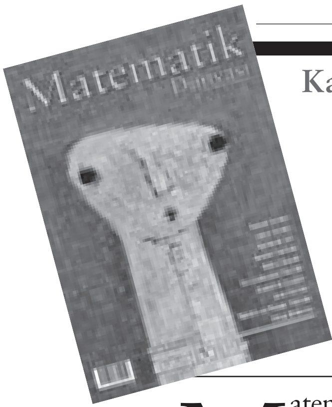

Kapak Konusu: Analizden Konular

Harmonik Serinin Iraksaklığı

İlham Aliyev* / *ialiev@akdeniz.edu.tr*
Ayhan Dil* / *adil@akdeniz.edu.tr*

Matematik bölümlerinin birinci sınıflarına okutulan analiz derslerinde, genel terimi sıfıra giden, fakat ıraksayan serilerden bahsedilirken, verilen örneklerin en başında

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

serisi gelir. ***Harmonik seri*** olarak adlandırılan bu seri ve serinin kısmi toplamlar dizisi

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\ldots),$$

yani ***harmonik sayılar*** yüzyıllardan beri matematikçilerin ilgisini çekmektedir. Harmonik sayılar ve ***harmonik dizi*** olarak bilinen

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$$

dizisi, başta analiz, analitik sayılar teorisi, kombinatorik olmak üzere matematiğin birçok alanında ve hatta müziğin teorisinde bile kullanım alanına sahiptir ("harmonik" ismi de zaten müzikten gelmiştir).

Biz bu yazıda harmonik serinin ıraksaklığının çeşitli kanıtlarını konu edineceğiz. Bu kanıtların büyük bir kısmı 400 yıldan uzun bir süredir bilinmektedir. Birkaç kanıt ise nispeten daha yenidir. Gelecekte de yeni kanıtların verilmesi muhtemeldir. Matematikte yeni kanıtlara olan ilgi, söz konusu iddianın güvenilirliğini artırma kaygısından daha çok, hem değişik yöntemlerin uygulanabilirliğini göstermek açısından, hem de pedagojik açıdan ("farklı zevklere hitap etme") önem taşımaktadır.

Sonsuz toplamlar (seriler) teorisinde harmonik serinin önemli bir yere sahip olmasının en önemli nedenlerinden biri, bu serinin, karşılaştırma testlerinde bir nevi "mihenk taşı" görevini gören

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

serileri için "doğal sınır" rolü oynamasıdır.

Harmonik serinin bir başka ilginç tarafı da, $1/n$ sayılarının sıfıra çok yavaş yakınsamalarına rağmen,

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

dizisinin sonsuza çok yavaş ıraksamasıdır.

Bu masum görünüşlü dizi, teori olmadan uygulamanın çok fazla ileri gidemeyeceğini göstermesi açısından da dikkat çekicidir. Ne demek istediğimizi anlatalım: Bir anlığına harmonik serinin ıraksadığını bilmediğimizi varsayalım ve bilgisayarlar yardımıyla onun ıraksaklığına dair deliller elde etmeye çalışalım. $n = 10^{13}$ (1'in yanında 13 tane sıfır!) alınırsa, H_n sayısı 30'dan küçük bir sayı olur. H_n'nin daha da büyümesini istiyorsak, mesela, 60'a yakın bir sayı olmasını istiyorsak, $n = 10^{30}$ alınmalıdır. Gündelik yaşamımızda kullandığımız bilgisayarların bile bu hesabı yapabilmeleri için yıllarca çalışmaları gerekmektedir. Yani, sayıları sadece toplayabilen bir bilgisayar, harmonik serinin ıraksaklığını gösterme umudumuzu artırmak yerine tam tersine azaltmakta ve pratik olarak bu serinin "yakınsak olduğunu" söylemektedir.

*

Harmonik serinin (veya H_n dizisinin) ıraksaklığının çeşitli kanıtlarını vereceğiz. Bu konuda bilgisini daha da artırmak isteyen okurumuza yazının sonundaki kaynaklara bakmasını tavsiye ederiz.

Tarihi Euler dönemine kadar uzanan ve integral yardımıyla yapılan bir kanıtla başlayalım. Bu kanıt, harmonik serinin ıraksama hızını tahmin etme açısından da çok önemlidir.

