Liouville Sayıları

Ali Nesin / anesin@bilgi.edu.tr
Özge Ülkem* / osgeklm@hotmail.com

$\sqrt{2}$'nin kesirli bir sayı olmadığı yaklaşık iki bin yıldır biliniyor. Ama $\sqrt{2}$ sayısı $x^2 - 2$ polinomunun köküdür.

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

sayısı da $x^4 - 4x^2 + 1$ polinomunu sıfırlar. Bu polinomu şu hesapları yaparak bulabiliriz:

$$x = a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

olsun. O zaman sırasıyla şu eşitlikler elde edilir:

$$x^2 = 2 - \sqrt{3},$$
$$\sqrt{3} = 2 - x^2,$$
$$3 = (2 - x^2) = 4 - 4x^2 + x^4,$$
$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0.$$

Eğer bir gerçel sayı, katsayıları kesirli sayılar olan ama sıfır olmayan bir polinomun köküyse bu sayıya ***cebirsel sayı*** denir.

Tabii ki bu tanıma göre tüm kesirli sayılar cebirseldir: p/q kesirli sayısı $x - p/q$ polinomunun köküdür.

Verilmiş bir cebirsel sayı için, bu sayıda sıfır değerini alan bir polinom bulmak kolay olmayabilir. Zorluğa örnek arıyorsanız, cebirsel olduğu kuramsal bazı olgulardan çıkan

$$a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

sayısını sıfırlayan 0'dan farklı bir polinom bulmaya çalışabilirsiniz. (16'ıncı dereceden bir polinom bu görevi görür ve daha küçük derceeli polinomlar bu sayıyı sıfırlamazlar.)

Acaba cebirsel olmayan bir sayı var mıdır? Cebirsel olmayan sayılara ***aşkın sayı*** denir. Demek ki sorumuz aşkın sayıların olup olmadığı. Bu sorunun yanıtı hiç de bariz değildir.

Aşkın bir sayı bulmak, 18 ve 19'uncu yüzyıl matematiğinin en önemli problemlerinden biriydi. Bu problem 1844'te Joseph Liouville bir sayı yaratıp onun aşkın olduğunu gösterinceye kadar, hatta daha sonra da önemini kaybetmedi.

e ve π'nin aşkın sayılar olabileceğini ilk kez Johann Heinrich Lambert 1761'de ortaya attı. Sanısını kanıtlayamasa da π'nin kesirli bir sayı olmadığını kanıtladı. e'nin kesirli bir sayı olmadığını MD-2007-IV, sayfa 35'te kanıtlamıştık.

Lambert (1728-1777)

İlk aşkın sayı örnekleri Liouville tarafından 1851'de verildi. Örneğin bu yazıda kanıtlayacağımız Liouville'in teoremine göre, Liouville sayısı olarak bilinen

$$\sum_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$$

sayısı aşkındır. Liouville'in yöntemi daha birçok aşkın sayı verir. Ama bu örnekler matematikte pek kullanılmayan sayılar. Dahası, Liouville'in teoreminin yarattığı aşkın sayı örnekleri, Lambert'in 1761 sanısını kanıtlamaya yetmiyor.

1873'de Charles Hermite e sayısının aşkın olduğunu kanıtladı. Böylece tarihte ilk kez klasik bir sayının aşkın olduğu kanıtlanmış oldu.

Liouville (1809-1882)

π sayısının aşkınlığını bundan kısa bir süre sonra, 1882'de, Ferdinand von Lindemann kanıtladı[1].

* İstanbul Bilgi Üniversitesi 4'üncü sınıf öğrencisi.

Aşkın sayıların varlığının en kolay kanıtı Cantor'un sayılabilirlik kavramıyladır. Bunun kanıtını MD-2006-III, Sonuç 22, sayfa 27'de vermiştik. Bir defa daha vermekte bir sakınca görmüyoruz:


Hermite (1822-1901)


Lindemann (1852-1939)

Teorem (Cantor). *Aşkın sayı vardır. Hatta sayılamaz sonsuzlukta vardır.*

Kanıt: Katsayıları kesirli sayılar olan polinomlar kümesinin sayılabilir sonsuzlukta olduğunu biliyoruz. (Bkz. MD-2006-III, Sonuç 3, sayfa 24.) Ayrıca her polinomun en fazla derecesi kadar kökü vardır. Bu iki olgudan sayılabilir sonsuzlukta cebirsel sayı olduğu çıkar. Ama gerçel sayılar kümesi sayılamaz sonsuzluktadır (Bkz. MD-2006-III, Teorem 21, sayfa 27). Demek ki sayılamaz sonsuzlukta cebirsel olmayan, yani aşkın sayı vardır. □

Şu ana kadar MD'de bir aşkın sayı örneği görmedik.

