Bir Deste Kâğıdı İkiye Bölme Oyunu

Oya Böler

Oldukça basit, hatta biraz fazla basit bir oyunla başlayalım: İki oyuncu bir deste kâğıtla (ya da bir küme taşla) oyuna başlıyor. Oyuncular sırayla önlerindeki destelerden birini ikiye bölüyorlar. Tek kâğıtlık desteler ikiye bölünemezler elbette. Hamle yapamayan, yani önünde birer kâğıtlık desteler bulan oyuncu oyunu kaybeder.

Diyelim oyuncular 6 kâğıtlık bir desteyle oyuna başladı. Birinci oyuncu, ilk hamlesinde desteyi 4+2 diye iki desteye ayırabilir. Sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu bu iki desteden birini ikiye ayıracak. Diyelim, 4 kâğıtlık desteyi 1+3 diye ikiye ayırdı. Şimdi birinci oyuncunun önünde 1+3+2 kâğıtlık üç deste var. İlk desteden artık hamle yapılamaz (dolayısıyla dilersek bu desteyi oyundan atabiliriz.) Oyun böylece devam eder. Mesela oyun şöyle devam edebilir.

Birinci Oyuncu: $6 \to 4+2$
İkinci Oyuncu: $4+2 \to (1+3)+2$
Birinci Oyuncu: $1+3+2 \to 1+(1+2)+2$
İkinci Oyuncu: $1+1+2+2 \to 1+1+(2+1)+1$
Birinci Oyuncu: $1+1+2+1+1 \to 1+1+(1+1)+1+1$
İkinci Oyuncu: $1+1+1+1+1+1 \to$ hamle yok!

İkinci oyuncu yapacak hamle bulamadığından oyunu kaybeder.

İki soru akla geliyor: 1) Acaba ikinci oyuncu daha iyi oynasaydı bu oyunu kazanabilir miydi? 2) Acaba birinci oyuncu kötü oynasaydı bu oyunu kaybedebilir miydi?

Her iki sorunun da yanıtı olumsuz: 6 kâğıtlık desteyle başlayan bu oyunu oyuncular nasıl oynarlarsa oynasınlar hep birinci oyuncu kazanır, çünkü oyun hep 5 hamle sürer.

100 kâğıtlık bir desteyle başlanan bir oyun da 99 hamle sürer, dolayısıyla -tek sayılı hamleleri birinci oyuncu yaptığından- bu oyunu da birinci oyuncu kazanır.

Genel olarak, n kâğıtlık bir desteyle başlanan oyun, nasıl oynanırsa oynansın hep $n - 1$ hamle sürer. Dolayısıyla n çiftse oyunu birinci oyuncu, tekse ikinci oyuncu kazanır:

Teorem. *n kâğıtlık bir desteyle başlanan oyun, nasıl oynanırsa oynansın tam $n - 1$ hamle sürer. Dolayısıyla eğer n çiftse birinci oyuncu, tekse ikinci oyuncu oyunu kazanır.*

Kanıt: Teoremi n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Eğer $n = 1$ ise, yani destede tek bir kâğıt varsa, o zaman oyunda hiçbir hamle yapılamaz ve oyun 0 hamle sürer. Bu durumda teorem kanıtlanmıştır.

Şimdi n'den az kâğıtlık desteyle başlanan oyunlarda teoremin doğru olduğunu varsayıp, teoremi n kâğıtlık desteyle başlanan oyunlar için kanıtlayalım. Birinci oyuncu ilk hamlesini yapsın: n kâğıtlık desteyi ikiye bölsün, diyelim desteyi a ve b kâğıtlık iki desteye böldü. (Bu, oyunun birinci hamlesiydi.) Elbette a ve b sayıları n'den küçüktür. Ayrıca $a + b = n$ olur.

Şimdi ikinci oyuncunun önünde biri a kâğıtlık, diğeri b kâğıtlık iki oyun var. $a < n$ olduğundan, a kâğıtlık oyun, tümevarım varsayımına göre, $a - 1$ hamlede biter. Aynı nedenden b kâğıtlık oyun $b - 1$ hamlede biter.

