Kapak Konusu: Karelerin Toplamı

Euler'in $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ Formülü

Dünyanın bugüne kadar gelmiş geçmiş en iyi dört matematikçisinden biri[1] olarak kabul edilen Euler, yaşadığı dönemde üstünde çok çalışılmış, hatta üstünde çalışmak moda olmuş ancak tüm çabalara rağmen bir türlü bulunamayan

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

serisini hesaplayarak hem yeteneğiyle hem de bulduğu sonuçla çağdaşlarını bir kez daha şaşırtmıştır: İnanılmaz ama gerçek, toplam

$$\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}64493406684823$$

çıkmıştı[2].

Problem ilk olarak 1650'de yayımlanan kitabında Pietro Mengoli adlı bir mekanik profesörü sormuştu. 1655'te John Wallis, 1691'de de John Bernoulli problem üzerine düşündüler ama sonucu bulamadılar. Sorunun soruluşundan yaklaşık 80 yıl sonra, 1734'te, Euler toplamı buldu ve bugünün standartlarında geçerli kabul edilemeyecek kanıtını sundu. Euler, sanki kanıtının matematiksel zaafını biliyormuş gibi daha sonra en az iki değişik kanıtını daha yayımlamıştır.

Toplamı terim terim toplayarak tahmin etmek de hiç kolay değil, çünkü serinin $\pi^2/6$'ya yakınsaklığı çok yavaş. Nitekim eğer kısmi toplamlara

$$s_n = 1 + \cdots + 1/n^2$$

dersek,

$$s_{10} \approx 1{,}549 < \pi^2/6 = 1{,}6649\ldots$$

ve

$$s_{20} \approx 1{,}596 < \pi^2/6 = 1{,}6649\ldots$$

oluyor; daha virgülden sonraki ilk iki hane bile bu aşamada belirmiyor. İlk iki hane s_{203}'te beliriyor, daha önce değil. İlk üç hane ise ta s_{1071}'de beliriyor. Kaldı ki toplamın ilk 10 rakamı bilinse bile, elde edilen yaklaşık sayının $\pi^2/6$ olduğunu tahmin etmek imkânsıza yakın. Yani sonsuz toplamı deneyerek yanılarak elde etmek pek mümkün değil. İlla ki kanıt gerekiyor.

Euler'in Masalsı Kanıtı: Önce Euler'in düşünme biçimini anlamaya çalışalım.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz[3]. Bu eşitliği π^2'ye bölelim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{6}$$

elde ederiz. Birazdan anlaşılacağını umduğumuz bir nedenden, 6 yerine 3! yazalım. Demek ki

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{3!}$$

eşitliğini kanıtlamak istiyoruz.

Sağdaki 1/3! önemli, çünkü −1/3! sayısı sin x fonksiyonunun Taylor açılımında x^3'ün katsayısı:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Bu açılımda $x \neq 0$ varsayımını yapıp, iki tarafı x'e bölelim:

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

elde ederiz.

Bir an için yukardaki $(\sin x)/x$ fonksiyonunun açılımının sonsuza kadar gitmediğini, belli bir yerde durduğunu varsayalım, yani sonsuz bir seri yerine bir polinom alalım ve araya, eşitlik yerine, "aşağı yukarı eşitlik" anlamına ≈ işareti koyalım:

$$\frac{\sin x}{x} \approx \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Sağ taraf artık bir polinom. Derecesi de $2n$. Bu polinomun en fazla $2n$ tane kökü olabilir. Ayrıca eğer a bu polinomun bir köküyse $-a$ da bir köküdür.

Sağdaki polinomun köklerini bilmiyoruz belki ama, bu köklerin, sol taraftaki

$$\frac{\sin x}{x}$$

1 Diğerleri Arşimet, Newton ve Gauss'tur.

2 Geçmişte bu serinin 2'den küçük bir sayıya yakınsak olduğunu (aynen Euler'in çağdaşları gibi) kanıtlamış ancak serinin kaça eşit olduğunu bul(a)mamıştık.

