Cahit Arf Matematik Günleri - 2010

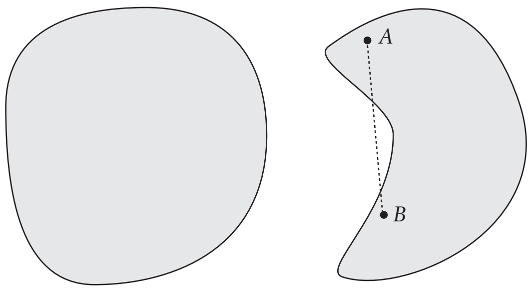
İkinci Aşama Soru ve Yanıtları, 8 Mayıs 2010

Selçuk Demir / *selcukdemir@math.bilgi.edu.tr*

İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından düzenlenen Cahit Arf Matematik Günleri'nin dokuzuncusu xx dolayında öğrencinin katılımıyla gerçekleşmiştir. Cahit Arf Matematik Günleri liselerarası ve iki aşamadan oluşan bir matematik yarışmasıdır. Üç saat süren birinci aşamadan sonra seçilen 30 dolayında öğrenci gün boyu süren ikinci aşamaya hak kazanır. Daha ayrıntılı bilgi ve verilen ödüller için: http://math.bilgi.edu.tr/cahitarf.

Not: Kanıtlayamadığınız bir soruyu sonraki sorularda kullanabilirsiniz.

Tanımlar. $X \subseteq \mathbb{R}^2$, düzlemin bir altkümesi olsun. Eğer her $A, B \in X$ için, AB doğru parçası X'in bir altkümesiyse, X'e ***dışbükey*** denir.



Dışbükey bir küme

Dışbükey olmayan bir küme, çünkü örneğin A ile B arasındaki doğru parçasının bir kısmı kümeden çıkıyor.

$P = (p_1, p_2)$ ve $Q = (q_1, q_2)$ düzlemin iki noktasıysa, $P + Q$ ve $P - Q$ noktalarının,

$$P \pm Q = (p_1 \pm q_1, p_2 \pm q_2)$$

olarak tanımlandığını biliyoruz. Eğer $r \in \mathbb{R}$ ise

$$rP = (rp_1, rp_2)$$

olsun.

Eğer X ve Y düzlemin iki altkümesiyse, $X + Y$ ve $X - Y$ kümeleri

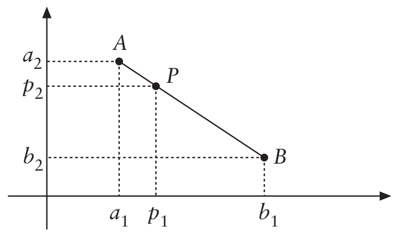
$$X \pm Y = \{P \pm Q : P \in X, Q \in Y\}$$

olarak tanımlansın. rX ve $-X$ gibi kümelerin tanımı bariz olmalı.

Soru 1. *A ve B düzlemde iki nokta olsun.*

$$AB = \{tA + (1-t)B : t \in [0, 1]\}$$

eşitliğini kanıtlayın. (*Burada AB, A ile B noktaları tarafından belirlenen doğru parçası anlamına gelmektir.*)



Yanıt: Eğer $a \le p \le b$ ise,

$$t = \frac{b-p}{b-a}$$

tanımını yapalım. O zaman $t \in [0, 1]$ ve kolay bir hesapla görüleceği üzere,

$$p = ta + (1-t)b$$

olur. Şimdi yukarıdaki şekle bakarak, $i = 1, 2$ için,

$$t_i = \frac{b_i - p_i}{b_i - a_i}$$

tanımını yapalım. Demek ki,

$$p_i = t_i a_i + (1 - t_i) b_i$$

olur. Ama Tales Teoremi'nden dolayı

$$t_1 = t_2$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $t = t_1 = t_2$ tanımını yaparsak,

$$P = tA + (1-t)B$$

olur. Demek ki

$$AB \subseteq \{tA + (1-t)B : t \in \mathbb{R}\}$$

olur. Ters içindeliği kanıtlamak da kolay.

