Altkümeler, 01-Dizileri ve Fibonacci Dizisi

Prof. İ. T. Erol

1. Altkümeler

Bir 01-*dizisi*, 0 ve 1'lerden oluşan bir dizidir. Bu yazıda sadece sonlu uzunluktaki dizilerden sözedeceğiz. Örneğin

$$00111001010011$$

uzunluğu 14 olan bir 01-dizisidir.

Uzunluğu n olan 2^n tane dizi olduğunu herkes biliyor olmalı; n elemanlı bir kümenin altküme sayısı kadar. Uzunluğu 0 olan $2^0 = 1$ tane dizi vardır; içinde hiç 0 ya da 1 ya da herhangi bir simge olmayan bu diziye ***boşdizi*** adı verilir ve boşdizi $\langle\rangle$ olarak gösterilir.

$\{1, 2, ..., n\}$ kümesinin her altkümesini n uzunluğunda bir 01-dizisi olarak kodlayabilriz. Örneğin, $n = 6$ ise,

$$001101$$

dizisi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin

$$\{3, 4, 6\}$$

altkümesini kodlar. Anlaşılmıştır herhalde: Dizinin i'inci terimi 0 ise i elemanı altkümede değil, 1 ise i elemanı altkümede demektir. Örneğin sadece 0'lardan oluşan dizi boşkümeyi, sadece 1'lerden oluşan dizi ise tüm kümeyi kodlar. 1010101... diye devam eden dizi de tek sayılardan oluşan kümeyi kodlar.

Örnekler

Örnek 1. İçinde 00 belirmeyen diziler, ardışık iki sayıdan en az birinin altkümede bulunduğu altkümeleri kodlarlar.

Örnek 2. İçinde 01 belirmeyen diziler, bir

$$0 \le k \le n$$

için ilk k sayıyı içeren kümeleri kodlarlar çünkü bu dizilerde 0 belirir belirmez sonra gelen tüm terimler 0 olmak zorundadırlar.

Örnek 3. İçinde 10 belirmeyen diziler, bir

$$0 \le k \le n$$

için son k sayıyı içeren kümeleri kodlarlar.

Örnek 4. İçinde 001 belirmeyen diziler, iki ardışık sayıyı içermediğinde o sayılardan büyük hiçbir sayıyı içermeyen altkümeleri kodlarlar.

Alıştırmalar

1. Tersten dizildiğinde değişmeyen dizilere palendromik ya da simetrik dizi denir. n uzunluğunda kaç simetrik dizi vardır?

2. İçinde 101 belirmeyen diziler, hangi altkümeleri kodlarlar?

3. İçerdiği her sayı için, o sayının ya bir küçüğünü ya da bir büyüğünü içeren (her ikisini birden de içerebilir)

$$\{1, 2, ..., n\}$$

kümesinin altkümeleri ne tür 01-dizileri tarafından kodlanırlar?

4. Ardışık her üç sayının en az birini içeren kümeler ne tür 01-dizileriyle kodlanırlar?

Bu yazıda yukardaki örneklerdeki gibi belli bir özelliği olan 01-dizilerini sayacağız, böylece belli özelliği olan altkümeleri de saymış olacağız. Kolaylık olması açısından 01-dizisi yerine kısaca dizi diyeceğiz.

2. 01-Dizileri

Örnek 5. *İçinde* 01 *olmayan n uzunluğunda kaç tane dizi vardır*?

Çözüm: Dizinin içinde 01 yoksa, dizide beliren ilk 0'dan sonra hep 0 belirmeli. Yani dizinin başında belli sayıda 1 olmalı, ve beliren ilk 0'dan sonra dizide hep 0 olmalı. Örneğin içinde 01 olmayan 5 uzunluğunda 6 dizi vardır:

11111, 11110, 11100,
11000, 10000, 00000.

Genel olarak içinde 01 bulunmayan n uzunluğundaki dizilerin sayısı $n + 1$'dir.

İçinde 10 olmayan dizilerin sayısı da aynıdır elbette.

Bu problem kolaydı. Daha zorlarına geçelim.