Cantor'un yukarda verdiğimiz kanıtının tarihi 1891'dir. O zamanlar matematikçilerin çoğu ancak karşılarında açık açık görmedikçe bir şeyin varlığına kolay kolay inanmadıklarından, Cantor'un bu kanıtını - en hafif deyimle - kuşkuyla karşılanmıştır. Örneğin ünlü Kronecker cebirsel sayıların sayılabilir olduğunun kanıtını bile kabul etmemiştir. Sadece Kronecker değil, Poincaré, Weyl, Brouwer gibi çok ünlü matematikçiler de Cantor'un buluşlarını reddetmişlerdir. Örneğin, çağının en büyük iki matematikçisinden biri olan Poincaré, Cantor'un teorisini tehlikeli bir hastalık olarak, Kronecker de Cantor'u "gençliğin beynini yıkayan bilimsel bir şarlatan" olarak nitelemiştir.

1 Lindemann çok daha genel bir teorem kanıtladı: *Eğer a cebirsel bir sayıysa e^a aşkın bir sayıdır.* MD'de görmediğimiz (ama karmaşık sayıları tanımlamış olsaydık kolaylıkla kanıtlayabileceğimiz) meşhur Euler formülüne göre $e^{i\pi} = -1$ eşitliği geçerlidir, demek ki $e^{i\pi}$ cebirseldir ve Limdemann Teoremi'ne göre $i\pi$ cebirsel olamaz. Ama i cebirsel olduğundan ($i^2 = -1$'dir), π de cebirsel olamaz (yoksa $i\pi$ çarpımı cebirsel olurdu).

Liouville Sayıları

$a \neq 0$, cebirsel bir sayı olsun. a'nın, 0 polinomundan farklı olan

$$f(x) = f_m x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomunun kökü olduğunu varsayalım. $f_m \neq 0$ varsayımını yapabiliriz. Bu durumda,

$$f(a) = f_m a^m + f_{m-1}a^{m-1} + \cdots + f_0 = 0$$

olduğundan, $f_m a^m$ terimini eşitliğin sağına geçirip tüm ifadeyi gene bu terime bölersek,

$$-1 = \frac{f_{m-1}}{f_m a} + \frac{f_{m-2}}{f_m a^2} + \cdots + \frac{f_0}{f_m a^m}$$

elde ederiz. Demek ki eğer,

$$M = \max\left\{\left|\frac{f_{m-1}}{f_m}\right|, \left|\frac{f_{m-2}}{f_m}\right|, \ldots, \left|\frac{f_0}{f_m}\right|\right\}$$

ise

$$|a| < M + 1$$

olmalı çünkü aksi halde

$$\begin{aligned}
1 = |-1| &= \left|\frac{f_{m-1}}{f_m a} + \frac{f_{m-2}}{f_m a^2} + \cdots + \frac{f_0}{f_m a^m}\right| \\
&\leq \left|\frac{f_{m-1}}{f_m}\right|\frac{1}{|a|} + \cdots + \left|\frac{f_{m-1}}{f_m}\right|\frac{1}{|a|^m} \\
&\leq M\left(\frac{1}{M+1} + \cdots + \frac{1}{(M+1)^m}\right) \\
&< M\left(\frac{1}{M+1} + \cdots + \frac{1}{(M+1)^m} + \cdots\right) \\
&= M\frac{1}{M+1}\frac{1}{1-\frac{1}{M+1}} = 1
\end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz.

Şimdi p/q kesirli sayısı a'ya $1/q$ kadar yakın olsun:

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q}.$$

Bu eşitsizliği sağlayan p *ve* q sayılarını bulmak hiç zor değildir: Eğer $q \geq 1$ tamsayısı verilmişse, p/q sayılarının hepsi a'dan küçük olamaz. $p/q \leq a$ eşitsizliğini sağlayan en büyük p doğal sayısını alalım,

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$$

olduğundan, istenen eşitsizliği elde ederiz.

Bir de ayrıca p/q'nün f'nin bir kökü olmadığını varsayalım, ki q'yü yeterince büyük alırsak ve $a \neq p/q$ ise bu koşul kendiliğinden sağlanır.