Soru 2. *Herhangi* (*sonlu ya da sonsuz sayıda*) *dışbükey kümenin arakesitinin dışbükey olduğunu kanıtlayınız.*

Kanıt: $i \in I$ için X_i dışbükey bir küme olsun. A ve B noktaları $\bigcap_{i \in I} X_i$ arakesitinde olsun. O zaman her $i \in I$ için A ve B noktaları X_i kümesinde olur. Ama X_i kümesi dışbükey olduğundan, bundan AB doğru parçasının X_i kümesinin bir altkümesi olduğu çıkar. Bu dediğimiz her $i \in I$ için doğru olduğundan, AB doğru parçası $\bigcap_{i \in I} X_i$ arakesitinin bir altkümesidir. Dolayısıyla $\bigcap_{i \in I} X_i$ arakesiti dışbükeydir.

Soru 3. *Eğer X ve Y dışbükeyse ve $r \in \mathbb{R}$ ise,*

$$X + Y,\ rX \text{ ve } X - Y$$

kümelerinin dışbükey olduklarını kanıtlayın.

Kanıt: $A, B \in X + Y$ olsun. $A_1, B_1 \in X$ ve $A_2, B_2 \in Y$ için, $A = A_1 + A_2$ ve $B = B_1 + B_2$ olsun. Eğer $t \in [0, 1]$ ise,

$$\begin{aligned} tA + (1-t)B &= t(A_1 + A_2) + (1-t)(B_1 + B_2) \\ &= (tA_1 + (1-t)B_1) + (tA_2 + (1-t)B_2) \\ &\in X + Y \end{aligned}$$

olur. Birinci soruya göre $X + Y$ dışbükeydir.

rX'in dışbükey olduğunu göstermek de kolay.

$X - Y = X + (-1)Y$ olduğundan, $X - Y$'nin dışbükeyliği ilk iki sorudan çıkar.

Soru 4. *$U \subseteq \mathbb{R}^2$ düzlemin herhangi bir altkümesi olsun. U'yu içeren en küçük dışbükey kümenin olduğunu kanıtlayın. Yani öyle bir $X \subseteq \mathbb{R}^2$ olduğunu kanıtlayın ki,*

a) *$U \subseteq X$ ve X dışbükeydir*,

b) *Eğer Y yukardaki iki özelliği sağlıyorsa*, o *zaman $X \subseteq Y$ olur.*

U'yu içeren en küçük dışbükey kümeye U'nun ***dışbükey zarfı*** *adı verilir.*

Birinci Kanıt: $\mathbb{R}^2$, U'yu (altküme olarak) içeren dışbükey bir kümedir. Demek ki U'yu içeren en az bir dışbükey küme vardır. U'yu içeren tüm dışbükey altkümelerin arakesitine X diyelim. Elbette $U \subseteq X$ olur. Birinci soruya göre X dışbükeydir. Demek ki U'yu içeren tüm dışbükey altkümelerin arakesiti gene U'yu içeren dışbükey bir altkümedir, dolayısıyla U'yu içeren tüm dışbükey altkümelerin en küçüğüdür.

İkinci Kanıt: $X_0 = U$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için X_n kümesini tümevarımla kanıtlayacağız. X_n'nin tanımlandığını varsayıp X_{n+1}'i tanımlayalım. X_{n+1} kümesi, $A, B \in X_n$ için, AB doğru parçalarının bileşimi olsun:

$$X_{n+1} = \bigcup_{A,\, B \in X_n} AB$$

olsun. Elbette $X_n \subseteq X_{n+1}$ ve, dolayısıyla, eğer $m \le n$ ise $X_m \subseteq X_n$ olur. Şimdi

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

olsun. X'in istediğimiz küme olduğunu kanıtlamak istiyoruz. X elbette Y'yi içerir, çünkü $X_0 = U$.

Önce X'in dışbükey olduğunu kanıtlayalım. A, $B \in X$ olsun. O zaman, X'in tanımına göre, belli n, $m \in \mathbb{N}$ göstergeçleri için, $A \in X_n$ ve $B \in X_m$ olur. Diyelim $m \le n$, yani $X_m \subseteq X_n$. Demek ki hem A hem de B noktası X_n'de. Dolayısıyla AB doğru parçası X_{n+1}'de. Demek ki AB doğru parçası X'te.

