Kapak Konusu: İntegral IV

Hiperbolik Fonksiyonlar

cosh ve sinh olarak yazılan kosinüs ve sinüs hiperbolik fonksiyonlarından geçmişte kısaca sözetmiştik[1]. Bu yazıda bu fonksiyonlardan biraz daha derince sözedeceğiz.

Tanımlardan başlayalım:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

ve

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}.$$

Tanımlardan da anlaşıldığı üzere bu fonksiyonlar temel değil, yardımcı fonksiyonlar, çünkü ne de olsa bilinen e^x fonksiyonu cinsinden yazılıyorlar. Nitekim bu fonksiyonları kullanarak birçok fonksiyonun integralini kolaylıkla alabiliriz.

Şunu da söyleyelim ki matematikçiler genellikle cosh ve sinh fonksiyonlarını pek bilmezler ve bu fonksiyonlara çok gereksinim duymazlar. Ama herkes hayatında bir defa bu fonksiyonları görmüş olmalıdır. Uygulamada, özellikle integral almada yararlı olabilirler.

Önce fonksiyonları biraz yakından tanıyalım, örneğin grafiklerini çizelim. Daha sonra integrale uygulamalarını görürüz.

1. sinh ve cosh Hiperbolik Fonksiyonları

Fonksiyonların tüm $\mathbb{R}$'de tanımlı oldukları belli. Ayrıca tanımdan hemen

$$\sinh(-x) = -\sinh x \text{ ve } \cosh(-x) = \cosh x$$

çıkar. Yani sinh tek bir fonksiyondur, yani (0, 0) noktası grafiğinin simetri noktasıdır; aynı şekilde cosh çift bir fonksiyondur, yani y ekseni grafiğinin simetri eksenidir.

$$\sinh 0 = 0 \text{ ve } \cosh 0 = 1$$

eşitlikleri de kolay. cosh fonksiyonunun pozitif olduğu da tanımdan hemen anlaşılıyor.

x çok büyükken, e^{-x} çok küçük olur ve

$$\sinh x \simeq \frac{e^x}{2} \simeq \cosh x$$

olur. Demek ki sinh ve cosh fonksiyonları asemptotiktirler ve eksponansiyel olarak büyürler. Benzer şekilde x, $-\infty$'a giderken,

$$\cosh x \simeq \frac{e^{-x}}{2} \text{ ve } \sinh x \simeq -\frac{e^{-x}}{2}$$

olur.

Fonksiyonların grafiğini çizmek için türevlerini hesaplayalım. Kolay bir hesapla,

$$\sinh' x = \cosh x$$

ve

$$\cosh' x = \sinh x$$

bulunur. Buradan sinh x fonksiyonunun sürekli arttığı, dolayısıyla $x \geq 0$ ise

$$\sinh x \geq \sinh 0 = 0$$

olduğu ve dolayısıyla cosh x fonksiyonunun $x \geq 0$ için arttığı çıkar. sinh x'in $x \geq 0$ iken pozitif olduğu aslında tanımın kendisinden de oldukça çabuk çıkar.

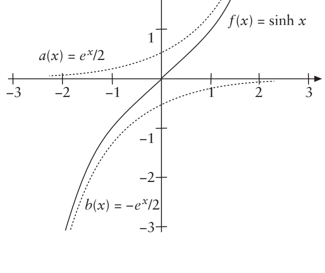
İkinci türevleri alalım:

$$\sinh'' x = \sinh x \text{ ve } \cosh'' x = \cosh x$$

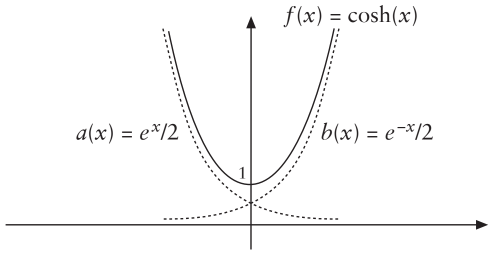
(Demek ki $a \sinh x + b \cosh x$ fonksiyonları

