Popüler Matematik

At Yarışı Maceralarım Yanıtlar

Hüsnü Niyet

1. *Geçen Pazar güneşli pırıl pırıl bir gündü. Gökyüzünün mavisine dayanamayıp ailece at yarışlarına gittik. O muhteşem atlar yuvarlak pistte kan ter içinde, ağızları köpürmüş vaziyette döne döne koşuyorlardı. Oğlum,*

- İşte baba, işte... Aygır geliyor Aygır! diye heyecanla haykırdı.

Aygır bizim favori atımızdı.

- Gördüm oğlum, dedim ve sonra bakalım saymasını öğrenmiş mi diye sordum:

- Kaç at yarışıyor acaba?

- Aygır'ın önündeki atların üçte biriyle arkasındaki atların dörtte üçünü toplarsan cevabı bulursun! dedi.

Söylediğini yaptım ve gerçekten de yarışan at sayısı çıktı. Vay yumurcak vay! Kaç at yarışıyormuş?

Yanıt: Pistin yuvarlak olduğunu unutmayın! Öndeki at sayısı arkadaki at sayısına eşittir, bu sayı da toplam at sayısından bir eksiktir. At sayısına x dersek, çözmemiz gereken denklemi buluruz:

$$\frac{x-1}{3}+\frac{3(x-1)}{4}=x.$$

Paydaları eşitlersek,

$$13x - 13 = 12x$$

ve $x = 13$ buluruz. Sağlamasını yapmak zor değil!

2. *İkinci yarışta bu sefer kızım haykırdı:*

- Baba bak, Bahadır'la Ceylan başabaşlar.

- Gördüm, dedim.

- Şansa bak dedi önlerindeki atların üçte biriyle arkalarındaki atların dörtte üçünü toplarsan gene yarışan at sayısı çıkıyor dedi.

Kaç at yarışıyormuş?

Yanıt: Bu sefer

$$\frac{x-2}{3}+\frac{3(x-2)}{4}=x$$

denklemini çözmeliyiz. Gene paydaları eşitlersek

$$13x - 26 = 12x$$

ve $x = 26$ buluruz.

3. *İlk iki iddiayı kaybetmiştik. Üçüncü yarışın başlamasına az kalmıştı. Aykızı, Brijit ve Canavar yarışacaklardı. İddia, Aykızı'na* 1'*e* 4, *Brijit'e* 1'*e* 3 *ve Canavar'a* 1'*e* 2 (*veriyordu değil*) *kazandırıyordu. Ben kime para yatırayım diye düşünürken eşim,*

- Yarışın sonucu ne olursa olsun 13 *lira kazanacak bir iddia stratejisi buldum... dedi.*

Gerçekten de öyleydi. Benim dahi eşimin stratejisi neydi?

Yanıt: Atlara yatırılacak para miktarlarına sırasıyla a, b ve c diyelim.

Eğer Aykızı kazanırsa $4a$ kazanacağız ama $b + c$ kaybedeceğiz. Demek ki

$$4a - b - c = 13$$

olmalı. Eğer Brijit kazanırsa kazancımızın

$$3b - a - c = 13$$

olmasını istiyoruz. Eğer Canavar kazanırsa kazancımız

$$2c - a - b = 13$$

olmalı. Bu üç denklemi sağlayan a, b ve c miktarlarını bulmalıyız. Bu denklemleri yazalım:

$$4a - b - c = 13$$
$$-a + 3b - c = 13$$
$$-a - b + 2c = 13.$$

Hepsini toplarsak $2a + b = 13\times3$ buluruz. İkinci denklemi birinciden çıkarırsak $5a = 4b$ buluruz. Bu son iki denklem sayesinde a ve b'yi bulabiliriz:

$$4\times3\times13 = 4(2a + b) = 8a + 4b = 8a + 5a = 13a.$$

Demek ki $a = 12$. Buradan ve $5a = 4b$ eşitliğinden $b = 15$ çıkar. Şimdi c'yi bulmak için bulduğumuz a ve b değerlerini ilk üç denklemden herhangi birine yerleştirelim: $c = 20$ bulunur.