Şimdi Y, U'yu altküme olarak içeren herhangi bir dışbükey küme olsun. n üzerine tümevarımla $X_n \subseteq Y$ içindeliğini kanıtlayacağız ve böylece

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subseteq Y$$

olacak ve kanıtımız bitecek. $n = 0$ için bu içindelik bariz: $X_n = U \subseteq Y$. Şimdi $X_n \subseteq Y$ içindeliğini varsayıp $X_{n+1} \subseteq Y$ içindeliğini kanıtlayalım. $P \in X_{n+1}$ olsun. X_{n+1} kümesinin tanımından dolayı, öyle A, $B \in X_n$ vardır ki, $P \in AB$ olur. Ama $A, B \in X_n \subseteq Y$ olduğundan ve Y dışbükey olduğundan, $AB \subseteq Y$ olur. Demek ki $P \in AB \subseteq Y$. Böylece $X_{n+1} \subseteq Y$ içindeliği kanıtlanmış oldu.

Soru 5. *$n \ge 3$ için, düzlemde verilmiş*

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

dışbükey kümelerinin her üçünün arakesiti boş değilse hepsinin arakesitinin de boş olmadığını gösteriniz.

Kanıt: n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $n = 3$ ise yapılacak bir şey yok. Bundan böyle $n \ge 4$ olsun. Eğer $n = 4$ ise, V kümesi X_i kümelerinin bileşimi olarak, eğer $n > 4$ ise,

$$V = X_5 \cap X_6 \cap ... \cap X_n$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} v_1 &\in X_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap V, \\ v_2 &\in X_1 \cap X_3 \cap X_4 \cap V, \\ v_3 &\in X_1 \cap X_2 \cap X_4 \cap V, \\ v_4 &\in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap V \end{aligned}$$

olsun. (Tümevarım varsayımına göre bu kesişimler boşküme değildirler.) v_1, v_2 ve v_3 noktalarından her biri X_4 kümesinin elemanıdır. X_4 kümesi dışbükey olduğundan bu noktaların oluşturduğu üçgen de bu kümenin altkümesidir. Dolayısıyla eğer v_4, diğer üç noktanın oluşturduğu üçgenin içindeyse $v_4 \in X_4$, yani

$$v_4 \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4$$

olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur. Bundan böyle bu dört noktanın dışbükey bir dörtgen belirlediğini varsayalım. Diyelim $[v_1\ v_3]$ ve $[v_2\ v_4]$ doğru parçaları dışbükey dörtgenimizin iki köşegeni. z noktası bu köşegenlerin kesiştiği nokta olsun.

$$z \in [v_1\ v_3] \subseteq X_2 \cap X_4 \cap V,$$

ve

$$z \in [v_2\, v_4] \subseteq X_1 \cap X_3 \cap V$$

olduğundan, $z \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap X_4 \cap V$ olur ve istediğimiz kanıtlanmış olur.

Soru 6. *Düzlemde kenarları eksenlere paralel olan n tane $X_1, X_2, ..., X_n$ dikdörtgeni verilmiş olsun. Eğer bunlardan herhangi ikisi kesişiyorsa hepsinin kesiştiğini gösteriniz.*

Kanıt: Bu soruda hem beşinci soruyu, hem de onun özel bir halini kullanacağız. Beşinci sorudan dolayı her üç dikdörtgenin kesiştiğini göstermek yeterlidir. Beşinci sorunun bir boyutlu halinden yararlanacağız. Aynı yöntemle beşinci sorunun bir boyutlu halini de kanıtlayabiliriz: $\mathbb{R}$'de sonlu sayıda kapalı aralıkların her ikisi kesişiyorsa, hepsi en az bir noktada kesişirler. Şimdi bizim dikdörtgenlerin x eksenindeki izdüşümlerini

$$A_1, A_2, ..., A_n$$

ile gösterelim. Verilen koşullardan biliyoruz ki bu kümelerden herhangi ikisi kesişmektedir. Demek ki

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

olacak şekilde bir x bulabiliyoruz. Aynı şekilde bu dikdörtgenlerin y eksenine izdüşümlerini

$$B_1, B_2, ..., B_n$$

ile gösterirsek,

$$y \in B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$$

olacak şekilde bir y de bulabiliriz. Şimdi açıkça görülür ki $(x, y) \in X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n$ dir.

Soru 7. *Gene düzlemde $X_1, X_2, ..., X_n$ ve A dışbükey kümeleri verilmiş olsun. $X_1, X_2, ..., X_n$ kümelerinin herhangi üçünün A'nın bir ötelenişini kestiğini kabul edelim. Yani her i, j, k $\in \{1, 2, ..., n\}$ için,*

$$X_i \cap (u + A) \neq \emptyset,$$
$$X_j \cap (u + A) \neq \emptyset,$$
$$X_k \cap (u + A) \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayan bir $u \in \mathbb{R}^2$ noktasının olduğunu varsayalım. Burada varlığı söylenen u elemanı i, j ve k göstergeçlerine göre değişir elbette. u + A kümesinin her X_i kümesini kestiği bir $u \in \mathbb{R}^2$ noktasının olduğunu kanıtlayın.

