açık kalırlar ve bu sayıları bölen en büyük tek sayılar birer tam karedirler.

Doğru Yanıtlar: Ersin Norlu, Mehmet Hafızoğlu, Gökhan Gökgöz, Abdullah Demirhan, Efekan Kökcü, Ahmet Saraçoğlu, Zafer Çorapçı, Sibel Fidan, Ezgi Mezgitli

MD-2012-I.4. Mor. *Hazal ve Burçin bir oyun oynamaktadırlar. Oyunun amacı Burçin'in Hazal'ın iki kutudan birine sakladığı mor topu bulmaktır. Mor top dışında 6 tane kırmızı top bu iki kutudan her birine üçer üçer dağıtılmıştır. Mor topun hangi kutuda olduğunu sadece Hazal bilmekte ve top çekerken kimse kutuya bakmamaktadır. Hazal ve Burçin sırayla (ve bu sırayla) bu iki kutudan birinden birer top çekecektir. Ayrıca Burçin Hazal'ın seçtiği kutudan top seçememektedir. Hazal mor topu çekerse veya Burçin mor topu çekerse, Hazal oyunu kaybedecektir. İlk hamle sırası Hazal'da olduğuna göre en iyi strateji için Hazal, içinde mor top olan kutudan mı yoksa diğer kutudan mı top çekmelidir?*

Çözüm: Kutulara A ve B diyelim. Her iki kutuda da üçer tane kırmızı top bulunmaktadır. Diyelim ki mor top A kutusunda olsun. Hazal bu bilgiye sahip olduğundan bu varsayımı yapabiliriz. Eğer Hazal A kutusundan top seçmek isterse 1/4 ihtimalle mor topu seçip oyunu kaybedecektir. Diğer durumda oyunu kesin kazanacaktır. Eğer Hazal B kutusundan top çekerse, Burçin A kutusunda top seçecektir ve 1/4 ihtimalle mor topu seçecektir. Sonuç olarak her iki durum da aynı derecede avantajlıdır. Seçme işlemi tamamen Hazal'ın psikolojisine bağlıdır.

Doğru Yanıtlar: Ersin Norlu, Gökhan Gökgöz, Efekan Kökcü, Ahmet Saraçoğlu, Zafer Çorapçı

MD-2012-I.5. Elek.

$A = \{n(n+2) : n < 1000\}$

$= \{3, 8, 15, ..., 999 \times 1001\}$ *ve*

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$

olsun. C kümesi A kümesinde olup B kümesindeki hiçbir elemana bölünmeyen sayılar olsun. C kümesindeki elemanlar hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Çözüm: İlk olarak B kümesindeki elemanların hepsinin asal sayı olduğunu gözlemleyelim. Ayrıca 1001 sayısından küçük herhangi bir sayının B kümesindeki hiçbir elemana bölünmemesi için, bu sayı 31'den büyük ve 1001'den küçük bir asal sayı olmalıdır. Demek ki $n < 1000$ için, $n(n + 2)$ sayısının B kümesindeki herhangi bir sayıya bölünmemesi için hem n sayısı hem de $n + 2$ sayısı 31'den büyük ve 1001'den küçük bir asal sayı olmalıdır. Demek ki

$C = \{n(n + 2) : 31 < n < 1000, n \text{ ve } n + 2 \text{ asal sayı}\}$

olur.

Doğru Yanıtlar: Ersin Norlu, Gökhan Gökgöz, Efekan Kökcü, Ahmet Saraçoğlu, Mehmet Hafızoğlu, Sibel Fidan, Necah Büyükdura, Deniz Özener, Kübra Yıldız ♥

Ödül Kazananlar

Ersin Norlu, Gökhan Gökgöz, Efekan Kökcü, Ahmet Saraçoğlu, Mehmet Hafızoğlu, Sibel Fidan, Necah Büyükdura.

