 \text{ m/s}$$

dir.

Arabanın 5 ila 8'inci saniyeler arasındaki ortalama hızını da hesaplayabiliriz. 8'inci saniyede araba $8^2 = 64$ metrede. 5'inci saniyede ise $5^2 = 25$ metredeydi. Demek ki 5 ile 8 saniye arasında geçen 3 saniyede araba,

$$x(8) - x(5) = 8^2 - 5^2 = 64 - 25 = 39 \text{ m}$$

yol gitmiş. Dolayısıyla arabanın bu 3 saniyedeki ortalama hızı,

$$39/3 = 13 \text{ m/s}.$$

Hesaplar şöyle yapılıyor (ilkokul seviyesindeki hesaplardan korkmayacağınızı umuyoruz!):

$$\frac{x(8)-x(5)}{8-5} = \frac{64-25}{3} = \frac{39}{3} = 13.$$

5 ila 7'nci saniyeler arasındaki ortalama hızı hesaplayalım:

$$\frac{x(7)-x(5)}{7-5} = \frac{49-25}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

5 ila 6'ncı saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(6)-x(5)}{6-5} = \frac{36-25}{1} = \frac{11}{1} = 11.$$

5 ila 5,5'inci saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(5,5)-x(5)}{5,5-5} = \frac{30,25-25}{0,5} = \frac{5,25}{1/2} = 10,5.$$

5 ila 5,1'inci saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(5,1)-x(5)}{5,1-5} = \frac{26,01-25}{0,1} = \frac{1,01}{1/10} = 10,1.$$

5 ila 5,01'inci saniyeler arasındaki ortalama hız:

$$\frac{x(5,01)-x(5)}{5,01-5} = \frac{25,1001-25}{0,01} = \frac{0,1001}{1/100} = 10,01.$$

Ortalama hızlar sanki giderek 10'a daha fazla yaklaşıyorlar.

Bir de 4,99'uncu saniye ile 5'inci saniye arasındaki ortalama hızı hesaplayalım, bakalım 10 m/s'ye yakın bir hız çıkacak mı?

$$\frac{x(5)-x(4,99)}{5-4,99} = \frac{25-24,9001}{0,01} = \frac{0,0999}{1/100} = 9,99.$$

Çıktı! Galiba bir gerçek yakaladık!

Tüm göstergeler, arabanın tam 5'inci saniyedeki hızının 10 m/s olduğunu gösteriyor!

Bu durumda 0/0, 10'a eşit mi oluyor acaba diye sormaktan kendimizi alamıyoruz herhalde!

Yukardaki işlemleri, 5 ila 5 + *h* saniyeleri arasında yapalım. Arabanın 5 ile 5 + *h*'inci saniyeler arasındaki ortalama hızı nedir? İşte yanıt:

$$\frac{x(5+h)-x(5)}{(5+h)-5} = \frac{(5+h)^2-5^2}{h} = \frac{10h+h^2}{h} = 10+h.$$

Yani 5 ila 5 + *h* saniyeleri arasındaki ortalama hız,

$$10 + h$$

dir.

$h = 3$ ise, $10 + 3 = 13$,
$h = 2$ ise, $10 + 2 = 12$,
$h = 1$ ise, $10 + 1 = 11$,
$h = 0,5$ ise, $10 + 0,5 = 10,5$,
$h = 0,1$ ise, $10 + 0,1 = 10,1$,
$h = 0,01$ ise, $10 + 0,01 = 10,01$,
$h = -0,01$ ise, $10 - 0,01 = 9,99$

olur; aynen yukarda bulduğumuz gibi...

Amacımız 5 ila 5 + 0 saniyeleri arasındaki ortalama hızı hesaplamaktı. 5 ila 5 + *h* saniyeleri arasındaki ortalama hız

$$10 + h$$

olduğuna göre 5 ila 5 + 0 saniyeleri arasındaki ortalama hız

$$10 + 0,$$

yani 10 olur!

Daha doğrusu "10 olmalı". Çünkü daha önce 5 ila 5 saniye arasındaki ortalama hızın ne anlama geldiğini bilmiyorduk, daha yeni yeni bunun ne anlama gelmesi gerektiğini anlamaya başlıyoruz.

Yaptıklarımıza dikkatle bakalım.