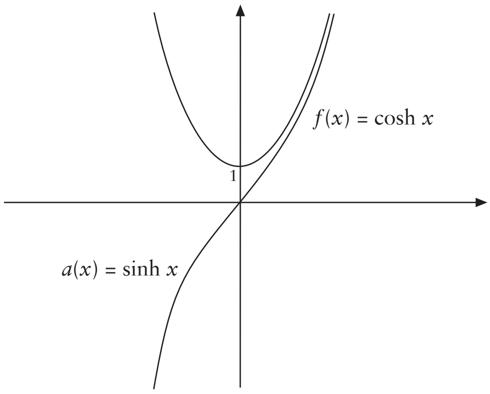
$$f'' = f$$

diferansiyel denkleminin çözümleridir.) Buradan cosh fonksiyonunun her yerde, sinh fonksiyonunun ise $\mathbb{R}^{\geq 0}$ üstünde dışbükey olduğu çıkar. Bu bilgilerden hareketle sinh ve cosh fonksiyonlarının grafiklerini çizebiliriz:



1 Bazen sinh yerine sh ve cosh yerine ch yazılır. sinh fonksiyonunun sinş diye, cosh fonksiyonunun ise koş diye okunduğu olur.





Yukarda bulduklarımızdan,

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

ve

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

çıkar.

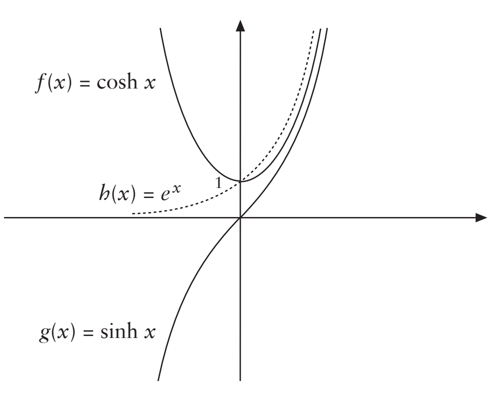
sin ve cos fonksiyonları

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

eşitliğini sağlar. Bu fonksiyonların hiperbolik versiyonları,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik tanımlardan hemen çıkar. Demek ki (cos θ, sin θ) noktası birim çemberin üstünde olduğu gibi, (cosh θ, sinh θ) noktası da $x^2 - y^2 = 1$ "birim hiperbolü"nün üstündedir, daha doğrusu sağ kolunun üstündedir. Bu yüzden trigonometrik fonksiyonlara bazen ***çembersel fonksiyonlar*** dendiği de olur.



Nasıl trigonometrik fonksiyonlar için

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

gibi toplama formülleri varsa, hiperbolik fonksiyonlar için de benzer eşitlikler vardır:

$$\cosh(x + y) = \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y$$

$$\sinh(x + y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

Hatta bu eşitliklerin kanıtı çok daha kolaydır, tanımlardan hemen çıkar. Bunlardan,

$$\cosh(2x) = \sinh^2 x + \cosh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

eşitlikleri çıkar. Ayrıca

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

eşitliği doğrudur; bu da tanımlardan çıkar.

Yukarda verdiğimiz cosh $2x$'in formülünden

$$\cosh x = 2\cosh^2 \frac{x}{2} - 1$$

formülü ve bundan da,

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

çıkar. Benzer şekilde, $x \geq 0$ için

$$\sinh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$$

elde edilir.

Tanımlardan ya da yukarda verilen türev formüllerinden hiperbolik fonksiyonların Taylor serilerini kolaylıkla hesaplayabiliriz. Tanımdan, hiperbolik fonksiyonların Taylor serilerine eşit oldukları hemen çıkar:

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ve

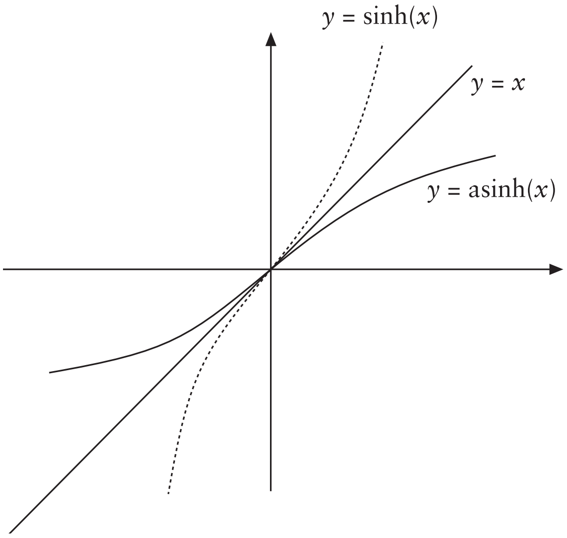
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

cosh ve sinh Fonksiyonlarının Tersleri

sinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir eşleşme olduğundan, bu fonksiyonun tersi vardır. Bu fonksiyonun tersi asinh olarak yazılır[2].

asinh fonksiyonun grafiği elbette sinh x fonksiyonunun $y = x$ çaprazına göre simetriğidir. asinh fonksiyonun grafiğini aşağıda bulabilirsiniz.