Demek ki oyun toplam,

$$1 + (a - 1) + (b - 1)$$

hamle sürer.

$$1 + (a - 1) + (b - 1) = (a + b) - 1 = n - 1$$

eşitliğinden dolayı teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Bu saçmasapan oyunun kurallarını değiştirerek oyunu ilginçleştirelim: Bundan böyle bir deste tam ortadan ikiye bölünemesin, örneğin 6 kâğıtlık bir deste 3+3 diye ikiye ayrılamasın. Tek sayılı destelere bu kuralın bir etkisi olamaz. Gene hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybetsin. (Bu yazıda ele alacağımız tüm oyunlarda hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybedecek.)

Önünde sadece 1 ya da 2 kâğıtlık desteler bulan oyuncu oyunu kaybeder elbette.

Bu oyunları hangi oyuncu nasıl oynayarak kazanır? Bu yazıda bu oyunları analiz edeceğiz ve bunu yaparken oyunlar kuramının birkaç önemli kavramını ve ilkesini keşfedeceğiz.

1 ve 2 kâğıtlık destelerle oynanan oyunları birinci oyuncu kaybeder, yani ikinci oyuncu kazanır.

3 kâğıtlık bir desteyle oynanan oyunlarını birinci oyuncu ilk (ve tek) hamlesinden sonra kazanır.

4 kâğıtlık bir desteyle oynanan bir oyunu ikinci oyuncu kazanır, çünkü ilk hamlesinde birinci oyuncu oyunu (mecburen) 1+3 oyununa dönüştürür; ikinci oyuncu da oyunu 1+1+2 ya da 1+2+1 oyununa dönüştürmek zorundadır ve böylece oyunu kazanır.

Basit İlke: *Her oyun her hamleden sonra bir başka oyuna dönüşür.*

Yukardaki oyunlar pek zevkli değildi çünkü oyuncuların yapabilecekleri tek bir hamle vardı. Oysa 5 kâğıtlık desteyle oynanan oyunda birinci oyuncunun iki farklı hamlesi vardır: Oyunu 3+2 ya da 4+1 oyununa dönüştürebilir.

1 ve 2 kâğıtlık destelerle oynanamayacağından, 1 ya da 2 kâğıtlık desteleri kale almayabiliriz. Örneğin 5+4+2+2+1 oyunuyla 5+4 oyunu (ve 4+5 oyunu) aslında aynı oyunlar, aynı olmasa da eşdeğer ya da birbirine denk oyunlar. Bundan böyle 1 ve 2 kâğıtlık desteleri göstermeyeceğiz.

Ne diyorduk? Birinci oyuncu 5 oyununu 4 ya da 3 oyununa dönüştürebilir. 3 oyununa dönüştürürse kaybedeceği belli. Öte yandan 4 oyununa dönüştürürse kazanacaktır. Demek ki 5 oyununu birinci oyuncu iyi oynayarak (oyunu 4 oyununa dönüştürerek) kazanır.

Tanım: *Birinci oyuncunun kazanan stratejisi olduğu oyunlara A, ikinci oyuncunun kazanan stratejisi olduğu oyunlara B oyunları diyelim.*

Yukardaki basit analizlerle 1, 2 ve 4 oyunlarının *B*, 3 ve 5 oyunlarının ise *A* oyunları olduklarını gördük. Bulduklarımızı özetleyelim:

$$1 \mapsto B,$$
$$2 \mapsto B,$$
$$3 \mapsto A,$$
$$4 \mapsto B,$$
$$5 \mapsto A.$$

5 oyununu birinci oyuncunun nasıl kazandığını anımsayalım: Oyunu 4 oyununa dönüştürürse kazanıyor. Bunu çok daha basit biçimde şöyle görebiliriz: 4 oyunu bir *B* oyunu olduğundan ve ikinci oyuncu 4 oyununun birinci oyuncusu olacağından, ikinci oyuncu önüne sunulan bu 4 oyununu kaybedecektir, yani 5 oyununu 4 oyununa dönüştürerek birinci oyuncu kazanacaktır.

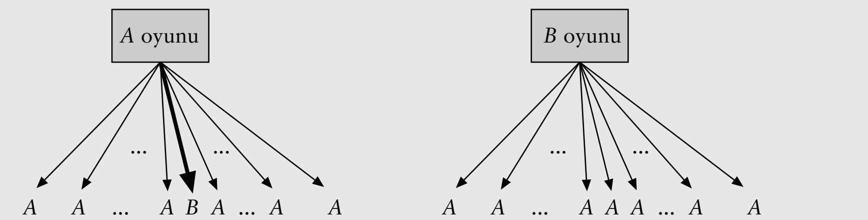
Aynı nedenden, 6 oyununu da birinci oyuncu (bir *B* oyunu olan) 4 oyununa dönüştürerek kazanır. Demek ki 6 oyunu da bir *A* oyunudur.