Kanıt 1. Eğer $k = 1, 2, \ldots, n$ için $k < x < k + 1$ alınırsa,

$$\frac{1}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$$

olur ve buradan

* Akdeniz Üniversitesi öğretim üyeleri.

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k} \qquad (1)$$

olur. (1) eşitsizliği $k = 1, 2, .., n$ değerleri verilerek taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ve buradan da

$$\ln(n+1) < H_n < \ln n + 1 \qquad (2)$$

elde edilir. (2) eşitsizliğinden, H_n dizisinin ıraksaklığı ve bundan da öte, ıraksama hızının $\ln n$ olduğu görülür. □

Örneğin (2)'de $n = 10^{13}$ alınırsa,

$$\ln n = \ln 10^{13} = 13 \ln 10 \approx 30$$

olur. Yani,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$

dizisinin ilk 10^{13} teriminin toplamı yaklaşık 30'dur.

$$a_n = H_n - \ln n$$

tanımını yaparsak, (2)'den dolayı,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < a_n < 1$$

olur. Yani, $(a_n)_{n\geq 1}$ dizisi sınırlı bir dizidir. Öte yandan, tanımlardan dolayı,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} \\ &= \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx \\ &= \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1}\right)dx > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $(a_n)_{n\geq 1}$ dizisi (kesin) azalan bir dizidir. Monoton ve sınırlı bir dizinin sonlu bir limiti olduğundan,

$$(a_n)_{n\geq 1} = (H_n - \ln n)_{n\geq 1}$$

dizisi yakınsaktır. Bu dizinin limiti Euler tarafından γ ile gösterilmiştir. ***Euler-Mascheroni sabiti*** olarak bilinen γ sabitinin yaklaşık değeri

$$\gamma \approx 0{,}5772$$

dir ve kesirli bir sayı olup olmadığı henüz bilinmemektedir. Böylece, büyük n değerleri için

$$H_n \approx \ln n + \gamma$$

olduğunu söyleyebiliriz. Daha ince tahminlerden biri şöyledir: $0 < e_n < 1/n$ eşitsizliğini sağlayan bir $e_n > 0$ sayısı için,

$$H_n = \ln n + \gamma + e_n$$

olur.

Kanıt 2. Bir an için harmonik serinin toplamının sonlu olduğunu varsayalım. Bu toplama H diyelim. O halde,

$$\lim_{n\to\infty} H_n = H$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} H_{2n} = H$$

olmalıdır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_n) = 0$$

olur. Oysa ki,

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &= n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

bir çelişki. □

Kanıt 3. $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ toplamı sonlu bir H sayısına eşit olsun. Seri yakınsak olduğundan, terimleri ikişer ikişer gruplayabiliriz (ve sonuç değişmez):

$$\begin{aligned} H &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = H \end{aligned}$$

olur ve buradan $H > H$ çelişkisi çıkar. □

Kanıt 3'ün Varyasyonları. Yukarıdaki kanıtta, serinin elemanlarını ikişer ikişer parantezleme yerine, üçer üçer, dörder dörder parantezleme yaparak da aynı çelişki elde edilebilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} H &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \cdots \\ &> 3\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{9}\cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = H \end{aligned}$$

eşitsizliğinden, yine $H > H$ çelişkisine ulaşılır. □

Kanıt 4. $H = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ toplamının sonlu olduğunu varsayalım. Pozitif terimli yakınsak bir seride toplananların yerlerini istediğimiz şekilde değiştirebiliriz. O halde,

$$\begin{aligned} H &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots \\ &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)+\frac{1}{2}H. \end{aligned}$$

Buradan,

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{1}{2}H$$

bulunur, ki bundan da

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}H &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots \\ &< 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}H \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. □

Kanıt 5.

