Kümeler Kuramı / Oyun

Bir Oyun, Seçim Aksiyomu ve Şaşırtıcı Bir Sonuç

Oya Şaşar

Önce kolay oyundan başlayalım. Asıl oyun ve şaşırtıcı sonuç sonra gelecek.

Padişah 100 kişiyi idama mahkûm etmiş. Ama o kadar da insafsız değilmiş; mahkûmlara son bir şans daha vermek istemiş.

– Yarın, sabahın köründe hepinizi sıraya dizeceğim, demiş. Hepinizin kafasına siyah ya da beyaz bir şapka giydireceğim. Herkes önündekilerinin şapkasını görecek ama arkasındakilerinin şapkasını göremeyecek. Kimse kendi şapkasını da göremeyecek elbette. En arkadan, yani herkesi görenden başlayarak herkese teker teker şapkasının rengini soracağım. Doğru tahmin ederse afedeceğim, yanlış tahmin ederse idam edeceğim. Herkes arkasındakilerin tahminini duyacak. Bu işin altından en az zaiyatla nasıl kalkacağınızı düşünün bütün gece...

Mahkûmlar kara kara düşünmüşler. Biri,

– Padişahımız hiç olmazsa şapkaların yüzde kaç olasılıkla beyaz, yüzde kaç olasılıkla siyah olacağını söyleseydi, demiş. Böylece hepimiz olasılığı en yüksek olan rengi söyler ve büyük olasılıkla yarımız ve belki de daha da fazlamız kurtulurdu...

– Acaba bizden önce tahminde bulunan arkadaşların akıbetini bilebilecek miyiz? diye sormuş biri.

– Bilinmez ki demiş bir başkası... Padişah bu!

Mahkûmlar iç çekmişler. İçlerinden en akıllılarından biri şöyle bir öneride bulunmuş:

– En arkadaki hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Böylece kendisi kurtulamasa bile onun önündeki kurtulur. Üçüncü arkadaş da hemen önündekinin şapkasının rengini söylesin. Böyle devam edelim. Tek sıradaki arkadaşlar hemen önlerindeki arkadaşın şapkasının rengini söylesin. Böylece en azından yarımız kesinlikle kurtulur. Eğer şapkaların siyah ya da beyaz olma olasılığı yüzde elliyse, geri kalan 50 kişinin de yüzde ellisi, yani 25'i kurtulur. Böylece aşağı yukarı 75'imiz kurtulmuş olur.

Bir öncekinden daha iyi olan bu öneri sevinçle karşılanmış doğal olarak. O zamana kadar sessiz kalan en akıllıları birden yerinden fırlayarak,

– Buldum! diye haykırmış, belki bir kişinin idam edileceği, ama geri kalan herkesin kurtulacağı bir strateji buldum.

Diğerleri pek inanmamışlar ama ne yapsınlar, umut umuttur. En akıllı mahkûm devam etmiş:

– En arkadaki mahkûm gördüğü beyaz şapkaları sayar. Eğer tek sayıda beyaz şapka görüyorsa beyaz tahmininde bulunur, çift sayıda beyaz şapka görüyorsa da siyah tahmininde bulunur...

– Eee? demiş diğerleri.

– E'si şu ki, böylece hepimiz en arkadakinin önündeki beyaz şapka sayısının tek ya da çift sayı olduğunu biliriz. Diyelim birinci mahkûm önünde tek sayıda şapka saydı ve beyaz dedi. İkinci mahkûm da önündeki şapka sayısını saysın. Eğer çift sayıda beyaz şapka görüyorsa, şapkası beyaz demektir, tek sayıda şapka görüyorsa, şapkası siyah demektir...

Bir mırıltı yükselmiş.

– Ya peki diğerleri, diye sormuş biri merakla.