Örnek 6. *İçinde* 00 *olmayan n uzunluğunda kaç dizi vardır?*

Çözüm: İçinde 00 olmayan $n + 1$ uzunluğunda bir dizinin son rakamı elbette ya 0'dır ya da 1'dir. Eğer dizinin son rakamı 1 ise, bu 1'i silerek içinde 00 olmayan n uzunluğunda bir dizi elde ederiz. Eğer son rakam 0 ise, sondan bir önceki rakam 1 olmak zorundadır, yani dizi 10 ile bitmek zorundadır; diziden son iki rakamı silersek, içinde 00 olmayan $n - 1$ uzunluğunda bir dizi elde ederiz.

Ters istikamette, eğer içinde 00 olmayan n uzunluğunda bir dizi alırsak ve bu dizinin sonuna 1 eklersek, içinde 00 olmayan $n + 1$ uzunluğunda bir dizi elde ederiz; aynı şekilde içinde 00 olmayan $n - 1$ uzunluğunda bir dizi alırsak ve bu dizinin sonuna 10 eklersek, içinde 00 olmayan $n + 1$ uzunluğunda bir dizi elde ederiz.

Yukarda söylemek istediklerimizi matematiksel olarak şöyle daha iyi ifade ederiz:

Eğer A_n, içinde 00 olmayan n uzunluğundaki diziler kümesiyse,

$$A_{n+1} = A_n 1 \sqcup A_{n-1} 10$$

olur. Böylece eğer $|A_n| = a_n$ ise,

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad (1)$$

elde ederiz. Yani her a önceki iki a'nın toplamıdır. (Bu diziye ***Fibonacci dizisi*** denir.) Bu formül sayesinde eğer a_0 ve a_1'i bilirsek, tüm a_n sayılarını teker teker hesaplayabiliriz; a_0 ve a_1'i bulmak da hiç zor değil: $a_0 = 1$ ve $a_1 = 2$. Dolayısıyla

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 5$$
$$a_4 = 8$$
$$a_5 = 13$$
$$a_6 = 21$$
$$a_7 = 34$$
$$a_8 = 55$$
$$a_9 = 89$$
$$a_{10} = 144$$

olur.

Bu yöntemle a_{1000} sayısını hesaplamanın zahmetli olacağı belli. Yazının ikinci kısmında a_n için kapalı bir formül bulacağız.

Aslında bu aşamada a_n sayısının neye eşit olduğunu tahmin edebilsek, (1) formülünü kullanarak formülü tümevarımla oldukça kolay bir biçimde kanıtlayabiliriz ama ne yazık ki bu formülü tahmin etmek hiç kolay değildir.

Şimdi problemi biraz daha zorlaştıralım.

Örnek 7. *İçinde* 000 *olmayan n uzunluğunda kaç dizi vardır?*

Çözüm: Bu tür dizilerden oluşan kümeye A_n ve A_n'nin eleman sayısına da a_n diyelim. A_{n+2}'den bir eleman alalım.

Eğer bu elemanın sonunda 1 varsa o zaman bu 1'i silerek A_{n+1}'den bir eleman elde ederiz. Ve bunun tersi de doğrudur: A_{n+1}'den bir elemanın sonuna 1 koyarak A_{n+2}'den bir eleman elde ederiz.

Eğer A_{n+2}'den alınan elemanın sonunda 0 varsa, bu en sondaki 0'dan önce ya 1 vardır ya da 0, yani elemanın sonu ya 10 ile ya da 00 ile biter. Eğer elemanın sonunda 10 varsa, en sondaki bu 10'ı kaldırarak A_n'den bir eleman elde ederiz. Bunun tersi de doğrudur: A_n'den alınan rastgele bir elemanın sonuna 10 koyarsak A_{n+2}'den bir eleman elde ederiz. Öte yandan A_{n+2}'den alınan elemanın sonunda 00 varsa, bu en sondaki 00'dan önce 1 olmalı, yani eleman 100 ile bitmeli ve bu en sondaki 100 atıldığında geriye A_{n-1}'den bir eleman kalmalı. Bunun tersi de doğrudur: A_{n-1}'den alınan bir elemanın sonuna 100 eklenirse, A_{n+2}'den bir eleman elde ederiz.