4. *At yarışlarından çıkıp plaja gittik. Plajda şu oyunu oynadık:* 15 *çakıl taşı konuyor ortaya. İki kişi ortadaki taş kümesinden sırayla ve kendi seçimine göre* 1, 2 *ya da* 3 *taş alıyor. Ortada taş kalmayana kadar oyun sürüyor. Oyunun sonunda tek sayıda taşı olan oyunu kazanıyor. Bu oyunu kim nasıl oynarsa kazanır? Taş sayısı değişirse, örneğin* 13 *olursa ne olur?*

Yanıt: Oyunu 15 taşla oynayacağımıza herhangi bir sayıda tek taşla oynamaya çalışalım. Diyelim ortada $2n + 1$ tane taş var ve tek sayıda taş alan kazanıyor. Birinci oyuncunun üç seçeneği var: 1, 2 ya da 3 taş alacak.

Eğer birinci oyuncu ilk hamlesinde 1 ya da 3 taş alırsa, o zaman ortada **çift** sayıda taş kalır ve birinci oyuncunun oyunu kazanabilmesi için birinci oyuncunun ikinci oyuncunun **tek** sayıda taş alabilmesini engelleyebilmesi gerekir. Demek ki sadece tek sayıda taşla oynanan oyunlarla değil, çift sayıda taşla oynanan oyunlarla da ilgilenmemiz lazım.

Yukardaki paragraftaki tartışma, "her oyunun her hamleden sonra bir başka oyuna dönüştüğü" ilkesidir ve bu ilkeyi bu yazıda önemli bir biçimde kullanacağız.

Şöyle bir anlaşma yapalım: n tane taşla oynanan oyunda, eğer birinci oyuncu (diğer oyuncu nasıl oynarsa oynasın) tek sayıda taş almayı beceriyorsa,

$$f(n, 1) = 1$$

olsun; aksi halde

$$f(n, 1) = 0$$

olsun. Benzer şekilde, eğer n taşlı oyunda birinci oyuncu (diğer oyuncu nasıl oynarsa oynasın) çift sayıda taş almayı beceriyorsa,

$$f(n, 0) = 1$$

olsun; aksi halde

$$f(n, 0) = 0$$

olsun. Burada n tek ya da çift olabilir ve ikinci oyuncunun ne yaptığıyla ilgilenmiyoruz. Sadece birinci oyuncunun her türlü savunmaya karşı tek ya da çift taş alıp alamayacağıyla ilgileniyoruz. Küçük n değerleri için bu f değerlerini bulalım:

	1	0
1	1	0
2	1	1
3	1	1
4	1	0

Yukardaki tabloyu açıklayalım. En soldaki sütun ortadaki taş sayısını gösteriyor. Örneğin eğer 4 taş varsa ve marifet tek sayıda taş almaksa, birinci oyuncu ilk hamlesinde 3 taş alarak oyunu kazanır; bu yüzden $f(4, 1) = 1$ ve bunu yukardaki tabloda gösterdik. Ama eğer marifet çift sayıda taş almaksa (ve gene ortada 4 taş varsa), o zaman birinci oyuncu çift sayıda taş alamayabilir: 1 ya da 3 taş alsa, diğer oyuncu kalan taşları ya da taşı alabilir; 2 taş alsa, diğer oyuncu 1 taş alır ve son taş birinci oyuncuya kalır ve birinci oyuncu yine çift sayıda taş alamaz. Demek ki $f(4, 0) = 0$; bu değer de tablonun en sağ alt köşesinde gösterilmiştir.

Bu tabloyu 15'e kadar devam ettireceğiz.

Aslında karşımızda dört değişik oyun var: Tek ya da çift sayıda taşla oynanan oyunlar ve tek ya da çift taş toplanmaya çalışılan oyunlar. Bunları teker teker inceleyelim.

Ortada $2n + 1$ tane taş olsun ve tek sayıda taş toplamaya çalışalım. Bu oyuna $(2n+1, 1)$ oyunu diyelim. Üç farklı hamlemiz var: 1, 2 ya da 3 taş almak. İlk hamlemizi yaptıktan sonra diğer oyuncu tek sayıda taş alamamalı. Demek ki eğer

$$(2n, 1), (2n\text{-}1, 1), (2n\text{-}2, 1)$$

oyunlarının birinin f-değeri 0 ise, yani bu oyunlarda başlayan oyuncunun tek sayıda taş alması engellenebiliyorsa, o zaman birinci oyuncu oyunu f-değeri 0 olan oyuna dönüştürerek kazanır. Dolayısıyla

$$f(2n, 1), f(2n-1, 1), f(2n-2, 1)$$

sayılarından biri 0 ise o zaman

$$f(2n+1, 1) = 1$$

olur; aksi halde

$$f(2n+1, 1) = 0$$

olur. Örneğin, bir önceki tablodan dolayı

$$f(5, 1) = 0$$

olur. Ve bu yüzden de

$$f(7, 1) = 1$$

olur. Bu aşamada $f(9, 1)$'i bilemeyiz. Birazdan bileceğiz ama.