Kanıt: Her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için

$$B_i = X_i - A := \{x - a : x \in X_i,\, a \in A\}$$

kümelerini düşünelim. Üçüncü soruya göre, B_i kümeleri dışbükey kümelerdir. Elbette

$$u \in B_i \Leftrightarrow (u + A) \cap X_i \neq \emptyset.$$

Verilen koşullardan bu dışbükey kümelerin her üçünün kesiştiğini de biliyoruz. Beşinci soruya göre kesişimde bir u noktası vardır:

$$u \in \bigcap_{i=1}^{n} B_i.$$

Bu u noktası için,

$$(u + A) \cap X_i \neq \emptyset$$

olur.

Soru 8. *$x_1, x_2, ..., x_n$ düzlemde verilmiş n tane nokta olsun. Eğer bunlardan hangi üçünü alırsak alalım bunları içine alacak R yarıçaplı bir daire bulabiliyorsak bu noktaların hepsini içine alacak R yarıçaplı bir disk olduğunu gösteriniz.*

Kanıt: Önce x_1, x_2, x_3 noktalarını düşünelim. Soruda verilenlerden biliyoruz ki, düzlemde öyle bir p noktası var ki, p merkezli ve R yarıçaplı daire bu üç noktayı da içeriyor. Yani bu p noktasının x_1, x_2, x_3 noktalarına uzaklıkları R'den büyük değildir. Başka bir deyişle, p noktası x_1, x_2, x_3 merkezli ve R yarıçaplı disklerin arakesitinde bulunmaktadır.

Şimdi daha genel düşünelim: Eğer

$$D_1, D_2, ..., D_n,$$

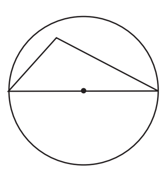
merkezleri sırasıyla

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

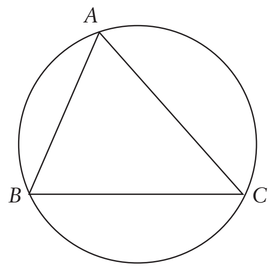
ve yarıçapları R olan daireleri gösteriyorlarsa bunların her üçünün boş olmayan bir arakesiti var demektir. Daireler dışbükey olduğundan, beşinci soruya göre bunların hepsinin arakesitinde olan bir a noktası vardır. Tanım gereği bu a noktasının her bir x_i'ye uzaklığı R'den küçükeşittir. Dolayısıyla bu noktalar merkezi a olan ve yarıçapı R olan disk içerisinde yer almaktadırlar.

Soru 9. *Eğer düzlemde alınan A, B, C noktalarının birbirlerine olan uzaklıkları ≤ 1 ise o zaman A, B, C noktalarının yarıçapı $1/\sqrt{3}$ olan bir dairenin içinde yer aldığını kanıtlayın.*

Kanıt: Eğer ABC üçgeni geniş açılı veya dik bir üçgen ise, yandaki resimdeki gibi, uzun kenarı çap olarak kabul eden daire bu üç noktayı da içerir (neden?). Bu çemberin yarıçapı 1/2'den, dolayısıyla $1/\sqrt{3}$'ten de küçük olmak zorundadır.



Şimdi ABC üçgeninin dar açılı bir üçgen olduğunu varsayalım. Bu üçgenin açılarından birisi, diyelim ki A açısı, 60°'den küçük değildir. Bu üçge-



nin çevrel çemberinin yarıçapı r ise, $|BC| \geq r\sqrt{3}$ şartını sağlamak zorundadır. (Çünkü BC kenarını kiriş olarak gören merkez açı,

$$120 \leq 2m(A) \leq 180$$

eşitsizliklerini sağlamaktadır.) Demek ki $1 \geq r\sqrt{3}$ oluyor. Bu da bize

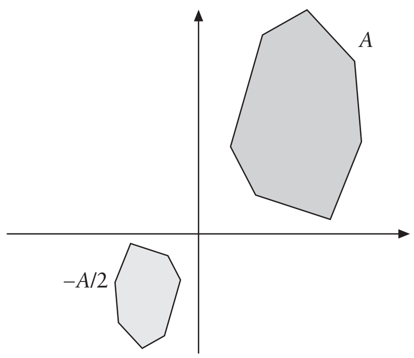
$$r \leq 1/\sqrt{3}$$

olduğunu gösteriyor.