3 Euler, toplamın $\pi^2/6$'ya eşit olacağını kanıtı tamamlamadan önce tahmin edememişti, dolayısıyla düşünmeye böyle başlamış olamaz. Euler'in nasıl düşündüğünü bir sonraki paragraftan itibaren anlatacağız.

fonksiyonunun köklerine çok yakın olmasını beklemek hakkımızdır[4]. Sol taraftaki fonksiyonun sonsuz sayıda kökü var, bu kökler her $0 \neq k \in \mathbb{N}$ için $\pm k\pi$ biçimindedir. Bu sonsuz sayıda kökten ilk n tanesini ve bunların negatiflerini seçelim:

$$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots, \pm n\pi.$$

Bu köklerin sağ taraftaki polinomun da kökleri olduğunu varsayalım[5]. Bu doğru değil tabii ama olsun... O zaman, sağ taraftaki polinom,

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{x}{k\pi}\right)\left(1+\frac{x}{k\pi}\right)\right]$$

olarak, yani

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

olarak yazılabilir[6]. Demek ki[7],

$$\frac{\sin x}{x} \approx \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \approx \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

x^2 yerine y yazalım ya da $x > 0$ varsayımını yapıp x yerine $\sqrt{y}$ yazalım:

$$\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \approx \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{y^k}{(2k+1)!} \approx \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{y}{k^2\pi^2}\right).$$

En sağdaki çarpımı yapmak pek akıl kârı olmasa da çarpım yapıldığında sağdaki ifadede beliren y'nin katsayısını bulmak imkânsız değil, hatta kolay... Aşağıyukarılığın her iki tarafında bulunan y'nin katsayılarını eşleştirerek,

$$\frac{1}{3!} \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\pi^2}$$

buluruz. İki tarafı da π^2 ile çarpıp

$$\frac{\pi^2}{3!} \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

buluruz. Son olarak n'yi sonsuza götürelim (ama bunu yaparken aşağı yukarılığın limit alındığında tamamen kaybolacağını umup eşitlik yazalım):

$$\frac{\pi^2}{3!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

bulunur, aynen bulmak istediğimiz eşitlik!

4 Masal dünyasına bu aşamada giriyoruz.

5 Masal devam ediyor.

6 Çünkü $p(x) = 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_d x^d$ polinomunun kökleri $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ise, $p(x)$ polinomu $(1 - x/\alpha_i)$ifadelerinin çarpımına eşittir, ne de olsa $p(x)$ polinomuyla $\prod (1 - x/\alpha_i)$ çarpımı, dereceleri d olan ve aynı köklere sahip olan ve en az bir katsayısı (sabit katsayısı) eşit olan iki polinomdur.

7 Polinomlar için geçerli olan ve kuvvet serilerine uygulanan yukardaki olgu, tüm kuvvet serileri için geçerli değildir. Mesela $g(x) = 2 - 1/(1 - x) = 1 - x - x^2 - x^3 - \cdots$ ise g'nin tek bir kökü vardır, 1/2 ve katsayıların hiçbiri bu köke (bu kökün toplamına!) eşit değildir.

Burada durmayıp masal dünyasında gezinmeye devam edelim. Bir an için, yukarda bulduğumuz "aşağı yukarılıkta" n'yi sonsuza götürdüğümüzde,

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

eşitliğini elde ettiğimizi düşleyelim. Eğer bu eşitlikte $x = \pi/2$ alırsak, $\sin(\pi/2) = 1$ olduğundan,

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right]$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{2k}\frac{2k+1}{2k}\right) = \left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\frac{7}{6}\right)\cdots$$

buluruz. Bunu ters çevirirsek, bunun geçen sayımızda sayfa 60-61'de bulduğumuz Wallis formülünü verdiğini görürüz:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1\times 3}\frac{4^2}{3\times 5}\frac{6^2}{5\times 7}\cdots$$

Wallis formülünün doğru olduğunu bildiğimizden, yukardaki masalsı dünya tamamen gerçekten kopuk olamaz, bir yerlerde bir gerçek payı olmalı.

Matematiksel Kanıt: Şimdi masal dünyasından kopup matematiksel kanıtı verelim.

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx \qquad (1)$$

olsun.

Önsav. *Eğer $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ise*

$$f_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

olur.

Kanıt: Bunu kanıtlamak için iyi bilinen (ve MD' de geçmişte yaptıklarımızdan kolaylıkla çıkan)

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

eşitliğini kullanacağız. Bundan şunlar çıkar:

$$2\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2}$$
$$2\cos x\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}$$
$$2\cos 2x\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}$$
$$\ldots$$
$$2\cos nx\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}$$

Bu eşitlikleri toplayıp sağ taraftaki teleskopik sadeleştirmeleri yaparsak istenen eşitlik çıkar. □

Şimdi E_n sayılarını şöyle tanımlayalım:

$$E_n = \int_0^{\pi} x f_n(x)\,dx \qquad (2)$$

(1) tanımını kullanarak ve integralleri parçalara ayırarak E_n sayılarını hesaplamak zor değildir:

$$E_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$
$$= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{1 \le k \le n \text{ ve tek}} \frac{2}{k^2}. \qquad (3)$$

