Popüler Matematik

Kesirli Sayıları 1/n'lerin Toplamı Olarak Yazmak

Yıldız Kayar

Eski Mısırlılar, doğal sayılar dışında, bir de 1/2, 1/3, 1/4 gibi 1/n biçiminde yazılan kesirli sayıları bilirlerdi ve (galiba 2/3 dışında) başka da kesirli sayı bilmezlerdi. Örneğin 5/6 sayısını 5/6 olarak yazamazlardı, 5/6 yerine bu sayıya eşit olan

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

toplamını yazarlardı.

Buradan şu soru akla geliyor: Acaba (0, 1) açık aralığındaki her kesirli sayı 1/n biçiminde yazılan kesirli sayıların toplamı olarak yazılabilir mi?

Elbette! Örneğin 11/12'yi 11 tane 1/12'nin toplamı olarak yazabiliriz. Ama bunu yapmanın daha ekonomik yolları da olabilir. Mesela

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}.$$

Sadece altı tane sayı topladık. Daha kısası var mı? Evet:

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.$$

Toplam sayısını 4'e indirdik. Ya daha kısası? O da var!

$$\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}.$$

Aynı şeyi 2/3 için deneyelim. Herhalde

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

toplamından daha kısasını bulamayız. Daha kısasını bulmak yerine, 2/3'ü birbirinden **farklı** iki tane 1/n türünden sayının toplamı olarak yazmaya çalışalım. Bu da mümkün:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}.$$

Gene iki tane 1/n biçiminde sayı topluyoruz, ama hiç olmazsa birbirinden farklı iki tane 1/n biçiminde sayı topluyoruz.

Aynı şeyi 2/5 için deneyelim. 2/5'i iki tane 1/5'in toplamı olarak yazabiliriz. Peki birbirinden farklı 1/n sayılarının toplamı olarak yazabilir miyiz? Evet:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}.$$

Ya 2/7 için aynı şeyi yapabilir miyiz?

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}.$$

Gene oldu.

Yukardaki eşitlikler,

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

eşitliğinin özel bir halidir.

Bu yazıda (0, 1) aralığındaki her kesirli sayının, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ için, birbirinden farklı 1/n sayılarının toplamı olarak yazılacağını kanıtlayacağız ve bunu yapmanın bir yöntemini göstereceğiz. Açıklayacağımız yöntem Fibonacci'ye aittir.

a/b verilmiş olsun. a/b'den küçükeşit olan 1/n sayıları arasından en büyüğünü bulalım; diyelim $1/n_0$. Sonra aynı şeyi

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}-\frac{1}{n_0}\in(0,1)$$

sayısı için yapalım, yani bu sefer a/b yerine aynı prosedürü a_1/b_1'e uygulayalım; diyelim bu sefer $1/n_1$ sayısını bulduk. Ve bu prosedürü yukardaki fark 0 olana kadar, daha doğrusu bulunan yeni a/b'nin a'sı 1 olana kadar tekrar edelim. Gerçekten de bir zaman sonra pay 1 olacaktır, bunu birazdan kanıtlayacağız, şimdilik kabul edelim. Bu yöntemle bulduğumuz bu 1/n sayılarını toplarsak a/b buluruz: Nitekim,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}-\frac{1}{n_0} &= \frac{a_1}{b_1}\\
\frac{a_1}{b_1}-\frac{1}{n_1} &= \frac{a_2}{b_2}\\
&\cdots\\
\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}-\frac{1}{n_{k-1}} &= \frac{1}{b_k}
\end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak, sadeleştirmelerden sonra,

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \cdots - \frac{1}{n_{k-1}} = \frac{1}{b_k}$$

ve

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_{k-1}} + \frac{1}{b_k}$$

elde ederiz.

Birazdan

$$a > a_1 > a_2 > \ldots > a_{k-1} > a_k$$

eşitsizliklerini göstereceğiz. a_i'ler doğal sayı olduklarından, bir zaman sonra 1 bulunmalı ve prosedür sona ermeli.

Bir örnekle yöntemimizi gösterelim. Diyelim $a/b = 5/13$.

$$\frac{1}{3} \le \frac{5}{13} < \frac{1}{2}$$

olduğundan, ilk kesirli ifademiz 1/3. Şimdi aynı yöntemi

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{3} = \frac{5}{13} - \frac{1}{3} = \frac{2}{39}$$

sayısına uygulayalım. (Yani yeni a/b sayımız, 2/39 olsun.)

$$\frac{1}{20} \le \frac{2}{39} < \frac{1}{19}$$

olduğundan, ikinci kesirli ifademiz 1/20. Şimdi aynı yöntemi

$$\frac{2}{39} - \frac{1}{20} = \frac{1}{780}$$

sayısına uygulayalım. Ama bu son sayı zaten $1/n$ biçiminde. Demek ki,

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}.$$

Yukarda bulduğumuz

$$\frac{5}{13}, \frac{2}{39}, \frac{1}{780}$$

sayılarının paylarına bakalım:

5, 2, 1.

Paylar azalıyor. (Bir sonraki pay 0 olacak, ama onu yazmamıza gerek yok.)

Bir başka örnek ele alalım. Diyelim

$$\frac{a}{b} = \frac{213}{451}.$$

Yukarda açıklanan yöntemi uygulayalım:

$$\frac{213}{451} - \frac{1}{3} = \frac{188}{1.353}$$

$$\frac{188}{1.353} - \frac{1}{8} = \frac{151}{10.824}$$

$$\frac{151}{10.824} - \frac{1}{72} = \frac{1}{16.236}$$

Paylar bu sefer

213, 188, 151, 1

diye azaldı. İstediğimiz toplam da

$$\frac{213}{451} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{72} + \frac{1}{16.236}$$

biçiminde.

Payların hep azaldığını kanıtlayalım. Verilmiş sayımız $a/b \in (0, 1)$ olsun.

$$\frac{1}{n} \le \frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ bulalım. Böyle bir n vardır ve biriciktir.

$$\frac{na-b}{nb} = \frac{a}{b} - \frac{1}{n}$$

olur.

$$na - b < a$$

eşitsizliği

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{n-1}$$

eşitsizliğinin doğrudan bir sonucu. Demek ki yeni sayımız olan

$$\frac{na-b}{nb}$$

sayısının payı eski sayımız olan

$$\frac{a}{b}$$

sayısının payından daha küçük. (Olası sadeleştirmelerden sonra pay daha da küçük olur.)

Paylar hep azaldığına göre bir zaman sonra 1 (ve bir sonraki adımda 0) bulunacaktır. ♥

Kaynakça

John Stillwell, **Elements of Number Theory**, Springer, Undergraduate Texts in Mathematics 2002.