Soru 10. *Düzlemde n tane nokta veriliyor. Bunların herhangi ikisinin arasındaki uzaklığın 1 birimden büyük olmadığını kabul edelim. Bütün bu noktaları içine alacak $1/\sqrt{3}$ yarıçaplı bir diskin olduğunu gösteriniz.*

Kanıt: Soru 8 ve 9'dan çıkıyor.

Soru 11. *A, düzlemde verilmiş dışbükey bir küme olsun. $B = -A/2$ kümesinin de dışbükey bir küme olduğunu biliyoruz. B kümesinin bir öteleniþini A kümesinin içinde yer aldığını kanıtlayın. Yani $u + B \subseteq A$ koşulunu sağlayan bir u noktasının varlığını kanıtlayın.*



Kanıt: A verilen dışbükey küme olsun.

Eğer $x \in A$ ise,

$$K_x = \{u \in \mathbb{R}^2 : -x/2 + u \in A\}$$

tanımını yapalım. Elbette

$$K_x = A + x/2 = A + (1/2)\{x\}$$

olur. Dolayısıyla K_x dışbükeydir (Soru 3). Şimdi elimizde dışbükey kümelerden oluşan $\{K_x : x \in A\}$ ailesi var. Bunların hepsinin içinde bulunan bir u noktası bulduğumuzu varsayalım. O zaman, her $x \in A$ için,

$$-x/2 + u \in A$$

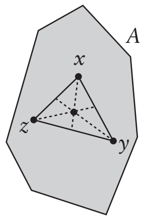
olacaktır. Yani,

$$-A/2 + u \subseteq A$$

koşulunu sağlayan bir nokta bulmuş olacağız. O halde sadece böyle bir noktann varlığını kanıtlamak yeterlidir.

x, y ve z noktaları A'dan seçilmiş üç nokta olsun.

$$t = \frac{x+y+z}{3}$$



noktası da xyz üçgeninin ağırlık merkezi olsun. (Yani kenarortaylarının ortak noktası olsun.) Şimdi $3t/2$ noktasını düşünelim. Bu nokta K_t kümesinin bir elemanıdır çünkü

$$-t/2 + 3t/2 = t \in A.$$

Bu noktayı üç değişik şekilde yazabiliriz:

$$\frac{3t}{2} = \frac{x+y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{x+z}{2} + \frac{y}{2} = \frac{y+z}{2} + \frac{x}{2}.$$

Birinci gösterimden

$$3t/2 \in K_z,$$

ikincisinden

$$3t/2 \in K_y,$$

sonuncusundan da

$$3t/2 \in K_x$$

sonucu çıkar. Bu demek oluyor ki $\{K_x : x \in A\}$ kümelerinden her üçünün ortak bir noktası var. O halde beşinci soruyu kullanarak hepsinin arakesitinde aradığımız gibi bir u noktası olduğunu göstermiş oluruz.

Soru 12*. *Bir çokgenin uzunluğu kenarlarının uzunluklarının toplamı olarak tanımlanıyor. Uzunluğu L olan bir çokgenin yarıçapı $L/4$ olan bir dairenin içine gireceğini gösteriniz.*

Kanıt: Çokgen üzerinde, çokgenin uzunluğunu tam ortadan ikiye bölen a ve b noktaları alalım; yani çokgen üzerinde dolaşarak gidilen ab ve ba yollarının uzunluğu $L/2$ olsun. p, bu iki noktanın orta noktası olsun. x çokgenin üzerinde herhangi bir nokta olsun. $[xp]$ doğru parçasını p'ye doğru xp mesafesi kadar uzatarak elde edilen $axby$ paralelkenarından $2px \leq yb + bx = ax + bx$ elde ederiz. Ama elbette $ax + bx$ uzunluğu çokgenin kenarları izlenerek gidilen ab yolundan, yani $L/2$'den daha uzun olamaz. Demek ki,

$$xp \leq \frac{ax+bx}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{L}{2} = \frac{L}{4}.$$

Dolayısıyla çokgenimiz, p merkezli, $L/4$ yarıçaplı dairenin içindedir. ♥