Yazının başındaki hikâyede felsefi bir problem vardı: Belli bir andaki hızı sormak saçmaydı; belli bir anda hız olamazdı... Çünkü belli bir anda gidilen yol 0 metredir ve belli bir anda geçen süre 0 saniyedir. Dolayısıyla belli bir andaki hızı bulmak için 0'ı 0'a bölmek gerekir ve 0 da 0'a bölünemez.

Ama sonra, giderek daha kısa zaman süresindeki ortalama hızları bularak, yanıtın ne olması gerektiğini tahmin ettik.

Yaptığımız hesaplara bir kez daha bakalım:

$$\frac{x(5+h)-x(5)}{(5+h)-5} = \frac{(5+h)^2-5^2}{h} = \frac{10h+h^2}{h} = 10+h.$$

Bu hesaplarda *h*'nin 0 olmadığını varsaydık. Nitekim, ilk üç terimde *h* yerine 0 koyarsanız, yazması günah sınıfına giren 0/0 ifadesini bulursunuz. Bu hesaplar gerçekten de $h \neq 0$ değilken geçerlidir.

Öte yandan son terimde, yani $10 + h$ teriminde bal gibi $h = 0$ alabiliriz. İlk üç terimde bunu yapamıyorduk, ama son terim buna izin veriyor, çünkü sondaki eşitliği elde etmek için pay ve paydadaki h'leri sadeleştirdik ve böylece 0/0 belirsizliğini ortadan kaldırdık.

Şimdi 5 saniye yerine t alalım, bakalım ne olacak. $t + h$ ile t saniyeleri arasındaki ortalama hızı,

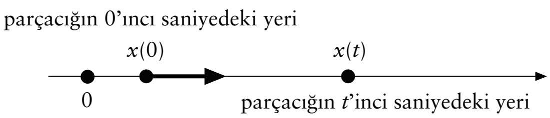
$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = \frac{2th + h^2}{h} = 2t + h$$

olarak buluruz. Bu ifade, en sağdaki terimden de görüleceği üzere, h ne kadar küçükse o kadar çok $2t$'ye yakındır. Her ne kadar eşitlikler $h = 0$ iken bir saçmalık veriyorsa da, h'yi 0 yapmadan 0'a çok yaklaştırabiliriz ve sonuç $2t$'ye çok yakın bir sayı çıkar.

Bu durumda, arabanın t'inci saniyedeki hızının $2t$ olduğunu söyleriz.

Şimdi artık hızın matematiksel tanımını verebiliriz.

Hızın Tanımı. Araba yerine, bir doğru üstünde yol alan noktasal bir parçacık ele alalım. Diyelim t saniye sonra bu parçacık $x(t)$ noktasında. Parçacığın



belli bir t zamanındaki (anlık) hızının tanımını yapmaya hazırlanalım.

h, 0'dan farklı çok çok küçük bir sayı olsun.

$t + h$'inci saniyede parçacık $x(t + h)$ metrededir.

t'inci saniyede ise parçacık $x(t)$ metredeydi.

Demek ki parçacık, $t + h$ ile t saniye arasında geçen h saniye boyunca

$$x(t + h) - x(t)$$

kadar yol almıştır. Dolayısıyla, $t + h$ ile t saniye arasındaki ortalama hızı,

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

dır. Bu ifadede $h = 0$ alamayız, yoksa daha önce olduğu gibi 0/0 saçmalığını buluruz. Ama belki de bu ifadeyle oynayarak, belki yukardaki gibi bazı sadeleştirmeler yaparak, ifadeyi öyle bir hale getirebiliriz ki, en sonda elde ettiğimiz ifadede $h = 0$ almaya hak kazanırız...

Yukarda yazdığım matematiksel olarak çok doğru olmadı. Kendimizi biraz daha düzgün ifade edelim.

Eğer

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

ifadesi, h çok çok küçükken, ama 0'dan farklıyken, belli bir v sayısına çok çok yakın oluyorsa, o zaman v sayısına parçacığın t'inci saniyesindeki ***hızı*** adını verelim.

Yukardaki araba örneğinde,

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = 2t + h$$

bulmuştuk. Bu ifade, h ne kadar küçükse, o kadar çok $2t$'ye yakındır. Demek ki arabanın t'inci saniyedeki hızı $2t$'dir.