2011-IV Sayısındaki Tamkare Sorusu ve Yanıtı:

Sadece 0 ve 1'lerden Oluşan Bir Sayı Ne Zaman Bir Tamkare Olabilir?

Deniz Özener* / *deniz_ozener555@hotmail.com*

Birkaç sayı önce derginizin Beyincik köşesinde şu soru sorulmuştu:

Soru: *İçinde en az iki tane* 1 *olan ve sadece* 0 *ve* 1'*lerden oluşan bir tamkare olabilir mi?*

Yanıt: Olamaz.

Kanıt: Böyle bir sayı olduğunu varsayalım. Sayıya P diyelim.

Eğer P sayısı ...10 şeklinde bir sayı olursa, yani 10 ile biten bir sayı ise, P bir tamkare olamaz. Çünkü bu durumda $100x + 10 = y^2$ denkleminin bir çözümü vardır; ama soldaki sayı 2 ve 5 asallarına bölündüğünde y de bu asallara, dolayısıyla 10'a bölünür. Buradan da y^2'nin 100'e bölündüğü çıkar ki bu da bir çelişkidir.

Eğer P sayısı 00 ile bitiyorsa o zaman $100 = 10^2$ ile bölünür ve sonundaki iki 0'ı atarak aynı varsayımı sağlayan daha küçük bir sayı buluruz. Böylece P'nin 1 ile bittiğini varsayabiliriz.

İçinde en az iki tane 1 olmak zorunda olduğundan, bunlardan, P'nin

1 ... 1

gibi bir sayı oldugunu varsayabiliriz.

Modülo 3 sadece 0 ve 1 bir tamkare olduğundan, P'nin içindeki 1 rakamı sayısı 3'ün katı olmak zorundadır, dolayısıyla P'de en az üç tane 1 olmak zorundadır. Bundan sonra,

$$P = 1 \ldots 100 \ldots 001$$

biçimini varsayalım. (En sonda görünen iki 1 rakamı arasında sadece 0 var.) Demek ki $k \geq 1$ için

$$P = 10^m + \cdots + 10^k + 1$$

olur. Eğer $k = 1$ ise o zaman $P = 1 \ldots 11$ gibi bir sayıdır çünkü 11'le biten bir sayı 3 mod 4 olmak zorundadır, oysa bir kare 4 modunda ya 0'a ya da 1'e eşittir. Aynı şekilde eğer $k = 2$ olursa, P'nin sonu 101 ile bitiyor demektir. Bu durumda da $P = 7$ (mod 8) olur ama bir tamkare 8 modunda sadece 0, 1 ve 4 değerlerini alabilir. Dolayısıyla $k > 2$.

$P = A^2$ olsun. P tek sayı olduğu için A sayısı da tek sayı olmak zorundadır, $A = 2n + 1$ olsun. Bu durumda,

$$P = 10^m + \cdots + 10^k + 1 = A^2$$

yani

$$\begin{aligned} 10^k(10^{m-k} + \cdots + 1) &= (A-1)(A+1) \\ &= (2n+1-1)(2n+1+1) \\ &= 4n(n+1) \end{aligned}$$

ve ($k > 2$ olduğundan) sadeleşmeden sonra

$$2^{k-2}5^k(10^{m-k} + \cdots + 1) = n(n+1)$$

bulunur.

n ve $n + 1$ ardışık iki doğal sayı olduklarından, aralarında asaldırlar. Ayrıca

$$2^{k-2},\ 5^k \text{ ve } 10^{m-k} + \cdots + 1$$

sayları da ikişer ikişer aralarında asal olduklarından incelenmesi gereken altı farklı durum vardır:

1. $n = 5^k 2^{k-2}$, $n + 1 = 10^{m-k} + \cdots + 1$,
2. $n = 10^{m-k} + \cdots + 1$, $n + 1 = 5^k 2^{k-2}$,
3. $n = 5^k$, $n + 1 = 2^{k-2}(10^{m-k} + \cdots + 1)$,
4. $n = 2^{k-2}(10^{m-k} + \cdots + 1)$, $n + 1 = 5^k$,
5. $n = 2^{k-2}$, $n + 1 = 5^k(10^{m-k} + \cdots + 1)$
6. $n = 5^k(10^{m-k} + \cdots + 1)$, $n + 1 = 2^{k-2}$.