2 sinh fonksiyonunun tersi bazen $\sinh^{-1}$, arsinh ya da argsinh olarak da yazılır. Benzer yazılım diğer hiperbolik fonksiyonların birazdan tanımlayacağımız tersleri için de geçerlidir.



asinh fonksiyonunun türevini bulalım. Eğer f bir eşlemeyse,

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

olduğundan, eşitliğin her iki tarafının türevini alarak ve sol tarafın türevini almak için zincir kuralını uygulayarak,

$$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x) = 1$$

buluruz. Bulduğumuz bu eşitliği $f = \sinh$ fonksiyonuna uygulayacak olursak,

$$\cosh(\operatorname{asinh} x)\cdot \operatorname{asinh}' x = 1 \qquad (1)$$

elde ederiz. Arzulanan $\operatorname{asinh}' x$ değerini bulmak için, $\cosh(\operatorname{asinh} x)$ değerini cebirsel bir biçimde ifade edelim:

$$\cosh^2(\operatorname{asinh} x) - \sinh^2(\operatorname{asinh} x) = 1$$

eşitliğinden ve cosh fonksiyonunun pozitif olmasından,

$$\cosh(\operatorname{asinh} x) = \sqrt{1+x^2} \qquad (2)$$

çıkar. Demek ki (1) ve (2)'den

$$\operatorname{asinh}' x = \frac{1}{\cosh(\operatorname{asinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (3)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{asinh} x + C \qquad (4)$$

bulunur.

Bu son formül aklımıza yeni fikirler getirebilir, çünkü

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

integralini öneski sayılarımızda çözmüştük. Böylece muhtemelen asinh x'i veren ilginç bir eşitlik elde ederiz. Geçmiş sayılarımızda çözdüğümüz bu integrali bir kez daha çözelim: $x = \tan\alpha$ ve $u = \sin\alpha$ tanımlarıyla,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{d\alpha}{\cos\alpha}\\
&= \int \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\cos^2\alpha}\\
&= \int \frac{d\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}\\
&= \int \frac{du}{1-u^2}\\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\arctan x}{1-\sin\arctan x} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)} + C\\
&= \frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x^2}+x)^2 + C\\
&= \ln(\sqrt{1+x^2}+x) + C.
\end{aligned}$$

Demek ki bir C sabiti için,

$$\operatorname{asinh} x = \ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right) + C.$$

Eğer $x = 0$ değerini verirsek, $C = 0$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\operatorname{asinh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \qquad (5)$$

elde edilir. Belki beklenmedik bir eşitlik... Öte yandan sinh'in exp'li tanımı göze alındığında, belki de böyle bir eşitlik beklemek gerekirdi.

cosh fonksiyonu $\mathbb{R}$'nin bir eşleşmesi değildir çünkü her x için $\cosh x = \cosh(-x)$ olur, ama cosh fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığından $[1, \infty)$ aralığına giden bir eşleme verir. Bu fonksiyonun tersi acosh olarak yazılır:

$$a\cosh x : [1, \infty) \to [0, \infty).$$

Yukardakine benzer hesaplar, $x \geq 1$ için,

$$\sinh(a\cosh x) = \sqrt{x^2 - 1}, \tag{6}$$

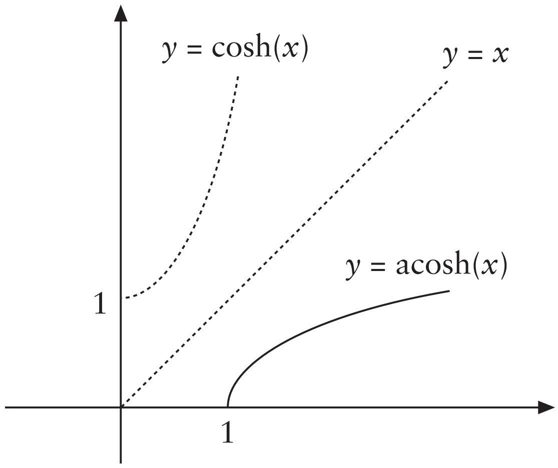
$$a\cosh x = \frac{1}{\sinh(a\cosh x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \tag{7}$$

ve

$$a\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \tag{8}$$

eşitliklerini verir. Bunların kanıtlarını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

acosh fonksiyonunun grafiği şöyle:



Diğer Hiperbolik Fonksiyonlar

Aynen trigonometrik fonksiyonlarda olduğu gibi, sinh ve cosh fonksiyonlarından hareketle başka hiperbolik fonksiyonlar tanımlanır. İşte bu fonksiyonların bir listesi:

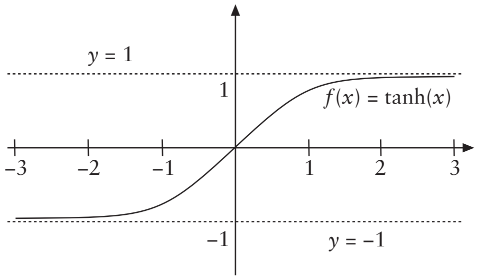
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},$$

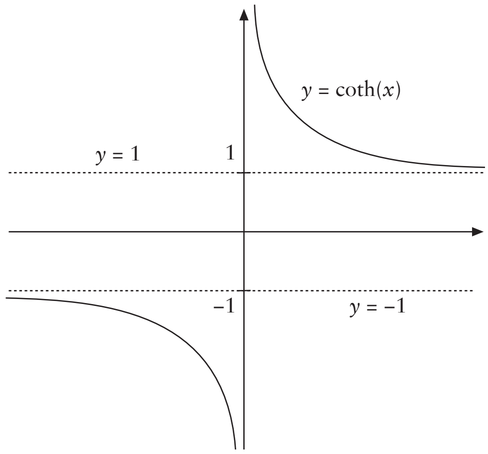
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1},$$

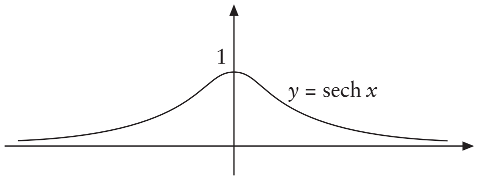
$$\mathrm{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1},$$

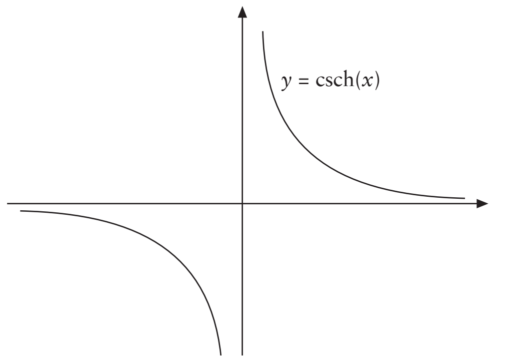
$$\mathrm{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$$

Bu fonksiyonlara sırasıyla ***hiperbolik tanjant***, ***hiperbolik kotanjant***, ***hiperbolik sekant***, ***hiperbolik kosekant*** adı verilir. Bu tanımlardan, tanh, coth ve csch fonksiyonlarının tek, sech fonksiyonunun ise çift olduğu çıkar. Grafiklerinin çizimleri şöyle:









Tahmin edileceği üzere tanh ve coth fonksiyonlarının toplam formülü vardır:

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

ve

$$\coth(x \pm y) = \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x \tanh y}.$$

Bir önceki altbölümde yapılanlardan tanh $x/2$ için kimi zaman gerekebilecek hoş bir formül bulunur:

$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{1+\cosh x}, \qquad (9)$$

nitekim,

$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}} = \frac{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}{2\cosh^2\frac{x}{2}} = \frac{\sinh x}{1+\cosh x}.$$