Örnek: Bir örnek daha verelim. Diyelim parçacık, t'inci saniyede,

$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$

metrede. Parçacığın t saniye sonraki hızını bulalım. Yukarda söylenenleri harfiyen yapalım: Ortalama hızı,

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \frac{\dfrac{1}{1+t+h} - \dfrac{1}{1+t}}{h} = \frac{\dfrac{(1+t)-(1+t+h)}{(1+t)(1+t+h)}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{-h}{(1+t)(1+t+h)}}{h} = \frac{-1}{(1+t)(1+t+h)}$$

buluruz. Burada $h \neq 0$. Ama şimdi h'yi 0'a çok çok çok yakın alalım. O zaman, en sağdaki ifade,

$$\frac{-1}{(1+t)^2}$$

sayısına çok çok yakın olur. (Hesapların en sonundaki h'yi - baştakileri değil - utanıp sıkılmadan 0 yapın!) Parçacığın tam t saniye sonraki hızı budur. Eğer t'inci saniyedeki hızı $v(t)$ olarak yazarsak,

$$v(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

olur.

Negatif bir hız bulduk. Bu da pek şaşırtıcı değil çünkü parçacık 0'ıncı saniyede

$$x(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

metrede ama örneğin 10 saniye sonra,

$$x(10) = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$$

metrede, yani başladığından daha da geride. Bir başka deyişle parçacık geri geri gidiyor! Dolayısıyla hızı negatif çıkmalı... Her şey olması gerektiği gibi...

Parçacığın hareketi hakkında biraz fikir edinmek için parçacığın bazı t zamanlarındaki konumunu ve hızını belirleyelim:

t	$x(t)$	$v(t)$
0	1	-1
1	1/2	$-1/4$
2	1/3	$-1/9$
3	1/4	$-1/16$
4	1/5	$-1/25$

Yukardaki tablodan şunlar anlaşılıyor: 0'ıncı saniyede 1 metrede olan parçacık, saniyede -1 metre hızla yola çıkıyor, zaman geçtikçe 0 metreye doğru giderek daha fazla yaklaşıyor (bkz. ikinci sütun) ama dikkat ederseniz giderek yavaşlayarak yaklaşıyor (bkz. üçüncü sütun), çünkü t büyüdükçe parçacığın hızı yavaşlıyor. "Sonsuz zaman sonra", yani t "sonsuz olduğunda", parçacık saniyede 0 metre hızla 0 noktasına varıyor.

Türev. Yukarda yapılanlar

$$x(t) = t^2$$

ve

$$x(t) = \frac{1}{1+t}$$

fonksiyonlarının türevini almaktan başka bir şey değildir. Açıklayalım.

Verdiğimiz örneklerde mesafe zamanla değişiyordu; biz de mesafenin zamana göre değişim hızına/oranına baktık. Bazen de hacim ısıyla değişir, ya da ısı basınçla değişir, ya da sınavda alınan not çalışma saatiyle değişir, ya da dergi ve gazetelerin satışı magazin haberlerinin çokluğuyla değişir. Velhasıl, bir nicelik bir başka niceliğe göre değişebilir. Eğer bir niceliğini bir başka nicelik cinsinden bir fonksiyon olarak yazabilirsek, bu durumda bazen, aynen arabanın hızında olduğu gibi, değişen niceliğin hangi hızla değiştiği sorusu sorulabilir.

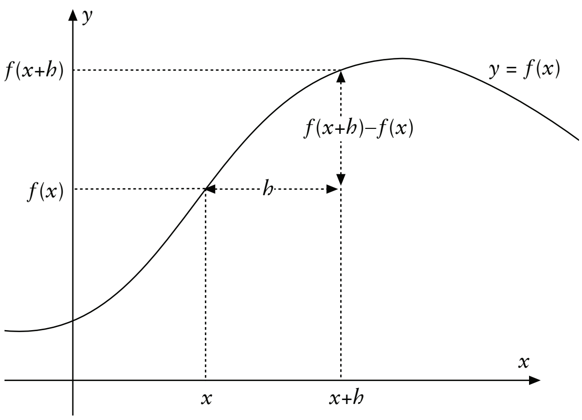
Bir üstteki paragrafı matematiksel olarak geliştirelim.

Gerçel sayılardan gerçel sayılara giden bir

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu ele alalım. $f(x)$, x'e göre değişir. Örneğin $f(x) = x^2$ ya da x'in bir başka fonksiyonu olabilir. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise, $f(x)$ de bir gerçel sayıdır. Amacımız $f(x)$'in x'e göre değişim hızını bulmak.