Teorem 1. *Tek bir hamlede bir B oyununa dönüştürülen oyunlar A oyunlarıdır. Hangi hamle yapılırsa yapılsın hep A oyununa dönüşen oyunlar ise B oyunlarıdır.*

Kanıt: Eğer birinci oyuncu bir oyunu tek bir hamleyle bir *B* oyununa dönüştürebiliyorsa (bkz. aşağıdaki şekil), o zaman birinci oyuncu bu hamleyi yapsın; karşı tarafa bir *B* oyunu kalacaktır ve karşı taraf bu oyunun birinci oyuncusu olacağından oyunu kaybedecektir.

Öte yandan, eğer birinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın oyun hep bir *A* oyununa dönüşüyorsa, o zaman karşı taraf oyunu kazanacaktır, çünkü ne de olsa birinci oyuncu karşı tarafa, birinci oyuncunun kazanan stratejisinin olduğu bir oyun bırakacaktır ve karşı taraf bu oyunun birinci oyuncusu olduğundan oyunu kazanacaktır. □

Yukardaki olgudan, her oyunun ya bir *A* oyunu ya da bir *B* oyunu olduğu kolaylıkla (oyunun sürebileceği azami hamle sayısı üzerine tümevarımla) çıkar.



Bir oyunun ilk hamleden sonra yol açtığı oyunlardan en az biri *B* oyunuysa, o oyun bir *A* oyunudur. Oyunu kazanmak için oyunu *B* oyununa dönüştüren hamleyi (ya da hamlelerden birini) yapmak gerekir.

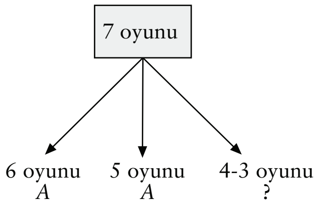
Bir oyunun ilk hamleden sonra yol açtığı oyunlardan her biri bir *A* oyunuysa, o oyun bir *B* oyunudur. Birinci oyuncu ne yaparsa yapsın, ikinci oyuncu (doğru hamleleri oynayarak) oyunu kazanır.

6 oyununun bir A oyunu olduğunu gördük. Bakalım 7 oyunu nasıl bir oyun.

7 oyununa başlayan birinci oyuncu, oyunu şu oyunlardan birine dönüştürebilir:

$$6,\ 5,\ 4+3.$$

Bunlardan ilk ikisi bir A oyunu olduğundan, birinci oyuncunun bu oyunlara yol açan hamleleri yapması ancak kamikaze olarak nitelendirilebilir, çün-



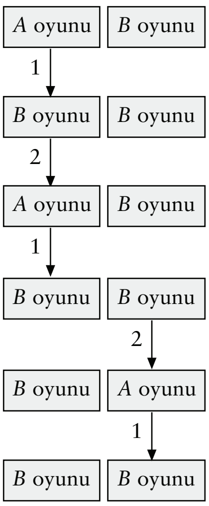
kü ikinci oyuncu bu oyunların birinci oyuncusu olacak ve iyi oynarsa oyunu kazanacaktır. Demek ki, birinci oyuncu ancak 4+3 oyununa yol açan hamleyi yaparsa kazanabilir.

Bakalım 4+3 oyunu B oyunu mu? Eğer öyleyse birinci oyuncu bu hamleyi yaparak 7 oyununu kazanır; aksi takdirde hangi hamleyi yaparsa yapsın oyunu kaybedecektir.

4+3 oyunu o kadar uzun süren bir oyun olmadığından, analizi pek güç değildir. Ama biz bu oyunu bambaşka, çok daha verimli bir yöntemle analiz edeceğiz.

4+3 oyunu, 4 oyunuyla 3 oyununun "toplamı"dır. İki oyun, birbirinden bağımsız olarak aynı anda oynanıyorsa, yani oyuncuların her biri iki oyundan birini seçip o oyunda hamlesini yapıyorsa, o zaman bu oyuna o ***iki oyunun toplamı*** adı verilir. Tabii iki yerine daha çok oyunu da toplayabiliriz.

