Cahit Arf Matematik Günleri X - 2011

Birinci Aşama Yanıtları, 19 Mart 2011

İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü tarafından düzenlenen Cahit Arf Matematik Günleri'nin onuncusu 500 dolayında öğrencinin katılımıyla gerçekleşmiştir. Cahit Arf Matematik Günleri liselerarası ve iki aşamadan oluşan bir matematik yarışmasıdır. Üç saat süren birinci aşamadan sonra seçilen 30 dolayında öğrenci gün boyu süren ikinci aşamaya hak kazanır. Daha ayrıntılı bilgi ve verilen ödüller için: http://math.bilgi.edu.tr/cahitarf.

1. *Eğer n, 1'den büyük bir tamsayı ise $n^4 + 4^n$ sayısının asal olamayacağını gösteriniz.*

Çözüm: Eğer n çiftse $n^4 + 4^n$ ifadesi de çift ve 2'den büyük olur. Dolayısıyla asal olamaz. Eğer bir k tamsayısı için $n = 2m + 1$ ise

$$4^n = 4^{2m+1} = 4(4^{2m}) = 4(2^2)^{2m} = 4(2^m)^4$$

ve dolayısıyla

$$n^4 + 4^n = n^4 + 4(2^m)^4$$
$$= (n^2 - 2n2^m + 2(2^m)^2)(n^2 + 2n2^m + 2(2^m)^2)$$

eşitliği sağlanıyor. Son ifadenin çarpanları 1'den büyük, çünkü n sayısı 1'den büyük. Yani $n^4 + 4^n$ bu durumda da asal olamaz.

2. *İç açıları θ, 2θ ve 2θ olan bir üçgende ikiz kenarların uzunluğu 1 ise diğer kenarın uzunluğu nedir?*

Çözüm: Bu üçgene ABC üçgeni diyelim. İkiz kenarları AB ve AC olsun. B açısının açıortayının AC kenarını kestiği nokta D noktası olsun. Verilenlerden BAD ve ABD açıları θ'ya eşit. Dolayısıyla AD ve BD aynı uzunlukta. Diğer yandan, gene verilenlerden, BDC ve DCB açıları da 2θ'ye eşit. Dolayısıyla BD ve BC de aynı uzunlukta. AD'nin uzunluğu 1 olarak verilmiş. AD, BD ve BC'nin ortak uzunluğuna x diyelim. ABC ve BCD üçgenleri benzer olduğundan

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|CD|}$$

yani

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x-1}$$

olmalı. Demek ki $x^2 = 1 - x$. Buradan da, x pozitif olduğundan, $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ çıkıyor.

3. $\alpha = \sqrt{6+4\sqrt{2}}$ *olmak üzere $P(\alpha) = 0$ koşulunu sağlayan ikinci dereceden tamsayı katsayılı bir P polinomu bulunuz.*

Çözüm: Kökün içindeki ifadeyi kareye tamamlarsak

$$\alpha = \sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{2^2 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}$$
$$= \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2}$$

elde ederiz. Yani

$$P(x) = (x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2})) = x^2 - 4x + 2$$

istenen özellikleri sağlıyor.

4. *a, b ve c sayıları birbirlerinden farklı reel sayılar olsunlar.*

$$\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0$$

olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: Genel olarak

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3$$
$$- 3(x + y + z)(xy + xz + yz) + 3xyz$$

eşitliği doğru. Bu eşitlikte

$$x = \sqrt[3]{a-b},\ x = \sqrt[3]{b-c} \text{ ve } x = \sqrt[3]{c-a}$$

alalım. Diyelim ki $x + y + z = 0$. Bu durumda,

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

sağlanmalı. Ama

$$x^3 + y^3 + z^3 = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$$

ve dolayısıyla

$$0 = 3xyz = 3\sqrt[3]{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Bu son eşitliğin doğru olması için ya $a = b$ ya $b = c$ ya da $a = c$ sağlanmalı.