$$\begin{aligned} A &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots>0 \end{aligned}$$

tanımını yapalım. (A = ln 2 ama bunu bilmeye gerek yok bu kanıtta). Eğer

$$H = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

serisi yakınsaks, A serisisi mutlak yakınsaktır ve dolayısıyla, toplanan terimlerin yerleri değiştirilebilir. Bu durumda, Kanıt 4'teki "eşitlikler" kullanılırsa,

$$\begin{aligned} A &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{2}H-\frac{1}{2}H=0, \end{aligned}$$

yani, $A = 0$ çelişkisi elde edilir. □

Kanıt 6. $H = 1+ 1/2 + 1/3 + \cdots$ toplamının terimlerini aşağıdaki şekilde gruplayalım:

$$\begin{aligned} H &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}\right) \\ &\quad +\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\cdots+\frac{1}{999}\right)+\cdots \\ &\geq 9\cdot\frac{1}{10}+90\cdot\frac{1}{100}+900\cdot\frac{1}{1000}+\cdots \\ &= \frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikten H toplamının sonsuz olduğu çıkar. □

Kanıt 7. Eğer $n = 2, 3, 4, \ldots$ için

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}>\frac{2}{n}$$

eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>\frac{2}{3}, \\ &\frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{6}, \\ &\frac{1}{8}+\frac{1}{10}>\frac{2}{9}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} H &= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\cdots \\ &> 1+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)+\cdots \\ &= 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots \\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots \\ &= 1+H, \end{aligned}$$

yani, $H > 1 + H$ çelişkisi elde edilir. □

Kanıt 8. $\lim_{n\to\infty} H_n = H$ ve $H < \infty$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $(H_n)_{n\geq 1}$ dizisi sınırlı bir dizi olmalıdır. Oysa, her n doğal sayısı için,

$$\begin{aligned} H_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n} \\ &= 1+\frac{n}{2} \end{aligned}$$

olur. Yani, $(H_n)_{n\geq 1}$ dizisi sınırlı değildir. □

Kanıt 9. Bu kanıt, her $x \neq 0$ için iyi bilinen

$$e^x > 1 + x$$

eşitsizliğine dayanıyor.

$$\begin{aligned} e^{H_n} &= e^1 e^{1/2} e^{1/3} \cdots e^{1/n} \\ &> (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1, \end{aligned}$$

yani

$$e^{H_n} > n + 1$$

eşitsizliğinden,

$$H_n > \ln(n+1)$$

bulunur. Dolayısıyla, $(H_n)_n$ dizisi sınırlı değildir.□

Şimdi de geometrik seri yardımıyla bir kanıt verelim.

Kanıt 10.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1 + \overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)}^{k \text{ tane terim}} \\ &+ \overbrace{\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k^2+k+1}\right)}^{k^2 \text{ tane terim}} \\ &+ \overbrace{\left(\frac{1}{k^2+k+2}+\cdots+\frac{1}{k^3+k^2+k+1}\right)}^{k^3 \text{ tane terim}} + \cdots \\ &> \frac{k}{k+1} + \frac{k^2}{k^2+k+1} + \frac{k^3}{k^3+k^2+k+1} + \cdots \\ &> 1 + \left(\frac{k}{k+1}\right) + \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{k}{k+1}} = k+1. \end{aligned}$$

Herhangi pozitif k değeri için doğru olan bu eşitsizlik, harmonik dizinin sınırlı olmadığını, dolayısıyla yakınsak olmadığını gösterir. □

Kanıt 11. Bu kanıt, iyi bilinen

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}$$

eşitsizliğine dayanmaktadır. Oldukça kolay bir hesap yapalım:

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) dx > \int_0^{1-1/n} \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) dx \\ &> \int_0^{1-1/n} \frac{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n}{1-x}\, dx \\ &> \int_0^{1-1/n} \frac{1-\dfrac{1}{e}}{1-x}\, dx = \left(1-\frac{1}{e}\right)\int_0^{1-1/n}\frac{dx}{1-x} \\ &= \left(1-\frac{1}{e}\right)\ln n. \end{aligned}$$

Yani,

$$H_n > \left(1-\frac{1}{e}\right)\ln n$$

elde edilir ve böylece $(H_n)_n$ dizisinin sınırlı olmadığı görülür. □

Sıradaki iki kanıt Bernoulli kardeşlere atfedilmektedir.