Eğer $f(p/q)$ ifadesinde paydaları eşitlersek, bir $0 \neq A \in \mathbb{Z}$ tamsayısı için,

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{A}{q^m}$$

biçiminde bir ifade buluruz. Ortalama Değer teoremi'nden [MD-2010-II, Teorem 1, sayfa 61] dolayı, a ile p/q arasında öyle bir α sayısı vardır ki,

$$-f\left(\frac{p}{q}\right) = f(a) - f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(a - \frac{p}{q}\right) f'(\alpha)$$

olur. Elbette,

$$|\alpha| \leq |a| + \left|a - \frac{p}{q}\right| \leq |a| + \frac{1}{q} \leq |a| + 1 < M + 2$$

olur. Buradan da,

$$f'(x) = mf_m x^{m-1} + (m-1)f_{m-1}x^{m-2} + \cdots + f_1$$

eşitliğini kale alarak,

$$\begin{aligned}|f'(\alpha)| &= |mf_m\alpha^{m-1} + (m-1)f_{m-1}\alpha^{m-2} + \cdots + f_1| \\ &\leq m|f_m||\alpha|^{m-1} + \cdots + |f_1| \\ &\leq m|f_m|(M+2)^{m-1} + \cdots + |f_1| = K\end{aligned}$$

çıkar. Bu arada, yukarda tanımlanan K sayısının, aynen M gibi, sadece f'nin katsayılarına, yani f'ye bağımlı olduğuna dikkatinizi çekeriz. Bu son eşitsizlikten ve diğerlerinden,

$$\frac{1}{q^m} \leq \left|\frac{A}{q^m}\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a - \frac{p}{q}\right| |f'(\alpha)| \leq \left|a - \frac{p}{q}\right| K$$

yani

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Kq^m}$$

çıkar. Şimdi q sayısını K'dan daha büyük alırsak

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{m+1}}$$

buluruz. Bulduğumuzu yazalım:

Teorem [Liouville]. *Eğer a, katsayıları tamsayı olan m'inci dereceden bir polinomun köküyse, o zaman belli bir K sayısından büyük her $q \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için şu özellik sağlanır: Eğer $p \in \mathbb{Z}$ bir tamsayıysa ve*

$$0 < \left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa,

$$\frac{1}{q^{m+1}} < \left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q}$$

eşitsizlikleri de sağlanır. □

Sonuç [Liouville]. *$a \neq 0$ bir gerçel sayı olsun. Eğer sonsuz sayıda $q \in \mathbb{N}$ için,*

$$0 < \left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir p tamsayısı bulunabiliyorsa, o zaman a sayısı m'den daha küçük dereceli ve katsayıları tamsayı olan bir polinomun kökü olamaz. Eğer bu koşul sonsuz sayıda m için gerçekleşiyorsa o zaman a cebirsel olamaz.

Kanıt: $f \neq 0$, derecesi $m < n$ olan ve a'yı sıfırlayan bir polinom olsun. O zaman $x^{n-(m+1)}f$ polinomu da a'yı sıfırlar ve derecesi $n-1$'dir. Ama bu da teoremle çelişir. Birinci önerme kanıtlanmıştır. İkinci önerme de bundan çıkar. □

Sonuç. *Eğer $(a_i)_i$, 0'dan 9'a kadar olan rakamlardan oluşan ve bir zaman sonra sabit 0 olmayan bir diziyse o zaman*

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^{i!}}$$

sayısı aşkındır.

Kanıt: Bir m doğal sayısı sabitleyelim. $q = 10^{m!}$ olsun. Ve p sayısını

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{10^{i!}}$$

olacak biçimde seçelim. O zaman,

$$\begin{aligned}0 < a - \frac{p}{q} &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{10^{i!}} < 9\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}} \\ &\leq \frac{9}{10^{(m+1)!}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} = \frac{9}{10^{(m+1)!}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{10}{10^{(m+1)!}} < \frac{1}{\left(10^{m!}\right)^m} = \frac{1}{q^m}\end{aligned}$$

olur.Sonuç bir önceki sonuçtan çıkar. □

Sonuç. *Aşkın sayılar sayılamaz sonsuzluktadır.*

Kanıt: Yukardaki sonuçtaki a sayısını

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

sayısına götüren fonksiyon istediğimiz sonucu verir. □

Kaynakça

George Valiron, **Théorie des Fonctions**, Masson et Cie, Paris 1966.