Yukardaki paragraflarda söylenmek istenen şu:

$$A_{n+2} = A_{n+1} \sqcup A_n \sqcup A_{n-1},$$

yani

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + a_{n-1}.$$

Bu da şu demektir: Eğer ilk üç a_n'yi bilirsek, diğerlerini sabırla hesaplayabiliriz. İlk üç a_n'yi bulmak da pek zor değil:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 4.$$

Demek ki, örneğin,

$$a_3 = 1 + 2 + 4 = 7,$$
$$a_4 = 2 + 4 + 7 = 13,$$
$$a_5 = 4 + 7 + 13 = 24.$$

Genel formülün nasıl bulunacağını daha sonra göreceğiz.

Örnek 8. *İçinde* 010 *olmayan* n *uzunluğunda kaç dizi vardır*?

Çözüm: Yukardaki örneklerde uygulanan yöntemi uygulamaya çalışalım. Yönteme bir şeyler eklemek zorunda kalacağız.

İçinde 010 olmayan n uzunluğundaki diziler kümesi A_n olsun.

Eğer A_{n+1}'den alınan bir elemanın en sonunda 1 varsa, bu 1'i silersek A_n'den bir eleman buluruz. Ve, tam tersine, A_n'den bir elemanın sonuna 1 koyarsak A_{n+1}'den bir eleman elde ederiz. Öte yandan eğer A_{n+1}'den alınan bir elemanın sonunda 0 varsa, bu 0'dan önce 01 olamaz. İçinde 010 olmayan ve ayrıca 01 ile bitmeyen n uzunluğundaki diziler kümesi B_n olsun. Demek ki A_{n+1}'den alınan bir elemanın sonunda 0 varsa, bu 0'ı atarsak B_n'den bir eleman buluruz. Ve, tam tersine B_n'den bir elemanın sonuna 0 eklersek A_{n+1}'den bir eleman buluruz. Bu paragrafta

$$A_{n+1} = A_n1 \sqcup B_n0$$

eşitliğini kanıtladık. Eğer A_n'nin eleman sayısına a_n, B_n'nin eleman sayısına b_n dersek,

$$a_{n+1} = a_n + b_n \tag{2}$$

eşitliğini kanıtlamış olduk.

Eğer B_n'den bir elemanın sonunda bir 0 varsa, bu 0'ı atarak B_{n-1}'den bir eleman buluruz. Ve, tam tersine B_{n-1}'den bir elemanın sonuna 0 eklersek B_n'den bir eleman elde ederiz. Eğer B_n'den bir elemanın sonunda bir 1 varsa, bu 1'den önceki terim 0 olamaz, dolayısıyla 1 olmalı, yani bu elemanın en sonunda 11 olmalı: bu en sondaki 11'i atarsak A_{n-2}'den bir eleman buluruz. Ve, tam tersine A_{n-2}'den bir elemanın sonuna 11 eklersek B_n'den bir eleman buluruz. Sonuç olarak,

$$B_n = B_{n-1}0 \sqcup A_{n-2}11$$

eşitliğini, yani

$$b_n = b_{n-1} + a_{n-2} \tag{3}$$

eşitliğini kanıtladık.

Şimdi (2) eşitliğini n ve $n - 1$ için yazalım:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + b_n \\ a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} \end{aligned}$$

Bu eşitliklerden ikincisini birincisinden çıkarırsak,

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + (b_n - b_{n-1})$$

buluruz. Bu eşitlik ve (3) eşitliği

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-2}$$

eşitliğini, yani

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \tag{4}$$

eşitliğini verir. Böylece $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ eşitliklerinden (4) sayesinde istediğimiz a_n'yi (biraz sabırla) bulabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 - a_1 + a_0 = 8 \\ a_4 &= 2a_3 - a_2 + a_1 = 14 \\ a_5 &= 2a_4 - a_3 + a_2 = 24 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırmalar

5. İçinde 110 bulunmayan kaç tane 10 uzunluğunda 01-dizisi vardır?

6. İçinde 110 bulunmayan n uzunluğundaki 01-dizisi sayısının, içinde 100 bulunmayan 01-dizisi sayısına eşit olduğunu kanıtlayın.

7. İçinde 012 bulunmayan n uzunluğunda 012-dizilerinin sayısını bulun.

8. İçinde 011 bulunmayan n uzunluğunda 012-dizilerinin sayısını bulun.

9. 00 ve 1 simgeleriyle n uzunluğunda kaç 01-dizisi yazılabilir?