Toplamı daha şık yazmak amacıyla n yerine $2n - 1$ alalım ve 2'ye bölelim:

$$\frac{1}{2} E_{2n-1} = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \qquad (4)$$

buluruz. Şimdi n'yi sonsuza götüreceğiz ve

$$\lim_{n\to\infty} E_{2n-1} = 0$$

eşitliğini kanıtlayacağız ve böylece nihai sonuca biraz daha yaklaşmış olacağız. Bu amaçla, $x \in (0, \pi]$ için,

$$g(x) = \left(\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right)' \qquad (5)$$

tanımını yapalım. $g(0) = 0$ olarak tanımlansın. $(0, \pi]$ aralığında g elbette süreklidir. g, 0'da da süreklidir çünkü Taylor açılımını kullanarak $x \neq 0$ ise,

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{(x - x^3/3! + \cdots) - (x - x^3/2! + \cdots)}{(x - x^3/3! + \cdots)^2}$$
$$= \frac{(-1/3! + 1/2!)x^3 + \cdots}{x^2(1 - x^2/3! + \cdots)^2}$$
$$= \frac{(-1/3! + 1/2!)x + \cdots}{(1 - x^2/3! + \cdots)^2}$$

ve zincir kuralından dolayı,

$$g(x) = \left(\frac{x/2}{\sin(x/2)}\right)' = \left(\frac{x}{2}\right)'\left(\frac{x}{\sin x}\right)'_{|x/2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(-1/3! + 1/2!)(x/2) + \cdots}{(1 - (x/2)^2/3! + \cdots)^2}$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$$

olur, yani g sürekli. Dolayısıyla g fonksiyonu $[0, \pi]$ kapalı aralığında sınırlıdır. M bu sınır olsun[8].

Şimdi

$$\int_0^\pi g(x)\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx$$

integralini hesaplayalım. Bu integrali parçalayarak bulmaya çalışalım:

$$du = g\,dx \text{ ve } v = \cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)$$

olsun. O zaman,

$$u = \frac{x/2}{\sin(x/2)} \text{ ve } dv = -\frac{4n-1}{2}\sin\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx$$

olur ve dolayısıyla

$$\int g(x)\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx = \int v\,du = uv - \int u\,dv$$
$$= \frac{x/2}{\sin(x/2)}\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)$$
$$+ \frac{4n-1}{2}\int \frac{x/2}{\sin(x/2)}\sin\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx$$

ve (bağışlanabilir $0/\sin 0 = 1$ günahıyla, çünkü normalde limit almak gerekir),

$$\int_0^\pi g(x)\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx = \frac{x/2}{\sin(x/2)}\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)\Bigg|_0^\pi$$
$$+ \frac{4n-1}{2}\int_0^\pi \frac{x/2}{\sin(x/2)}\sin\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx$$
$$= \frac{x/2}{\sin(x/2)}\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)\Bigg|_0^\pi + \frac{4n-1}{2}\int_0^\pi x f_{2n-1}(x)dx$$
$$= \frac{x/2}{\sin(x/2)}\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)\Bigg|_0^\pi + \frac{4n-1}{2}E_{2n-1}$$
$$= \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{4n-1}{2}\pi\right) - 1 + \frac{4n-1}{2}E_{2n-1}$$
$$= -1 + \frac{4n-1}{2}E_{2n-1},$$

yani

$$E_{2n-1} = \frac{2}{4n-1}\left[1 + \int_0^\pi g(x)\cos\left(\frac{4n-1}{2}x\right)dx\right]$$

bulunur. Ama g ve cos fonksiyonları sınırlı olduklarından, sağdaki integral de sınırlıdır, dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} E_{2n-1} = 0$$

bulunur. Bundan ve (3)'ten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

çıkar.

Şimdi artık Euler formülünü kanıtlayabiliriz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

ve

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Buradan da aradığımız Euler formülü çıkar. □

8 Aslında türevi alınınca görüleceği üzere g artan bir fonsiyondur, dolayısıyla $g(\pi)$ tarafından üstten sınırlıdır.

Kaynakça

[1] Daniel P. Giesy, *Still Another Elementary Proof that* $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$, Mathematics Magazine, cilt 45(3):148 Mart 1972, sayfa 148-149.
[2] Dan Kalman, *Six Ways to Sum a Series*, http://scipp.ucsc.edu/~haber/ph116A/Six\-ways.pdf. Son erişim 22 Mart 2012.
[3] George F. Simmons, Calculus Gems, MAA 2007.