Teorem 2. *Bir A oyunuyla bir B oyununun toplamı bir A oyunudur. İki B oyununun toplamı ise gene bir B oyunudur.*



Kanıt: Bir A oyunuyla bir B oyununun toplamına AB oyunu diyelim. İki B oyununun toplamına da BB oyunu diyelim. BB oyunu, başlayanın kaybedeceği iki oyunun yanyana gelmesiyle oluşuyor. (Her zamanki gibi yapacak hamle bulamayan oyunu kaybediyor.)

Diyelim biz birinci oyuncuyuz ve önümüze bir AB oyunu geldi. A oyununu B oyununa dönüştüren hamleyi yapıp karşı tarafa BB oyunu bırakalım. Karşı taraf, hangi oyunda hamlesini yaparsa yapsın, Teorem 1'e göre, hamle yaptığı oyunu mecburen bir A oyununa dönüştürecek ve bize toplamda gene bir AB oyunu (ya da BA oyunu, aynı şey) sunacaktır. Biz aynı stratejiyi devam edip (yani A oyununu B oyununa dönüştürüp) karşı tarafa gene bir BB oyunu bırakalım. Bu yöntemle oynarsak, karşı tarafa her birinde kaybedeceği iki oyun bırakırız ve karşı taraf önce oyunlardan birini, sonra diğerini kaybeder.

Umarım farkına varmışsınızdır: Yukarda anlatılanlardan BB oyunlarının B oyunları oldukları çıkar. □

Bu teoremi,

$$A + B = A,$$
$$B + A = A,$$
$$B + B = B$$

eşitlikleriyle de ifade edebiliriz. (B oyunları bir anlamda, oyunları toplamanın etkisiz elemanıdır.) Tabii toplanan oyun sayısını çoğaltabiliriz: İçinde tek bir tane A oyunu olan oyunların toplamı A oyunlarıdır ve her biri B oyunu olan oyunların toplamı gene bir B oyunudur.

Bu arada,

$$A + A$$

toplamının ne olduğunun bilinemeyeceğini söyleyelim, toplanan oyunlara göre $A + A$ oyunu A oyunu da olabilir B oyunu da. Örneğin 3+3 oyunu B oyunudur, dolayısıyla 3+5 oyunu A oyunudur, ama hem 3 hem de 5 oyunu A oyunudur.

Oyunları zevkli kılan AA oyunlarının değerlerinin sabit olmamasıdır.

Böylece 4+3 oyununun A oyunu olduğu anlaşılır, çünkü 4 bir B oyunu, 3 ise bir A oyunu.

Dolayısıyla 7 oyunu bir B oyunudur (çünkü yol açtığı 6, 5 ve 4+3 oyunlarının üçü de A oyunudur.)

Bundan, 8 ve 9 oyunlarının A oyunları oldukları anlaşılır, çünkü bu oyunlar tek bir hamlede bir 7 oyununa dönüşebilir ve 7 oyunu bir B oyunudur.

Bir kez daha bildiklerimizin listesini çıkaralım:

$$\begin{array}{ll} 1 \mapsto B, & 5 \mapsto A, \\ 2 \mapsto B, & 6 \mapsto A, \\ 3 \mapsto A, & 7 \mapsto B, \\ 4 \mapsto B, & 8 \mapsto A, \\ & 9 \mapsto A. \end{array}$$

Ya 10 oyunu nasıl bir oyundur? 10 oyunu ilk hamlede şu oyunlardan birine dönüşür:

10 Oyununun Analizi

$$9 \mapsto A,$$
$$8 \mapsto A,$$
$$7+3 \mapsto B+A = A,$$
$$6+4 \mapsto A+B = A,$$

10 oyununun yol açtığı dört oyun da A oyunu olduğundan 10 oyunu bir B oyunudur.

Demek ki 11 ve 12 oyunları A oyunlarıdır çünkü bir hamlede bir B oyunu olan 10 oyununa dönüşebilirler.

Sıra geldi 13 oyununun analizine. 13 oyunu ilk hamlede aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür:

13 Oyununun Analizi

$$12 \mapsto A,$$
$$11 \mapsto A,$$
$$10+3 \mapsto B+A = A,$$
$$9+4 \mapsto A+B = A,$$
$$8+5 \mapsto A+A = ?,$$
$$7+6 \mapsto B+A = A.$$

Demek ki 13 oyununun analizini bitirmek için 8+5 oyununu analiz etmemiz gerekiyor. 8+5 oyunu aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür:

8+5 Oyununun Analizi

$$7+5 \mapsto B+A = A,$$
$$6+5 \mapsto A+A = ?,$$
$$3+5+5 \mapsto A+A+A = A,$$
$$8+4 \mapsto A+B = A,$$
$$8+3 \mapsto A+A = ?.$$

Demek ki 8+5 oyununu analiz etmek için 6+5 ve 8+3 oyunlarını analiz etmemiz gerekiyor.