Şimdi $f(2n+1, 0)$ değerini bulmaya çalışalım. Diyelim ortada $2n + 1$ tane taş var ve amacımız çift sayıda taş alabilmek. Demek ki diğer kişinin çift sayıda taş almasını engellemeliyiz. Demek ki, eğer

$$f(2n, 0), f(2n-1, 0), f(2n-2, 0)$$

sayılarından biri 0 ise o zaman

$$f(2n+1, 0) = 1$$

olur; aksi halde

$$f(2n+1, 0) = 0$$

olur. Örneğin, bir önceki tablodan dolayı

$$f(5, 0) = f(7, 0) = 1.$$

Şimdi de $f(2n+2, 1)$ değerini bulalım. Ortada çift sayıda taş var ve tek sayıda taş almak istiyoruz. Demek ki diğer oyuncu da tek sayıda taş almalı, yani çift sayıda taş alamamalı. Demek ki

$$f(2n+1, 0), f(2n, 0), f(2n-1, 0),$$

değerlerinden biri 0 ise, o zaman

$$f(2n+2, 1) = 1$$

olur; aksi halde

$$f(2n+1, 1) = 0$$

olur.

Son olarak $f(2n + 2, 0)$ değerini bulmaya çalışalım. Ortada çift sayıda taş var ve çift sayıda taş almak istiyoruz. Demek diğer oyuncuyu çift sayıda taş almaya mecbur etmeliyiz, yani diğer oyuncu tek sayıda taş alamamalı. Dolayısıyla, eğer

$$f(2n+1, 1), f(2n, 1), f(2n-1, 1),$$

değerlerinden biri 0 ise, o zaman

$$f(2n+2, 1) = 1$$

olur; aksi halde

$$f(2n+1, 1) = 0$$

olur.

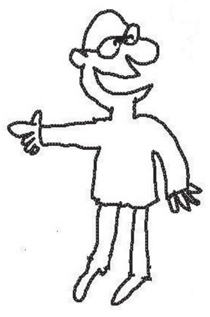
Bu bulduklarımızı özet olarak aşağıdaki tabloda gösterelim:

$f(2n+1,1) = 1 \Leftrightarrow f(2n,1)f(2n-1,1)f(2n-2,1) = 0$
$f(2n+1,0) = 1 \Leftrightarrow f(2n,0)f(2n-1,0)f(2n-2,0) = 0$
$f(2n+2,1) = 1 \Leftrightarrow f(2n+1,0)f(2n,0)f(2n-1,0) = 0$
$f(2n+2,0) = 1 \Leftrightarrow f(2n,1)f(2n-1,1)f(2n-2,1) = 0$

Bu listeden hareketle başladığımız tablonun devamını getirebiliriz. Aşağıda solda tabloyu göreceksiniz.

	1	0
1	1	0
2	1	1
3	1	1
4	1	0
5	0	1
6	1	1
7	1	1
8	0	1
9	1	0
10	1	1
11	1	1
12	1	0
13	0	1
14	1	1
15	1	1
16	0	1

Demek ki 15 taşlık oyunu birinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır, 13 taşlık oyunu ise ikinci oyuncu (iyi oynarsa) kazanır.



Yandaki listeye bakıldığında, ilk sekiz satırın sonraki sekiz satırda yinelendiğini görüyoruz. Yukardaki dört formül de her satırın önceki üç satıra göre değiştiğini gösterdiğinden, bu liste her sekiz satırda bir yinelenerek devam eder. Dolayısıyla ortadaki taş sayısının tek olduğu $8n + 5$ taşlı oyunları ikinci oyuncu $8n + 1$, $8n + 3$, $8n + 7$ taşlı oyunları birinci oyuncu kazanır. ♥

Kaynakça

H. E. Dudeney, **Amusements in Mathematics**, Dover 1970.