– Diyelim ikinci mahkûm beyaz dedi ve tabii ki kurtuldu. Böylece üçüncü mahkûm, kendi şapkası dahil, beyaz şapka sayısının çift olduğunu anlar, çünkü arkasındakinin şapkası beyazmış. Eğer üçüncü mahkûmun önünde tek sayıda beyaz şapka varsa, kafasında beyaz şapka var demektir, aksi halde siyah şapka olmalı. Böylece o da doğru tahminde bulunarak kurtulur. Bu mantıkla devam edersek en arkadaki ilk tahmini yapan arkadaş dışında herkes kurtulur. En arkadaki ilk tahmini yapan da şansı varsa kurtulur...

Birinci hikâyemiz burada bitiyor. Bu çözüm bile oldukça şaşırtıcı ama daha da şaşırtıcı sonuçlara hazırlanın.

Bir başka padişah, ilk hikâyedekinden daha acımasız bir padişah, 100 kişiyi değil sonsuz kişiyi idama mahkûm etmiş. Her mahkûmun da bir numarası varmış: 0, 1, 2, ... Ne kadar doğal sayı o kadar mahkûm...

Padişah,

– Yarın, sabahın köründe hepinizi sıraya dizeceğim, demiş. En arkada 0 numara, sonra 1 numara, sonra 2 numara vs. Hepinizin kafasına ya siyah ya da beyaz renkli bir şapka giydireceğim. Herkes önündekilerinin şapkasını görecek ama arkasındakilerinin şapkasını göremeyecek. Kimse kendi şapkasını da göremeyecek elbette. En arkadan, yani herkesi görenden başlayarak herkese şapkasının rengini soracağım. Doğru tahmin ederse afedeceğim, yanlış tahmin ederse idam edeceğim. Herkes daha önce tahminde bulunmuş kişilerin tahminini duyacak. Bu işin altından en az zaiyatla nasıl kalkacağınızı düşünün bütün gece...

O sırada biri hapşırmış. Padişah bu saygısızlığa kızmış.

– Kimse daha önce yapılmış tahminleri duyamayacak...

Mahkûmlar hücrelerine çekilip düşünmeye başlamışlar. Durum zor! Hatta imkânsız gibi. Tahmin sırası kendilerine geldiğinde ellerinde hiçbir ipucu olmayacak.

Uzunca bir süreden sonra biri, ortaya atılıp,

– Sonlu sayıda arkadaş dışında herkesi kurtaracak bir yöntem var demiş...

✶ ✶ ✶

İnanması güç ama gerçek... Sonlu sayıda mahkûm dışında herkesin kurtulacağı bir yöntem vardır.

Tabii Seçim Aksiyomu'na inanıyorsanız... Ki bu devirde Seçim Aksiyomu'na hemen hemen herkes inanır.

Yöntemi açıklamak için önce biraz "oyun"un matematiksel analizini yapalım.

Önce **b**eyaz şapka yerine 1 (**b**ir), siyah şapka yerine 0 (**s**ıfır) diyelim. Böylece padişahın mahkûmların kafalarına şapkaları geçiriş biçimini bir 01-dizisiyle gösterebiliriz. Eğer padişah herkese siyah şapka giysdirirse, o zaman

000000000000000...

dizisi elde edilir. Eğer padişah 0'ıncı mahkûma beyaz, sonrakilere bir siyah, bir beyaz şapka giydirirse, dizi

01010101010101...

dizisi olur. Her mahkûm şapkalaması bir 01-dizisi verir, her 01-dizisi de bir mahkûm şapkalamasına tekabül eder. Bundan böyle 01-dizisi yerine sadece "dizi" diyeceğiz.

