# Kartezyen Çarpım Serbest Grup Olmayabilir

Ali Nesin / *anesin@bilgi.edu.tr*
Halime Ömrüuzun* / *halime389@hotmail.com*

Bu yazıda $A = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunun serbest abelyen grup olmadığını, yani bir $I$ kümesi için $\oplus_I \mathbb{Z}$ grubuna izomorf olmadığını kanıtlayacağız.

Böylece sonlu eleman tarafından üretilmiş burulmasız (torsiyonsuz yani) abelyen grupların serbest grup olduklarını söyleyen teoremin, sonlu eleman tarafından üretilmeyen abelyen gruplar için doğru olmadığı anlaşılacak.

Tam tersine böyle bir izomorfizmanın olduğunu varsayalım. O zaman $A$'da öyle bir $(e_i)_{i\in I}$ eleman ailesi vardır ki,

$$A = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} = \oplus_I \mathbb{Z}e_i \qquad (1)$$

olur.

**Kanıtın Anafikri:** $\oplus_I \mathbb{Z}e_i$ serbest abelyen grubunda 2'ye bölünen, yani 2'nin katı olan elemanlar kümesi $\oplus_I 2\mathbb{Z}e_i$ altgrubudur. 3'e bölünen elemanlar kümesi ise $\oplus_I 3\mathbb{Z}e_i$ altgrubudur. Genel olarak, $n$'ye bölünen elemanlar kümesi $\oplus_I n\mathbb{Z}e_i$ altgrubudur. Bunların hepsinin kesişimi de 0 altgrubudur. Yani $\oplus_I \mathbb{Z}e_i$ serbest abelyen grubunda **tüm** doğal sayılara bölünen 0'dan farklı bir eleman yoktur. Bir başka deyişle, verilmiş her $a \neq 0$ elemanı için, $a = nx$ denkleminin çözümünün olmadığı bir $n > 0$ doğal sayısı mutlaka vardır. Demek ki

$$\exists a \neq 0\ \forall n > 0\ \exists x\ (a = nx) \qquad (2)$$

önermesi $\oplus_I \mathbb{Z}e_i$ serbest abelyen grubunda ve her serbest abelyen grupta yanlıştır, her doğal sayıya bölünen 0'dan farklı bir eleman yoktur. Bunu aklımızda tutalım, çünkü kanıtın ana fikri bu önermede.

Aynı nedenden (2) önermesi $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunda da yanlıştır. Ama bu önermenin $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunda doğru olmasına ramak kalmıştır. Açıklayalım.

$$a = (n!)_n = (1, 1, 2, 6, 24, 120, ..., n!, ...) \in \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

olsun. $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunda $a = 2x$ denkleminin çözümü yoktur çünkü $a$'nın ilk iki koordinatı 2'ye bölünmez. Benzer nedenden $a = 3x$ ya da $a = 4x$ denkleminin de çözümleri yoktur. Ama sonlu sayıdaki ilk birkaç koordinatı yok sayarsak, yani biraz hata payıyla (!) $a = nx$ denklemini $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunda çözebiliriz. Mesela

$$x = (0, 0, 0, 2, 8, 40, ..., n!/3, ...)$$

ise

$$3x = (0, 0, 0, 6, 24, 120, ..., n!, ...)$$

olur ve

$$a - 3x = (1, 1, 2, 0, 0, ..., 0, ...) \in \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \le \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

olur. Bir başka deyişle, $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunda, verilmiş bir $a \neq 0$ için

$$a = nx$$

denklemini, bırakın her $n$ için çözmeyi, tek bir $n > 1$ için bile çözemeyiz belki ama,

$$\overline{a} = n\overline{x}$$

denklemini her $n > 0$ için

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

bölüm grubunda çözebiliriz. Sonuç olarak (2) önermesi

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$$

bölüm grubunda doğrudur.

(2) önermesi $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} / \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ bölüm grubunda doğru olduğu gibi, $\oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \le H < \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ kapsamalarını sağlayan her $H$ altgrubu için, $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/H$ bölüm grubunda da doğrudur elbette.

Dolayısıyla eğer $H$'yi, (1) eşitliğini kullanarak,

**a.** $\oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \le H < \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$,

**b.** $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/H$ serbest

olacak biçimde seçebilirsek, o zaman bir çelişki elde ederiz ve böylece (1) eşitliğinin doğru olamayacağı çıkar.