Bir $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı sabitleyelim. Ayrıca, h, 0'dan farklı ama çok küçük bir sayı olsun. h'yi, $\pm 0{,}0001$ gibi ufacık, hatta daha da küçük değişken



bir sayı olarak düşünebilirsiniz, yeter ki 0 olmasın. x sabit, ama h değişecek, giderek 0'a yaklaşacak. f fonksiyonunun, x ile $x + h$ arasındaki değişimi

$$f(x + h) - f(x)$$

dir. (Yukarıdaki şekle bakınız.) Demek ki f fonksiyonunun x ile $x + h$ arasındaki ortalama değişim hızı,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dir. **Eğer** bu oran, h çok çok küçükken (ama 0'dan farklıyken her zaman olduğu gibi) belli bir sayıya **çok çok yakınsa**, bu oranın çok yakın olduğu bu sayı $f'(x)$ olarak gösterilir ve bu sayının adına "f'nin x'teki ***türevi***" denir. Bütün bu söylediklerimiz matematiksel dilde,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

eşitliğiyle ifade edilir. Bu yazılım,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

oranının "h, 0 olmadan 0'a giderken limiti" anlamına gelir.

Yukarda iki örnek verdik:

$$f(x) = x^2 \text{ ise } f'(x) = 2x$$

ve

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ ise } f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

(Yukarda $f(x)$ yerine $x(t)$ almıştık ama bu kadar değişiklik olsun.)

Bir başka örnek daha verelim.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$ olsun. Her ne kadar bu fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerine değil de sadece negatif olmayan sayılar üzerinde tanımlanmışsa da, bozuntuya vermeyin, pek bir şey değişmeyecek. f'nin belli bir $x > 0$ sayısındaki türevini hesaplayalım.

Önce

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

oranını hesaplayalım:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \frac{(x+h)-(x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Bu bulduğumuz f'nin $x + h$ ile x arasındaki değişim oranı. Şimdi h'yi çok çok çok küçük alırsak, en sondaki ifade

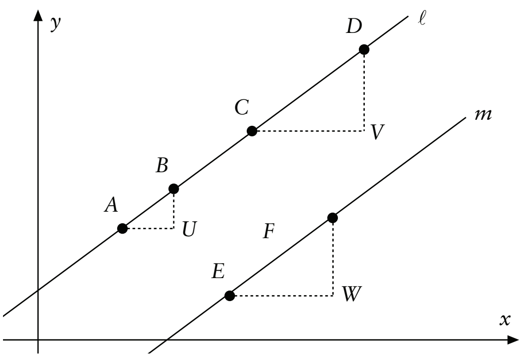
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

sayısına çok yakın olur (hesapların en son satırında h'yi 0 alabilirsiniz, buna hakkınız olmasa da!) Demek ki, $f(x) = \sqrt{x}$ ise,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olur.

Türevin Geometrik Yorumu. Düzlemde dikey olmayan herhangi bir ℓ doğrusu alalım ve bu doğ-



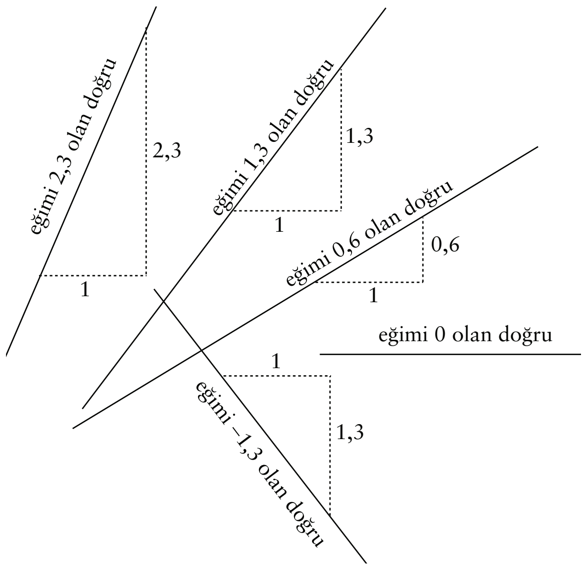
ru üstünde yukardaki şekildeki gibi dört değişik A, B, C, D noktası seçelim. Bu toprakların yetiştirdiği en müstesna kişilerden biri olan Tales'in yedi düvelin bildiği meşhur teoreminden dolayı,