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki formülleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned}
\sinh 3x &= 3\sinh x + 4\sinh^3 x\\
\cosh 3x &= 4\cosh^3 x - 3\cosh x\\
\tanh 3x &= \frac{3\tanh x + \tanh^3 x}{1+3\tanh^2 x}\\
\sinh 4x &= 8\sinh^3 x\cosh x + 4\sinh x\cosh x\\
\cosh 4x &= 8\cosh^4 x - 8\cosh^2 x + 1\\
\tanh 4x &= \frac{4\tanh x + 4\tanh^3 x}{1+6\tanh^2 x + \tanh^4 x}
\end{aligned}$$

2. Aşağıdaki formülleri kanıtlayın:

$$\begin{aligned}
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}\\
\sinh x\sinh y &= \frac{\cosh(x+y)-\cosh(x-y)}{2}\\
\sinh x\cosh y &= \frac{\sinh(x+y)+\sinh(x-y)}{2}
\end{aligned}$$

Bu hiperbolik fonksiyonların türevlenebilir oldukları bariz, kolayca gösterilebileceği üzere türevleri şöyledir:

$$\begin{aligned}
\tanh' x &= 1-\tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}\\
\coth' x &= 1-\coth^2 x = -\mathrm{csch}^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x}\\
\mathrm{sech}' x &= -\tanh x\,\mathrm{sech} x\\
\mathrm{csch}' x &= -\coth x\,\mathrm{csch} x.
\end{aligned}$$

Bunların kolay hesaplarını okura bırakıyoruz.

$$\mathrm{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

ve

$$\coth^2 x = 1 + \mathrm{csch}^2 x$$

eşitliklerini de kanıtlamak kolay.

Alıştırmalar

3. $\int e^{-x}\sinh x\, dx$ integralini bulun.

4. $f = \tanh$ fonksiyonunun

$$\frac{1}{2}f'' = f^3 - f$$

"diferansiyel denklem"ini sağladığını gösterin.

5. $x = \sinh\alpha$ değişikliğine giderek

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

integralini hesaplayın.

Diğer Hiperbolik Fonksiyonların Tersleri

tanh: $\mathbb{R} \to (-1, 1)$ bir eşleme olduğundan, tersi de vardır ve tersi

$$\mathrm{atanh}: (-1, 1) \to \mathbb{R}$$

olarak yazılır.

coth fonksiyonunu $(0, \infty)$ aralığına kısıtlarsak, bu aralıkla $(1, \infty)$ aralığı arasında bir

$$\mathrm{acoth}: (1, \infty) \to (0, \infty)$$

eşlemesi elde ederiz.

sech fonksiyonunu $[0, \infty)$ aralığına kısıtlarsak, $[0, \infty)$ ile $(0, 1]$ aralığı arasında bir eşleme elde ederiz. Bu eşlemenin tersi

$$\mathrm{asech}: (0, 1] \to [0, \infty)$$

olarak gösterilir.

csch x fonksiyonunu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kümesinin bir eşleşmesidir. Bu eşleşmenin tersi

$$\mathrm{acsch} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olarak gösterilir.

Örnek olarak asech sonksiyonunun türevini bulalım. Her zamanki gibi

$$\mathrm{sech}(\mathrm{asech}\, x) = x$$

eşitliğinin türevini alacağız. (Elbette $x \in (0, 1]$ olmalı.)

$$\mathrm{sech}'(\mathrm{asech}\, x)\cdot \mathrm{asech}' x = 1 \qquad (10)$$

elde ederiz. Demek ki $\mathrm{sech}'(\mathrm{asech}\, x)$ ifadesini anladığımız bir dilde ifade etmeliyiz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sech}'(\mathrm{asech}\, x) &= -\tanh(\mathrm{asech}\, x)\cdot\mathrm{sech}(\mathrm{asech}\, x)\\
&= -x\tanh(\mathrm{asech}\, x)\\
&= -x\frac{\sinh(\mathrm{asech}\, x)}{\cosh(\mathrm{asech}\, x)}\\
&= -x\sinh(\mathrm{asech}\, x)\,\mathrm{sech}(\mathrm{asech}\, x)\\
&= -x^2\sinh(\mathrm{asech}\, x)
\end{aligned}$$

eşitliğinden, $\sinh(\mathrm{asech}\, x)$ ifadesini anladığımız daha basit bir dile tercüme etmemiz gerektiği anlaşılır.