Planımız tam böyle yürümeyecek. $a$'yı yukardaki gibi seçmeyeceğiz. Ama her pozitif doğal sayıya olmasa da, giderek artan doğal sayılara bölünen bir $a$ elemanının ve yukardaki gibi bir $H$ altgrubunun varlığını göstereceğiz, bunlar da bize yetecek.

Önce (2) önermesini değiştirelim:

*Sonsuz sayıda $n$ doğal sayısına bölünen bir $a \neq 0$ elemanı vardır.* (2′)

* İstanbul Bilgi Üniversitesi 2'nci sınıf öğrencisi.

Bu önerme de aynen (2) önermesi gibi her serbest abelyen grupta ve hatta $A = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ grubunda yanlıştır.

**Kanıt: i.** $A$ sayılamaz sonsuzlukta olduğundan, $I$ da sayılamaz sonsuzluktadır. (Hatta her ikisinin de kardinalitesi $\mathbb{R}$'nin kardinalitesi kadardır.)

**ii.** $f_n \in A = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$, $n$'inci koordinatı 1, diğer tüm koordinatları 0 olan eleman olsun. Bunlardan sayılabilir sonsuzlukta vardır. $f_n$'yi $e_i$'lerin lineer kombinasyonu olarak yazalım:

$$f_n = \sum_{i \in I} \alpha_{ni}\, e_i.$$

Yukardaki toplamda sadece sonlu sayıda $\alpha_{ni} \neq 0$ olur. Dolayısıyla

$$J = \{i \in I : \text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } \alpha_{ni} \neq 0\}$$

kümesi sayılabilir sonsuzluktadır. Böylece,

$$f_n = \sum_{i \in J} \alpha_{ni}\, e_i \tag{3}$$

yazabiliriz.

**iii.** Bu paragrafta $H$'yi bulacağız.

$$H = \langle e_i : i \in J \rangle = \bigoplus_{i \in J} \mathbb{Z} e_i$$

olsun. $J$ sayılabilir sonsuzlukta olduğundan, $H$ de sayılabilir sonsuzluktadır. Ayrıca, (3)'ten dolayı, her $n$ için $f_n \in H$ olduğundan,

$$\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} = \langle f_n : n \in I \rangle \leq H$$

olur. Ayrıca elbette,

$$A = \bigoplus_I \mathbb{Z} e_i = H \oplus \left(\bigoplus_{I \setminus J} \mathbb{Z} e_i\right)$$

ve

$$A/H \simeq \bigoplus_{I \setminus J} \mathbb{Z} e_i$$

olur. Yani $A/H$ serbest abelyendir. Dolayısıyla (2′) önermesi $A/H$ grubunda doğru olamaz.

**iv.** Eğer bir $a = (a_n)_n \in \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ elemanının tüm koordinatları 0'dan değişikse ve her $n$ için

$$a_n < a_{n+1}$$

ise ve ayrıca $a_n$ koordinatı $a_{n+1}$ koordinatını bölüyorsa, $a$ elemanına ***üstel artan eleman*** diyelim. Üstel artan elemanlar kümesi sayılamaz sonsuzluktadır çünkü üstel bir eleman elde etmek için her koordinattan bir sonraki koordinatı elde etmek için o koordinatı -mesela- 2'yle **ya da** 3'le çarpabiliriz.

**v.** $H$ sayılabilir sonsuzlukta, üstel artan elemanlar sayılamaz sonsuzlukta olduğundan, $H$'de olmayan bir üstel artan eleman vardır. Bu elemanlardan birine $a = (a_n)_n$ diyelim. $A/H$ grubunda, her $n$ için

$$\overline{a} = a_n \overline{x}$$

denkleminin bir çözümü vardır. Nitekim eğer

$$x = (0, 0, ..., 0, 1, a_{n+1}/a_n, a_{n+2}/a_n, ...) \in A$$

ise

$$a - a_n x = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, 0, 0, ...) \in \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z} \leq H,$$

ve $A/H$ grubunda,

$$\overline{a} = a_n \overline{x}$$

olur. Demek ki (2′) önermesi $A/H$'de doğru. Bu da paragraf (iii)'te kanıtlanan olguyla çelişir. Hedeflediğimiz sonuç kanıtlanmıştır. ♠