Belli bir aşamadan sonrası eşit olan dizilere ***denk*** diziler diyelim. Yani sonlu sayıdaki ilk birkaç terim dışındaki **tüm** terimlerin eşit olduğu dizilere denk diyelim. Örneğin,

0011010101010101010101...

dizisiyle

0110110101000101010101...

dizisi denktirler, çünkü her ikisinde de **aynı aşamada** 01 sayısı **sonsuza dek** tekrar eder, ya da şöyle söyleyelim: İlk 12 terim dışında iki dizi birbirine eşittir. Örneğin bir zaman sonra (ne kadar zaman sonra olduğu önemli değil) hep 0 olan diziler birbirine denktir. Bir başka örnek,

0110110110110110110110...
1110110110110110110110...
0010110110110110110110...
1010110110110110110110...
1100110110110110110110...

dizileri birbirlerine denktirler. Ama

0101010101... ve 10101010101010...

dizileri birbirine denk değildir, çünkü her ne kadar birinin ilk terimini sildiğinizde diğer diziyi elde etsek de bu dizilerin n'inci terimleri hep birbirinden değişik. İki dizinin denk olması için belli bir aşamadan sonra dizilerin n'inci terimleri **hep** birbirlerine eşit olmalı.

x ve y dizilerinin birbirlerine denk olduklarını

$$x \equiv y$$

yazılımıyla gösterelim. Şu özelliklerin doğru oldukları bariz:

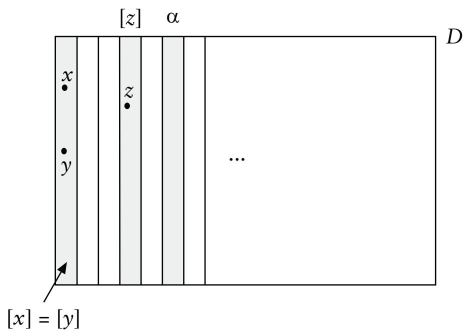
$$x \equiv x,$$
$$x \equiv y \text{ ise } y \equiv x,$$
$$x \equiv y \text{ ve } y \equiv z \text{ ise } x \equiv z.$$

Bir başka deyişle, $\equiv$ ilişkisi 01-dizileri kümesi üzerine bir "denklik ilişkisi"dir. 01-dizileri kümesine D diyelim. Bir x dizisi için,

$$[x] = \{y \in D : x \equiv y\}$$

olsun. x'e denk elemanlardan oluşan bu kümeye ***x'in sınıfı*** adı verilir.

İki sınıf ya birbirine eşittir ya da birbirinden ayrıktır, yani her x, $y \in D$ için



D kümesinin denklik sınıflarına parçalanışı. x ile y denk olduklarından aynı sınıftalar ve sınıfları birbirine eşit. $[z]$ bir başka sınıf. α da bir sınıf; α, içinde bulunan her elemanın sınıfı. Eğer $t \in \alpha$ ise, $\alpha = [t]$ olur.

ya $[x] = [y]$ ya da $[x] \cap [y] = \emptyset$

olur, ve birinci şık ancak ve ancak $x \equiv y$ ise olabilir, aksi halde ikinci şık doğrudur. (Yukarıdaki şekle bakın.) Bu, $\equiv$ ilişkisinin denklik ilişkisi olmasının, yani yukarda sıraladığımız üç özelliğin doğrudan bir sonucudur ve kanıtı çok kolaydır.

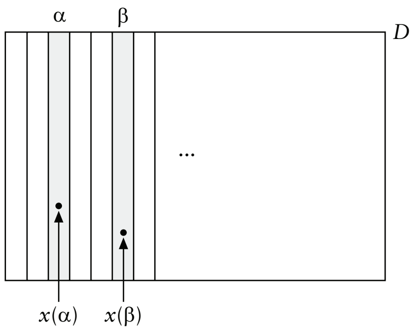
İdam günü arifesi, mahkûmlar her sınıftan (iki değil!) bir temsilci seçerler. Mahkûmların α sınıfından seçtikleri temsilciye $x(\alpha)$ diyelim:

$$x(\alpha) \in \alpha.$$

$x(\alpha)$, tüm mahkûmların hemfikir oldukları, α sınıfından seçilmiş herhangi bir dizidir. Elbette,

$$\alpha = [x(\alpha)]$$

olur, ne de olsa $x(\alpha)$ dizisi α sınıfından seçilmiş.



Her sınıftan bir temsilci seçiliyor.