$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ eşitliğini $\cosh^2 u$'ya bölersek, yani $\mathrm{sech}^2 u$ ile çarparsak,

$$1 - \sinh^2 u \cdot \operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech}^2 u$$

elde ederiz. Burada da $u = \operatorname{asech} x$ alırsak,

$$1 - x^2 \sinh^2(\operatorname{asech} x) = x^2,$$

yani

$$\sinh(\operatorname{asech} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad (11)$$

elde ederiz. Böylece yukardaki hesaplara devam edersek,

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}'(\operatorname{asech} x) &= -x^2 \sinh(\operatorname{asech} x)\\ &= -x^2 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = -x\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

buluruz. Buradan da

$$\operatorname{asech}' x = \frac{1}{\operatorname{sech}'(\operatorname{asech} x)} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

buluruz. Bu son eşitlikten de

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{asech} x + C \qquad (12)$$

elde edilir.

Bulunan bu integral bize bir fikir vermeli, çünkü

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

integralini almanın başka yolları da olmalı. İki integrali eşitleyerek bir eşitlik bulabiliriz. Nitekim, eğer integralde, $x \in [0, \pi/2)$ için $x = \cos\alpha$ değişikliğine gidersek,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} = -\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

buluruz ki, en sağdaki integrali bu yazıda birkaç sayfa önce bulduk:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + C.$$

Sağdaki ifadeyi x cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + C\\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\arccos x}{1-\sin\arccos x} + C\\ &= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} + C\\ &= -\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2} + C.\end{aligned}$$

Demek ki bir C sabiti için,

$$\operatorname{asech} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2} + C$$

eşitliği doğru olmalı. İki tarafı da $x = 1$'de değerlendirirsek $C = 0$ buluruz. Demek ki

$$\operatorname{asech} x = \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2}. \qquad (13)$$

Hiperbolik fonksiyonlarının terslerinin türevleri de benzer yöntemle bulunabilir. İşte liste:

$$\begin{aligned}\operatorname{atanh} x &= \frac{1}{1-x^2}\\ \operatorname{acoth} x &= \frac{1}{1-x^2}\\ \operatorname{asech} x &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\\ \operatorname{acsch} x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Sağ taraftaki ifadelerin daha aşina olduğumuz yöntemle antitürevini bularak,

$$\begin{aligned}\operatorname{atanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\\ \operatorname{acoth} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\\ \operatorname{asech} x &= \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\\ \operatorname{acsch} x &= \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitliklerden kolayca

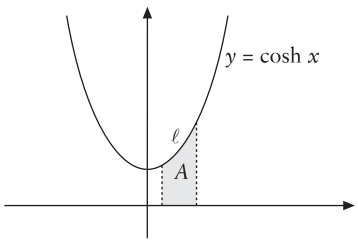
$$\begin{aligned}\operatorname{asech} x &= \operatorname{acosh}\frac{1}{x}\\ \operatorname{acsch} x &= \operatorname{asinh}\frac{1}{x}\\ \operatorname{acoth} x &= \operatorname{atanh}\frac{1}{x}\end{aligned}$$

çıkar.

Henüz bir eğrinin uzunluğunu görmedik ama okura gene de çıtlatalım: cosh fonksiyonunun altında kalan $x = a$'dan $x = b$'ye kadar olan A alanı, aynı bölgeye kısıtlanan $y = \cosh x$ eğrisinin $x = a$'dan $x = b$'ye kadar olan ℓ uzunluğuna eşittir, yani

$$\begin{aligned}\text{alan} &= \int_a^b \cosh x\, dx\\ &= \int_a^b \sqrt{1+(\sinh x)^2}\, dx = \text{grafiğin uzunluğu}\end{aligned}$$

olur.



İntegral Örnekleri

1. $I = \int \cosh^2 x\, dx$ *integralini hesaplayın.*

Birinci Çözüm: Tanımı kullanalım:

$$I = \int \cosh^2 x dx = \int \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right) + C$$

buluruz.

İkinci Çözüm: $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1$ eşitliğini kullanalım. Aynen yukardaki gibi

$$I = \int \cosh^2 x dx = \int \frac{1 + \cosh(2x)}{2} dx$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4} + C$$

buluruz.