6+5 oyununu analiz etmek oldukça kolay, çünkü 6+5 oyunu tek bir hamlede 5+5 oyununa dönüşür ve 5+5 simetrik bir oyundur, yani aynı oyunun kendisiyle toplamıdır ve bu tür oyunlar her zaman B oyunlarıdır. Analize devam etmeden önce bunu kanıtlayalım.

Teorem 4. *X bir oyun olsun. $X + X$ oyunu bir B oyunudur.*

Kanıt: Hamle yapamayanın kaybettiğini unutmayalım. Siz birinci oyuncu olun (kaybedeceksiniz!) ben de ikinci oyuncu. İki oyundan birinde bir hamle yapıp o oyunu diyelim bir Y oyununa çevirdiniz. Diyelim birinci oyundan bir hamle yapıp bu oyunu Y oyununa çevirdiniz ve bana $Y + X$ oyunu sundunuz. Ben de sizin yaptığınız hamlenin aynısını diğer oyunda yapıp X oyununu Y oyununa çevirip size $Y + Y$ oyununu sunacağım. Sıra sizde. Diyelim birinci oyundan bir hamle yapıp bana $Z + Y$ oyunu sundunuz. Ben diğer oyunda aynı hamleyi yapıp size $Z + Z$ oyunu sunacağım. Bu böylece devam edecek. Ben size hep simetrik oyun sunma imkânına sahip olacağım ve öyle de yapacağım. Siz hamle yapabildikçe ben de aynı hamleyi diğer oyunda yapacağım. Dolayısıyla siz kaybetmedikçe ben de kaybetmeyeceğim, yani oyunu kazanacağım. □

Demek ki 5+5 oyunu bir B oyunu, dolayısıyla 6+5 oyunu bir A oyunu. (8+5 oyununun analizinde 6+5 oyununun yanına bir A koyun.)

Şimdi 8+3 oyununu analiz edelim. 8+3 oyunu aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür.

8+3 Oyununun Analizi

$$7+3 \mapsto B+A = A,$$
$$6+3 \mapsto A+A = ?,$$
$$3+5+3 = 5+(3+3) \mapsto A+B = A,$$
$$8 \mapsto A+B = A.$$

Demek ki 6+3 oyununu analiz etmemiz gerekiyor. 8+3 oyununda birinci oyuncunun tek umudu bu oyunun bir B oyunu olması. 6+3 oyunu aşağıdaki oyunlardan birine dönüşür:

6+3 Oyununun Analizi

$$5+3 \mapsto A+A = ?,$$
$$4+3 \mapsto B+A = A,$$
$$5 \mapsto A.$$

Ama 5+3 oyunu 3+3 oyununa dönüştüğünden ve bu oyun simetrik bir oyun olduğundan, 5+3 oyunu bir A oyunudur, birinci oyuncu 5+3 oyununu 3+3 oyununa dönüştürerek oyunu kazanır.

Demek ki 6+3 oyunu sadece A oyunlarına dönüşüyor. Demek ki 6+3 oyunu bir B oyunu.

Bundan 8+3 oyununun A oyunu olduğu çıkar: Birinci oyuncu oyunu 6+3 oyununa dönüştürür.

Bundan 8+5 oyununun B oyunu olduğu çıkar: Birinci oyuncu hangi hamleyi yaparsa yapsın, oyunu bir A oyununa dönüştürmek zorundadır.

Bundan 13 oyununun A oyunu olduğu çıkar.

Bulduklarımızın son bir listesini yapalım:

$1 \mapsto B$,	$5 \mapsto A$,	$9 \mapsto A$,
$2 \mapsto B$,	$6 \mapsto A$,	$10 \mapsto B$,
$3 \mapsto A$,	$7 \mapsto B$,	$11 \mapsto A$,
$4 \mapsto B$,	$8 \mapsto A$,	$12 \mapsto A$,
		$13 \mapsto A$.

14 oyununun analizini okura bırakıyoruz.

Genel olarak, hangi n doğal sayıları için n oyunlarının A oyunları olduğunu bilmiyorum. Öte yandan, verilen her n doğal sayısı için, yukardaki gibi bir analizle, n oyunlarının analizi yapılabilir. ♥