5'inci ve 6'ncı durumlarda sırasıyla

$$n + 1 = 5^k(10^{m-k} + \cdots + 1) > 2^{k-2} + 1 = n + 1$$

ve

$$n + 1 = 2^{k-2} < 5^k(10^{m-k} + \cdots + 1) = n$$

olacağından bu iki durumun gerçekleşmesi mümkün değildir. İlk dört duruma bakalım.

1'inci Durum: $n = 5^k 2^{k-2} = 10^k/4$ olsun. Bu durumda

$$10^{m-k} + \cdots + 1 = n + 1 = 10^k/4 + 1$$

ve

$$10^k = 4(10^{m-k} + \cdots)$$

olur. Bu eşitlik mümkün değildir, çünkü eşitliğin sağ tarafının en büyük basamağındaki rakam 4 iken sol taraftaki sayının en büyük basamağındaki rakam 1'dir.

2'nci Durum: Bu durumda

$$10^{m-k} + \cdots + 2 = n + 1 = 5^k 2^{k-2} = 10^k/4$$

ve

$$4(10^{m-k} + \cdots + 2) = 10^k$$

olur. Bir önceki durumda olduğu gibi bu durum da mümkün değildir.

3'üncü Durum: Bu durumda

$$5^k + 1 = n + 1 = 2^{k-2}(10^{m-k} + \cdots + 1)$$

olur. Bu eşitliğe modülo 5'te baktığımızda,

$$2^{k-2} \equiv 1 \text{ mod } 5,$$

ve dolayısıyla $k - 2 \equiv 0$ mod 4 olmalıdır. Demek ki bir $\ell > 0$ doğal sayısı için $k = 4\ell + 2$ ve

$$5^{4\ell+2} + 1 = 2^{4\ell}(10^{m-k} + \cdots + 1)$$

Bu eşitliğe de modülo 4 baktığımızda eşitliğin sağ tarafının 0'a denk olduğunu görüyoruz ama sol taraf her zaman 2'ye denktir. Sonuç olarak bu durumum da gerçekleşmesi mümkün değildir.

4'üncü Durum: Bu durumda

$$2^{k-2}(10^{m-k} + \cdots + 1) + 1 = n + 1 = 5^k$$

olur. Şimdi bir önceki durumda yaptığımız gibi bu eşitliğe modülo 5 bakarsak; eşitliğin sağ tarafı her zaman 0'a denk olacaktır. Demek ki

$$2^{k-2} = 4 \text{ (mod 5)}$$

olmalıdır. Bu durum ise sadece bir ℓ doğal sayısı için

$$k - 2 = 4\ell + 2$$

olursa mümkündür. Bu elde ettiğimiz yeni veri ile eşitlik şu hale gelir:

$$2^{4(\ell-1)}(10^{m-k} + \cdots + 1) + 1 = 5^{4\ell+2}$$

Bu eşitliğe de modülo 10 bakalım. Eşitliğin sağ tarafı her zaman 5'e denk olacaktır. Eşitliğin sağlanabilmesi için de $2^{4(\ell-1)}$ sayısının 10 modunda 4'e eşit olması gerekir fakat

$$(2^4)^{\ell-1} = 16^{\ell-1}$$

sayısının son rakamı her zaman 6 olacağından dolayı eşitliğin sol tarafı 10 modunda 7'ye denk olacaktır, yani dördüncü durumun da gerçekleşmesi mümkün değildir.

Sonuç olarak, içinde en az iki tane 1 olan ve sadece 0'lar ve 1'lerden oluşan bir tamkare olamaz. ♥