Kanıt 12. Her $k \geq 2$ tamsayısı için

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k^2} > (k^2-k)\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{k}$$

ve buradan da

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k^2} > 1$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} H_{n^2} &= 1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^2}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) \\ &\geq 1 + 1 + \cdots + 1 = n \end{aligned}$$

olur ve bu da sonucu bir defa daha kanıtlar. □

Kanıt 13. Bu kanıtta,

$$\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \cdots$$

sonsuz toplamları için "teleskopik formül" kullanılacaktır:

$$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\cdots=\frac{1}{k}.$$

Şimdi $H = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ serisinin yakınsak olduğunu varsayarak, şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned}H &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\\ &= 1+\frac{1}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{3}{3.4}+\frac{4}{4.5}+\cdots\\ &= 1+\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\right)\\ &\quad+\cdots\\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=1+H.\end{aligned}$$

Yani, $H = 1 + H$ çelişkisi elde edilir. □

Kanıt 14. Bu kanıt, Kanıt 9 ile çok benzerdir ve $0 \neq x > -1$ için doğru olan $x > \ln(1 + x)$ eşitsizliğine dayanmaktadır.

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))=\ln(n+1)$$

eşitsizliğinden, $H_n > \ln(n + 1)$ elde edilir. □

Kanıt 15. Herhangi bir k doğal sayısı için

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}>1$$

olduğunu gösterirsek, buradan elbette

$$H=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

serisinin ıraksaklığı çıkar. Bir önceki kanıtta söz ettiğimiz $x > \ln(1 + x)$ eşitsizliğini burada da kullanacağız.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}\\ &>\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{3k}\right)\\ &=\ln\left(\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+1}\cdots\frac{3k+1}{3k}\right)\\ &=\ln\left(\frac{3k+1}{k}\right)>\ln 3>1.\end{aligned}$$

Bu kadar farklı kanıtlar verilirken, "Fibonacci çılgınları" boş durur mu? Sıradaki kanıt bu meşhur diziye dayanmaktadır.

Kanıt 16. İyi bilindiği üzere, Fibonacci dizisi, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

formülüyle tanımlanmaktadır. Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranlarının limiti, yani,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

"altın oran" ismiyle meşhur olan bir sayıdır. Bu limitten yola çıkarak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{F_{n-1}}{F_n}\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)=\frac{1}{\alpha^2}\neq 0$$

elde edilir. Şimdi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)}_{2\text{ terim}}\\ &\quad+\underbrace{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{3\text{ terim}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{13}\right)}_{5\text{ terim}}\\ &\quad+\underbrace{\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{21}\right)}_{8\text{ terim}}+\cdots\\ &\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{5}{13}+\frac{8}{21}+\cdots\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}\end{aligned}$$

ifadesinde, en son yazılan serinin genel teriminin limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}=\frac{1}{\alpha^2}\neq 0$$

olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$$

serisi sonsuza ıraksar. Dolayısıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

serisi de ıraksaktır. □

Kanıt 17. Yine, $H = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ serisinin yakınsak olduğunu varsayalım. O halde,

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\cdots$$
$$>1+\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+\frac{4}{10}+\frac{5}{15}+\frac{6}{21}+\cdots$$
$$=\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6}+\frac{2}{7}+\cdots$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots\right)$$
$$=2(H-1).$$

Buradan, $H < 2$ çıkar. Oysa, serinin ilk dört teriminin toplamı 2'den büyüktür. □

Kanıt 18. Şimdi de matematiğin en temel kanıt yöntemlerinden birisi olan tümevarımı kullanarak, her $n \in \mathbb{N}$ için
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$$
olduğunu gösterelim.

$n = 1$ için, $1 > \ln 2$ eşitsizliği doğrudur. Eşitsizliğin bir n için doğruluğunu varsayarak, $n + 1$ için kanıtlayalım. Varsayımdan,
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\ln(n+1)+\frac{1}{n+1}$$
olur. O halde,
$$\ln(n+1)+\frac{1}{n+1}>\ln(n+2)$$
olduğunu gösterirsek tümevarım adımını kanıtlamış oluruz.
$$\ln(n+1)+\frac{1}{n+1}>\ln(n+2)$$
eşitsizliği
$$\frac{1}{n+1}>\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
eşitsizliğine denktir. Yani
$$1>\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
olduğu gösterilmelidir. Bu ise
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<e$$
eşitsizliğine denktir.