5. *$x + y + z = 1$ ve $x, y, z > 0$ ise*

$$(x + 1)(y + 1)(z + 1) \geq 64xyz$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Elbette

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq 64$$

eşitsizliğini göstermek yeterli. Eğer a, b ve c pozitifse, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}^2$$

ve

$$ab+bc+ac\geq 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ac)}=3\sqrt[3]{abc}^2$$

eşitsizlikleri geçerli. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(1+a)(1+b)(1+c) &= 1+(a+b+c)\\ &\quad +(ab+ac+bc)+abc\\ &\geq 1+\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abc}^2+\sqrt[3]{abc}^3\\ &=(1+\sqrt[3]{abc})^3\end{aligned}$$

Şimdi a = 1/x, b = 1/y ve c = 1/z alalım. Bu bize

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3$$

verir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğini x, y ve z'ye uygularsak

$$1=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 3$$

elde ederiz. Bu da istenen eşitsizliği verir.

6. *$m > 2$ ve $\theta = 2\pi/m$ olmak üzere*

$$1+\cos^2\theta+\cdots+\cos^2((m-1)\theta)=\frac{m}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

olduğunu hatırlarsak

$$\begin{aligned}&1+\cos^2\theta+\cdots+\cos^2((m-1)\theta)\\ &=\left(\frac{1+\cos 0}{2}\right)+\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1+\cos(2(m-1)\theta)}{2}\right)\\ &=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)+\cos(4\theta)+\cdots+\cos(2(m-1)\theta))\\ &=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\mathscr{R}\left(\left(e^{2\theta i}\right)^0+\left(e^{2\theta i}\right)^1+\left(e^{2\theta i}\right)^2+\cdots+\left(e^{2\theta i}\right)^{m-1}\right)\\ &=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\mathscr{R}\left(\frac{1-e^{2\theta mi}}{1-e^{2\theta i}}\right)=\frac{m}{2}+0=\frac{m}{2}.\end{aligned}$$

Burada son kısımda $\theta = 2\pi/m$ verildiğinde $1 - e^{2\theta mi} = 0$ olduğunu kullandık.

7. *Tüm x, y reel sayıları için*

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \text{ ve } f(0) = 0$$

şartlarını sağlayan bütün $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Birinci çözüm: Öncelikle $y = 0$ alırsak her x için

$$|f(x)| = |f(x) - 0| = |f(x) - f(0)| = |x - 0| = |x|$$

olduğu görülür. Buradan her x için $f(x) = x$ ya da $f(x) = -x$ olduğu çıkar. Dolayısıyla $f(1) = 1$ ya da $f(1) = -1$'dir.

Eğer $f(1) = 1$ ise tüm x'ler için $f(x) = x$ olduğunu iddia ediyoruz. Bir x için $f(x) = -x$ olduğunu varsayalım. O halde

$$|f(x) - f(1)| = |-x - 1| = |x - 1|$$

çıkar ki bu da $-x - 1 = x - 1$ ya da $x + 1 = x - 1$ verir. İkinci durumda çözüm yoktur (yani bu durum mümkün değildir), birincide ise $x = 0$ elde edilir ki bu durumda $f(x) = x$ şartı da sağlanmış olur. O halde tüm x değerleri için $f(x) = x$ sağlanmak zorundadır.

Benzer şekilde eğer $f(1) = -1$ ise tüm x'ler için $f(x) = -x$ olmalıdır, eğer bir x değeri için $f(x) = x$ oluyorsa yukarıdakine benzer şekilde

$$|f(x) - f(1)| = |x + 1| = |x - 1|$$

denklemi elde edilir ki bu ilk durumdaki denklemin aynısıdır, tek çözüm olan $x = 0$ için $f(x) = -x$ sağlandığından her x için $f(x) = -x$ eşitliğinin sağlandığı söylenebilir.