3. Fibonacci Dizisi İçin Kapalı Bir Formül

Örnek 6'da $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ ile başlayan ve daha sonraki terimleri

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

formülüyle tanımlanan ve Fibonacci dizisi olarak adlandırılan diziyle muhattap olduk. Formülü kullanarak

$$a_{10} = 144$$

eşitliğini bulduk. Ama ya a_{1000} sayısı istenmiş olsaydı? O zaman bayağı uzun hesaplar yapmak zorunda kalacaktık. Bu bölümün amacı a_n için "kapalı" bir formül bulmak, yani içine n'nin değeri yerleştirildiğinde bize hemen a_n değerini veren bir formül bulmak.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

ve

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman

$$x_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = Ax_n$$

olur. Buradan da her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A^n x_0 = x_n$$

çıkar.

A^n matrisini hesaplayalım. Bunu yapmak için önce A matrisini çapraz matris haline sokalım. (Eğer bu mümkün değilse Jordan kanonik biçime sokmak gerekir.) Bunu yapmak için de matrisin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulalım:

$$\begin{aligned}\det(A - x\mathrm{Id}_2) &= \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \\ &= -x(1-x) - 1 = x^2 - x - 1\end{aligned}$$

olduğundan, özdeğerler

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

dir[1]. (İki değişik özdeğer olduğundan, A matrisi bir başka tabanda çapraz matris olarak yazılır.) Bu özdeğerlere tekabül eden $v_\pm \neq 0$ özvektörleri bulalım.

$$Av_\pm = \lambda_\pm v_\pm$$

denklemini çözersek

$$v_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix}$$

buluruz. Bu vektörlerin gerçektende, sırasıyla, $\lambda_\pm$ özdeğerlerine tekabül eden özvektörler olduklarını kontrol etmek zor değildir. (Herhangi bir hesap hatası olasılığına karşı bu kontrolün yapılmasını önemle öneririz.)

Şimdi P, kanonik tabanı oluşturan e_1 ve e_2 vektörlerini v_+ve v_- vektörlerine götüren dönüşümün matrisi olsun:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

P'nin tersini bulmak zor değil:

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{pmatrix}.$$

Şimdi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

olmalı. Hesaplar yapınca bir hata yapmadığımız ve eşitliğin doğru olduğu kolaylıkla görülür. Buradan, biraz hesapla,

$$\begin{aligned}A^n &= \left(P\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_-^{n-1} - \lambda_+^{n-1} & \lambda_-^n - \lambda_+^n \\ \lambda_-^n - \lambda_+^n & \lambda_-^{n+1} - \lambda_+^{n+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= x_n = A^n x_0 \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_-^{n-1} - \lambda_+^{n-1} & \lambda_-^n - \lambda_+^n \\ \lambda_-^n - \lambda_+^n & \lambda_-^{n+1} - \lambda_+^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_-^{n-1} - \lambda_+^{n-1} + 2(\lambda_-^n - \lambda_+^n) \\ \lambda_-^n - \lambda_+^n + 2\left(\lambda_-^{n+1} - \lambda_+^{n+1}\right) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ve

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_+^{n-1} - \lambda_-^{n-1} + 2\lambda_+^n - 2\lambda_-^n\right)$$

olur[2]. Böylece doğrudan bir hesapla, mesela a_{52}'yi bulabiliriz:

$$a_{52} = 86.267.571.272.$$

Ayrıca a_n için bulunan formülün her zaman bir doğal sayı vermesinin başlı başına şaşırtıcı bir olgu olduğuna dikkatinizi çekeriz. ♦

Alıştırmalar

13. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ olsun ve n ﬂ 2 için a_n sayıları

$$f_n = 3f_{n-1} - 2f_{n-2}$$

formülüyle tanımlansın. f_n için kapalı bir formül bulun.

14. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 2$ olsun ve n ﬂ 3 için f_n sayıları

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$$

formülüyle tanımlansın. f_n için kapalı bir formül bulun.

15. $a_0 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} - 1$ olsun. a_n için kapalı bir formül bulun.

---

1 Aşağıdaki hesaplarda $\lambda_+\lambda_- = -1$ ve $\lambda_\pm^2 - \lambda_\pm - 1 = 0$ eşitlikleri gerekecek. Ayrıca λ_+, ***altın oran*** adıyla bilinen sabittir.

2 Bu hesapları daha çabuk yapabilmek için $\lambda_\pm^2 = \lambda_\pm + 1$ eşitlikleri kullanılabilir.