Sonuncu eşitsizlik iyi bilinen temel bir eşitsizlik olup
$$a_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$$
dizisinin artarak e sayısına yakınsaması gerçeğine dayanır.

Başka Kanıtlar (Balyozla sivrisinek öldürmek)

$H = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ serisinin ıraksaklığı aşağıdaki teoremlerden de dolaylı olarak elde edilebilir.

Teorem 1 (Cauchy). $(a_n)_{n\geq 1}$, *pozitif sayılardan oluşan artmayan bir dizi olsun. Bu durumda,*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
serisinin yakınsaklığı için gerek ve yeter koşul,
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$
serisinin yakınsaklığıdır.

Teorem 2 (Cauchy). $(a_n)_{n\geq 1}$, *pozitif sayılardan oluşan azalan bir dizi olsun. Eğer*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
yakınsak ise, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ *olmalıdır.*

Teorem 3 (Cesàro). *Aşağıdaki seri*
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
bir S sayısına yakınsak olsun. O halde,
$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
tanımıyla,
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k\right)$$
dizisi de S'ye yakınsar.

Teorem 4. $(a_n)_n$ *pozitif sayıların bir dizisi olsun.*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$$
sonsuz çarpımının yakınsak olmasıdır.

Yukarıda verilen teoremlerde $a_n = 1/n$ alınırsa, harmonik serinin ıraksaklığı çıkar.

Teorem 5 (Cauchy). $x \geq 1$ *için tanımlanmış* $f(x)$ *fonksiyonu, pozitif ve monoton azalan olsun.*
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$
serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,
$$J_n=\int_1^n f(t)dt$$
formülüyle tanımlanmış dizinin sınırlı olmasıdır.

Bu son teoremde $f(t) = 1/t$ alınırsa,

$$J_n = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n \to \infty$$

olduğu ve dolayısıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisinin ıraksadığı çıkar.

Teorem 6 (Abel). *Aşağıdaki seri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

yakınsak ise,

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n$$

fonksiyonu $0 \leq r \leq 1$ *aralığında süreklidir ve dolayısıyla,*

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

sağlanır.

Harmonik serinin ıraksak olduğunu kanıtlamak için Abel'in bu teoreminin nasıl kullanacağımızı gösterelim.

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisi yakınsak olursa, Abel teoremine göre,

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r^n$$

fonksiyonu için

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = H$$

sonlu olmalıdır. Şimdi, $0 \leq t < 1$ için

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^n + \cdots = \frac{1}{1-t}$$

eşitliğinin her iki yanını, $x < 1$ olmak üzere, $[0, x]$ aralığında integrallersek,

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt$$

$$= \ln \frac{1}{1-x}, \quad (0 \leq x < 1)$$

elde edilir. Eğer

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisi yakınsak olsaydı, Abel teoremine göre,

$$\lim_{x \to 1^-} \ln \frac{1}{1-x}$$

sonlu bir sayı olmak zorundaydı. Oysa, bu limit sonsuzdur.

Teorem 7 (Erdös). *Asal sayıların terslerinin toplamı, yani*

$$\sum_{p \, asal} \frac{1}{p}$$

serisi sonsuzdur.

Bu teoremden, açık bir şekilde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

toplamının da sonsuz olması gerektiği çıkar.

Not: Yukarıdaki teorem daha önce Euler tarafından kanıtlanmıştır. Ancak, Euler kendi kanıtında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisinin ıraksaklığını kullanmış, Erdös ise kanıtında harmonik serinin ıraksaklığından yararlanmamıştır. Elbette, bu kadar önemli ve zor kanıtı olan bir teoremi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serisinin ıraksaklığını göstermek için kullanmak, balyozla değil, tankla topla sivrisinek öldürmeye benzer.