$$\frac{BU}{AU} = \frac{DV}{CV}$$

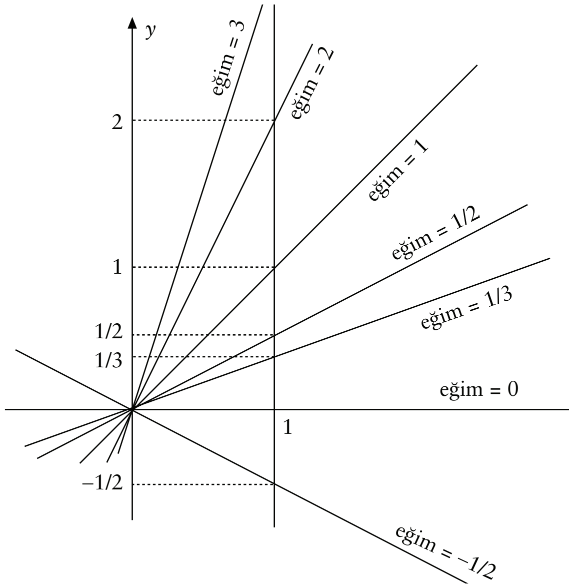
olur. Bu eşitlik ℓ doğrusu üstünde alınan **her** A, B, C, D noktaları için geçerli olduğundan, bu oran doğrunun bir değişmezidir. Bu orana doğrunun ***eğimi*** adı verilir. Ama dikkat, eğer doğru yukardaki şekildeki gibi yukarı çıkıyorsa, eğim pozitif hesaplanır, aşağı iniyorsa negatif hesaplanır.

ℓ'ye paralel bir m doğrusu alalım. Bu doğruyu da yukardaki şekilde gösterdik. Gene Tales Teoremi'ne göre m doğrusunun eğimi ℓ doğrusunun eğimine eşittir. Demek ki paralel doğruların eğimleri aynıdır ve aynı eğimli doğrular birbirine paraleldir.

Doğrunun eğimi, yatay olarak bir birim gidildiğinde doğrunun kaç birim yukarı çıktığı (+) ya da kaç birim aşağıya (–) indiğidir.



Eğimi 1 olan doğrular x ve y eksenleriyle 45 derece açı yapan doğrulardır. Eğimi 0 olan doğrular x eksenine paralel doğrulardır. Eğimi pozitif olan doğrular yukarı çıkarlar, eğimi negatif olan doğrular aşağı inerler. O noktasından geçen bir-

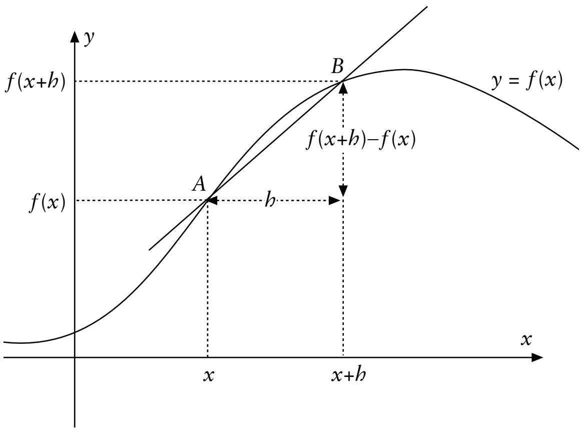


kaç doğru ve eğimleri yukardaki şekilde gösterilmişlerdir

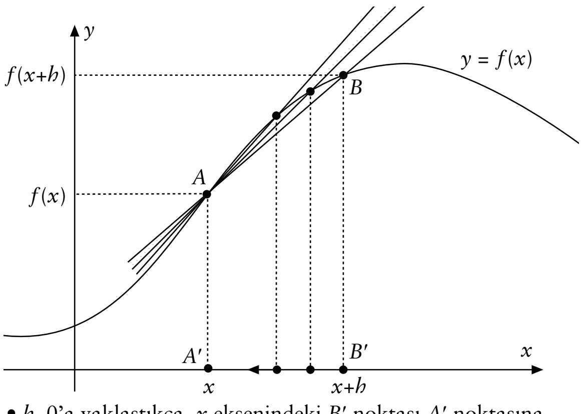
Bu önbilgiden sonra türev konumuza geri dönelim. Yine herhangi bir f fonksiyonu alalım ve f fonksiyonunun grafiği üzerinde

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

oranını geometrik olarak yorumlayalım. Fonksiyonun grafiğinin resmedildiği ve aşağıya aktardığımız şekle geri dönelim. Kolayca görüleceği üzere yukardaki oran şekildeki AB kirişinin eğimidir.