Her iki fonksiyon da aranan şartları sağladığı için sorunun iki çözümü vardır,

$$f(x) = x \text{ ve } f(x) = -x.$$

İkinci çözüm: İlk çözümdeki gibi her x için $|f(x)| = |x|$ olduğu gözlendikten sonra her x ve y için

$$f(x)f(y)=\frac{|f(x)|^2+|f(y)|^2-|f(x)-f(y)|^2}{2}$$

kullanılarak her x için

$$f(x) = f(1\cdot x) = f(1)f(x) = f(1)x$$

olur, yani f doğrusal bir fonksiyon olmak zorundadır. Burada

$$f(1) = \pm 1$$

olduğu için

$$f(x) = x$$

ya da

$$f(x) = -x$$

olabilir. Bu iki fonksiyon da istenen şartları sağladığı için çözüm kümesi bu iki fonksiyondur.

8. *Her $n \geq 1$ tamsayısı için*

$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

olduğunu gösteriniz (*Burada* arctan,

tan: $(-\pi/2, -\pi/2) \to \mathbb{R}$

fonksiyonunun ters fonksiyonudur).

Çözüm: Öncelikle

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

olduğunu kullanarak

$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}$$

ve dolayısıyla

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

elde ederiz. Tümevarım kullanacağız. Eşitliğin $n = 1$ için doğru olduğu aşikar. Bir $n \geq 1$ değeri için doğru olduğunu varsayalım:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \frac{n}{n+1}\frac{1}{2(n+1)^2}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{2n(n+1)+1}{2(n+1)^2}}{\frac{2(n+1)^3 - n}{2(n+1)^3}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{(n+2)(2n^2+2n+1)}\right) = \arctan\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

9. *Bir pozitif n tamsayısının tüm pozitif tam bölenlerinin çarpımı* $2^{40}.5^{30}$ *sayısına eşittir. Bu n sayısını bulunuz.*

Çözüm: Verilen bilgilerden sayının n = 2a5b şeklinde olduğunu anlıyoruz. Pozitif tam bölenleri şöyle bir tablo halinde yazabiliriz:

$$\begin{array}{cccc} 2^0.5^0 & 2^0.5^1 & \cdots & 2^0.5^b \\ 2^1.5^0 & 2^1.5^1 & \cdots & 2^1.5^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^a.5^0 & 2^a.5^1 & \cdots & 2^a.5^b \end{array}$$

Bu tablodaki *i*'inci sütunun (i = 0, 1, ..., b olmak üzere) çarpımı

$$S_i := 2^{\frac{a(a+1)}{2}} 5^{(a+1)i}$$

olur. O halde tüm çarpım

$$S_0 \cdot S_1 \cdots S_b = 2^{(b+1)\frac{a(a+1)}{2}} \cdot 5^{(a+1)\frac{b(b+1)}{2}}$$

olur, bu da

$$(b+1)\frac{a(a+1)}{2} = 40 \text{ ve } (a+1)\frac{b(b+1)}{2} = 30$$

verir, buradan (eşitlikleri taraf tarafa bölerek)

$a/b = 4/3$

çıkar. Basit bir denemeyle $a = 4$ ve $b = 3$ için denklemlerin sağlandığı görülür. Dolayısıyla çözüm

$n = 2^4.5^3$

sayısıdır.

10. *ABCD ve CXYZ birer karedir* (*Köşeler saatin ters yönünde sıralanmıştır*). *DX ve BZ doğru parçaları, P noktasında kesişmektedirler. DPZ açısını bulunuz.*

Çözüm: *DCX* açısı *DCB* ve *BCX* açılarının toplamına, *BCZ* açısı da *BCX* ve *XCZ* açılarının toplamına eşit. *DCB* ve *XCZ* açıları eşit olduğundan (ikisi de 90 derece) *DCX* ve *BCZ* açıları eşit. Diğer yandan *DC* ile *BC* ve *CX* ile *CZ* eş uzunlukta. Demek ki *DCX* üçgeniyle *BCZ* üçgeni eş. Buradan da *CDX* ve *CBZ* açılarının eşit olduğu çıkıyor. Yani *BPD* ve *BCD* açıları da eşit. Ama *BCD* açısı 90 derece. Bu da demek oluyor ki *BPX* açısı da 90 derece. ♥