2. *Aşağıdaki integrali hesaplayın.*

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

Birinci Çözüm: Bu integrali önce eski yöntemlerle yapmaya çalışalım.

$$x = \frac{1}{\cos\alpha}$$

değişikliğine gidelim. O zaman,

$$dx = d\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} d\alpha$$

ve

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$$
$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$
$$= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$$
$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

olur ve

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$
$$= \int \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} d\alpha$$
$$= \int \frac{\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha} d\alpha = \int \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^3\alpha} d\alpha$$
$$= \int \frac{d\alpha}{\cos^3\alpha} - \int \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

elde ederiz. Bu integralin sonunu getirebiliriz, hem bu sayıda hem de önceki sayılarda defalarca gördük. Ama devam etmeyeceğiz, çünkü hiperbolik fonksiyonlarla bu integral çok daha kolay biçimde alınır.

İkinci Çözüm: $x = \cosh\alpha$ değişikliğine gidelim. O zaman $dx = \sinh\alpha\, d\alpha$ ve

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2\alpha - 1}$$
$$= \sqrt{\sinh^2\alpha}$$
$$= \sinh\alpha$$

($\alpha \geq 0$ olmak zorunda). Demek ki,

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$
$$= \int \sinh^2\alpha d\alpha$$
$$= \int \frac{\cosh(2\alpha) - 1}{2} d\alpha$$
$$= \frac{\sinh(2\alpha)}{4} - \frac{\alpha}{2} + C$$
$$= \frac{\sinh(2\operatorname{acosh} x)}{4} - \frac{\operatorname{acosh} x}{2} + C$$
$$= \frac{\sinh(\operatorname{acosh} x)\cosh(\operatorname{acosh} x)}{2} - \frac{\operatorname{acosh} x}{2} + C$$
$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{acosh} x}{2} + C.$$

Genel bir kural olarak ikinci yöntemi ve yanıt biçimini tercih etmek gerekir.

3. *Aşağıdaki integrali bulun.*

$$I = \int \sqrt{1 + x + x^2}\, dx$$

Çözüm: Önce standart değişikliklere gidelim:

$$y = x + \frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} z \text{ ve } z = \sinh u$$

değişiklikleriyle, ve Örnek 1'de bulunanla,

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1+x+x^2}\,dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx\\
&= \int \sqrt{y^2+\frac{3}{4}}\,dy = \int \sqrt{\frac{3}{4}z^2+\frac{3}{4}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,dz\\
&= \frac{3}{4}\int \sqrt{z^2+1}\,dz = \frac{3}{4}\int \cosh^2 u\,du\\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{u}{2}+\frac{\sinh(2u)}{4}\right)+C\\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{asinh} z}{2}+\frac{\sinh(2\operatorname{asinh} z)}{4}\right)+C\\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{asinh} z}{2}+\frac{2\sinh(\operatorname{asinh} z)\cosh(\operatorname{asinh} z)}{4}\right)+C\\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{\operatorname{asinh} z}{2}+\frac{z\sqrt{1+z^2}}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

elde ederiz ve gerisi kolay.

4. *Aşağıdaki integrali hesaplayın.*

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$$

Çözüm: Önce karekök içindeki ifadeyi kareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\\
&= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}.
\end{aligned}$$

Karekök içindeki ifadeye bakınca

$$x = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cosh\alpha$$

değişiminin yararı anlaşılıyor. Bu değişimle, integral,

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}\sinh\alpha\, d\alpha}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cosh\alpha\right)\frac{1}{2}\sinh\alpha} = 2\int \frac{d\alpha}{1+\cosh\alpha}$$

integraline dönüşür. Eğer

$$\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$$

ve (9) eşitliğini anımsarsak gerisini biraz hesapla kolaylıkla getirebiliriz:

$$\begin{aligned}
I &= 2\int \frac{d\alpha}{1+\cosh\alpha} = 2\int \frac{d\alpha}{2\cosh^2\frac{\alpha}{2}}\\
&= 2\int \frac{d\frac{\alpha}{2}}{\cosh^2\frac{\alpha}{2}} = 2\tanh\frac{\alpha}{2}+C\\
&= 2\frac{\sinh\alpha}{1+\cosh\alpha}+C = 2\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}+C.
\end{aligned}$$

(Son satırda gereken küçük hesaplar: $\cosh a = 2x-3$ ve buradan $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1 = (2x-3)^2 - 1 = 4(x^2-3x+2)$.) ♦