$x(\alpha)$ dizisinin terimlerini

$$x(\alpha)_0, x(\alpha)_1, x(\alpha)_2, x(\alpha)_3, \ldots$$

olarak gösterelim. Hatta herhangi bir x dizisinin terimlerini,

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$$

olarak gösterelim. x_n'lerin herbiri ya 0'dır ya da 1'dir elbette.

Mahkûmlar α sınıflarından seçtikleri $x(\alpha)$ dizilerini bir gece önce ezberlesinler.

Ertesi sabah mahkûmlar sıraya dizilip kafalarna şapka geçirildiğinde, her biri önündeki mahkûmların şapkasına bakarak padişahın şapkalarla belirlediği dizinin sınıfını anlarlar. Diyelim, padişah şapkalama yöntemiyle α sınıfını belirlemiş. Mahkûmlar α sınıfını bildikleri gibi, bir gece önceki çalışmaları sayesinde α sınıfından seçtikleri $x(\alpha)$ dizisini de bilirler. Padişahın belirlediği diziyle $x(\alpha)$ dizisi ilk birkaç, diyelim 1 milyon terimi dışında aynıdır.

Sıranın en sonundaki mahkûm (ilk tahminde bulunan yani) $x(\alpha)_0$ tahmininde bulunur. Bir sonraki $x(\alpha)_1$ tahmininde bulunur. Mahkûmlar sırayla

$$x(\alpha)_0, x(\alpha)_1, x(\alpha)_2, x(\alpha)_3, \ldots$$

tahmininde bulunurlar ve böyle sonlu sayıda mahkûm dışında herkes kurtulur. (Mahkûmlar kaçıncı mahkûm olduklarını biliyorlar.)

Bunun neden böyle olduğu bariz olmalı ama gene de açıklayalım: Padişahın şapkaların renkleriyle belirlediği diziye x diyelim. Demek ki $[x] = \alpha$.

Anımsatalım: x_n, n'inci mahkûmun kafasındaki şapkanın rengi; $x(\alpha)_n$ ise, n'inci mahkûmun tahmini. Eğer

$$x_n = x(\alpha)_n$$

ise n'inci mahkûm kurtulacak, aksi halde idam edilecek.

Şimdi

$$[x] = \alpha = [x(\alpha)],$$

eşitliğine dikkatinizi çekeriz. Demek ki x dizisinin terimleriyle $x(\alpha)$ dizisinin terimleri bir zaman sonra çakışacaklar, yani bir zaman sonra **hep**,

$$x_n = x(\alpha)_n$$

olacak. Bu aşamadan itibaren tüm mahkûmlar kurtulacaklar...

Oldukça şaşırtıcı değil mi?

Daha da şaşırtıcı olanı şu: Böyle bir yöntem olduğunu kanıtladık ama böyle bir yöntem bulamayız, çünkü her sınıftan bir eleman seçmek, bu durumda ancak Seçim Aksiyomu'yla mümkündür, bizim durumumuzda Seçim Aksiyomu olmadan yapılamaz. (Yapılamayacağını MD'de kanıtlamadık, kanıtlamak da kolay değildir.) Seçim Aksiyomu'nun illa gerekli olduğu bir seçim de elle bulunamaz.

Soru: 100 mahkûm olsun. Padişah mahkûmlara 1/3 olasılıkla beyaz, siyah ya da gri şapka giydirsin. En fazla mahkûmun kurtulması için en iyi strateji nedir? (Bu soru, Sovyet Matematik Olimpiyatları'nda sorulmuş.)

Kapanış Sorusu: Eğer padişahın şapkaları dizerken elde edebileceği 01-dizileri ancak "hesaplanabilir" (yani terimleri bir formülle ya da bir bilgisayar programıyla hesaplanabilen, İngilizcesiyle *recursive*) diziler olabilirse (ki insanoğlu başka türlü dizi bulamaz), o zaman Seçim Aksiyomu'na başvurmadan sonlu sayıda mahkûm dışında herkesi kurtarabilir miyiz? ♥

Kaynakça:

http://cornellmath.wordpress.com/2007/09/13/the-axiom-of-choice-is-wrong/