Son söz yerine

Harmonik serinin sonsuza ıraksadığını, matematikten uzak olanları bile ikna edecek kadar çok sayıda "maddi delil" kullanarak kanıtladık. Bir sosyal bilimci arkadaşım, Pisagor teoreminin 300'den fazla kanıtının olduğunu ve "Pisagor fanatikleri" tarafından hala da yeni kanıtlar arandığını duyunca, "Elde bu kadar maddi delil varken, o teoremin doğruluğuna şüphe eden insanların aklına şaşarım" demişti. Yukarıda da bahsettiğimiz gibi, bir teoremin birden fazla kanıtının olması, onun "daha güvenilir" teorem olması anlamına gelmez. Aslında, bir kanıt yeter (ve bazen artar bile...) Fakat, bir teoreme farklı kanıtların bulunması, matematikçiler arasında her zaman takdirle karşılanmıştır. Çünkü, "farklı zevklere hitap etme" dışında, bazen kanıtta kullanılan yöntem, teoremin kendisinden daha önemli olur!

Serilerle yeni tanışan öğrencilerin kafasında şöyle bir soru oluşması beklenir: genel terimi $1/n$'den daha hızlı sıfıra giden, ama yine de ıraksak olan pozitif terimli seri(ler) var mıdır?

Bu sorunun yanıtının "evet" olduğunu aşağıdaki örneklerle söyleyebiliriz:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}, \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln n)} \text{ vs.}$$

Aşağıdaki teorem bu tip örnekleri kurmanın bir yolunu göstermektedir.

Teorem 8: *Her n için $a_n > 0$ ve*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ıraksak olsun. O halde,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

tanımıyla,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n}$$

serisi de ıraksaktır.

Teorem, esasında şunu söylüyor: Pozitif terimli ve ıraksak herhangi bir seri verildiğinde, terimleri sıfıra daha hızlı giden ve yine de ıraksak olan yeni bir bir seri kurulabilir. (Bu teoremin kanıtını, örneğin [6] kaynağında bulabilirsiniz.)

Yazımızın sonunda, harmonik seri ile ilintili olan ilginç bir problem çözelim.

Problem. *Doğal sayıların öyle bir A altkümesini alalım ki, bu altkümedeki sayıların yazılımında bir rakam (örneğin 7) hiç kullanılmasın. O halde,*

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n}$$

serisi yakınsak mı, yoksa, ıraksak mıdır?

Çözüm: Bu serinin yakınsak olup, toplamının da 90'dan küçük olduğunu gösterelim. Yazılımında hiç 7 bulunmayan k basamaklı sayılar sayısı

$$8\times 9^{k-1}$$

dir, dolayısıyla 9^k'dan küçüktür. Diğer yandan, k basamaklı her n sayısı için

$$10^{k-1} \le n < 10^k$$

eşitsizlikleri sağlandığından, bu n'ler için

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{10^{k-1}}$$

olur. O halde,

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{\infty} 9^k \cdot \frac{1}{10^{k-1}} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 9^{k-1} \frac{1}{10^{k-1}}$$

$$= 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 90,$$

yani,

$$\sum_{n\in A} \frac{1}{n} < 90$$

olur. ♠

Kaynaklar:

[1] A. Nesin, *Sonsuza giden diziler*, Matematik Dünyası, 2007-III, sayfa 50-51.

[2] S. J. Kifowit and T. A. Stamps, *The harmonic series diverges again and again*, The AMATYC Review, 27 (2006) 31-43.

[3] D. M. Bradley, *A note on the divergence of the harmonic series*, American Mathematical Monthly, 107 (2000) sayfa 651.

[4] A. Fearnehough, *Another method for showing the divergence of the harmonic series*, The Mathematical Gazette, 75 (1991) sayfa 138.

[5] A. J. B. Ward, *Divergence of the harmonic series*, The Mathematical Gazette, (c) (1970) sayfa 277.

[6] J. M. Ash, *Neither a worst convergent series nor a best divergent series exists*, College Mathematics Journal, 28 (1997) 296-297.

[7] S. J. Kifowit and T. A. Stamps, *Serious about the harmonic series*, 31st Annual Conf. of the American Math. Association of Two-Year Colleges; San Diego, CA; November 10, 2005.

[8] S. J. Kifowit, *Serious about the harmonic series*, 31st Annual Conference of the Illinois Mathematics Association of Community Colleges; Monticello, IL; March 31, 2006.

[9] S. J. Kifowit, *More proofs of the divergence of the harmonic series*, Preprint (2010), Prairie State College, 1-16.10.

[10] J. Tanton, *A Dozen Harmonious Questions*, Math Horizons, V.17, No:4, 2010.