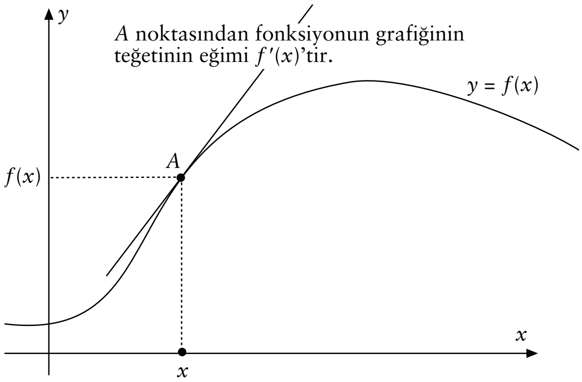


Unutmayın ki x bir sabit ama h değişiyor, h, 0'a doğru yolculuk yapıyor. Demek ki A noktası sabit ama B noktası grafiğin üstünde h değiştikçe hareket ediyor. Bu hareketi bir sinema filmi gibi izleyelim.



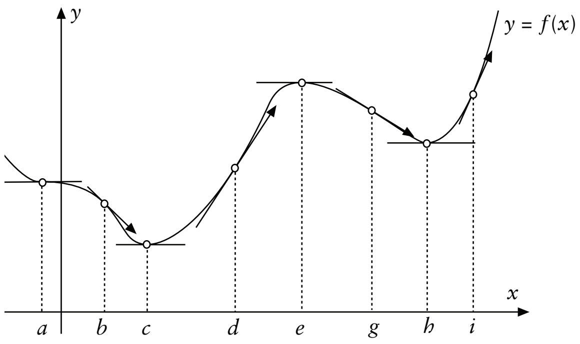
- h, 0'a yaklaştıkça, x eksenindeki B' noktası A' noktasına doğru gider.
- B' noktası A' noktasına doğru gittikçe B noktası grafik üzerinde kalarak A'ya doğru kayar.
- B, A'ya doğru kaydıkça, AB kirişleri giderek daha fazla teğete benzerler.
- "En sonunda", h, 0'a "sonsuz" yaklaştığında, AB kirişleri fonksiyonun grafiğine A noktasında teğet olurlar.
- Dolayısıyla kirişlerin eğimi de teğetin eğimi olur.
- Demek ki f fonksiyonunun x noktasındaki türevi, A noktasından fonksiyonun grafiğine çekilen teğetin eğimidir.
- Yani türev denen şey aslında teğetin eğimidir.

Yukardaki şekilden de görüleceği üzere, h sayısı 0'a gittikçe, B'nin izdüşümü olan B' noktası A'nın izdüşümü olan A' noktasına yaklaşır. B noktası da mecburen A noktasına doğru gider, ama fonksiyonun grafiğinin üstünden giderek gider. AB kirişleri de böylece giderek daha fazla A noktasından teğete benzemeye başlarlar ve h ne kadar 0'a yaklaşırsa, AB kirişi o kadar çok teğete benzer. Bu



arada oranlara tekabül eden AB kirişlerinin eğimlerine ne olur? Onlar da doğal olarak giderek daha fazla teğetin eğimine eşit olurlar. Sonuç? Sonuç şu ki, bir f fonksiyonunun bir x noktasındaki türevi, fonksiyonun grafiğine $(x, f(x))$ noktasında çekilen teğetin eğimidir.

Bu sonucun müthiş sonuçları vardır. Örneğin, fonksiyonun türevi bir aralıkta pozitifse, fonksi-



f fonksiyonunun türevi a, c, e ve h noktalarında 0.
b ve g noktalarında negatif (fonksiyon azalıyor).
d ve i noktalarında pozitif (fonksiyon artıyor).
c ve h noktalarında fonksiyon yerel minimum değer alıyor.
e noktasında fonksiyon yerel maksimum değer alıyor.
a noktasında fonksiyon ne yerel maksimum ne de yerel minimum olur, ama dışbükeyken içbükey olur.

yon o aralıkta artar, ne de olsa teğetin eğimi pozitifse, teğet yukarıya doğru meğillidir; aksi halde fonksiyon azalır. Fonksiyon yerel maksimum ve minimum değerlerini fonksiyonun türevinin 0 olduğu noktalarda alır. Vs.

İlerleyen sayfalarda ve sayılarda bundan çok daha fazlasını bulacaksınız. ♥