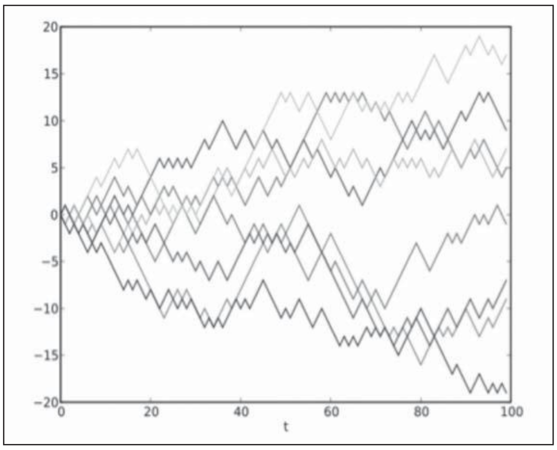
Popüler Matematik

Koordinat Düzleminde Rastgele Yürüyüş

Kaan Cem Ketenci* / *cem_ketenci@yahoo.com*

Matematik Dünyası'nın 2009-III-IV sayısında Çekirge Kaç Sıçrar ya da Rastgele Yürüyüş başlıklı bir yazı vardı. Yazıda 1 boyutta rastgele yürüyüş problemi ele alınmış ve sorunun 2 boyutta çok daha zor olduğu belirtilmişti. Ben ise bu yazımda, farklı versiyonları ekonomi, fizik, kimya, bilgisayar bilimi ve hatta biyoloji gibi pek çok bilim dalında kullanılan, koordinat düzleminde rastgele yürüyüş probleminin o kadar da zor olmadığını göstereceğim. Yazımda hiçbir ileri seviye matematik bilgisi kullanmadan, yalnızca lise matematiğiyle problemin tam bir kanıtını göreceksiniz.

Yazımı okumadan önce MD-2009-III-IV, sayfa 100-101'e bir göz atabilirsiniz. Ama ben yine de problemi kısaca özetleyerek başlayacağım. Bir koordinat düzleminde, orijin üzerinde duran bir çekirge olduğunu hayal edin. Koordinat düzlemi sonsuz olduğundan çekirge hangi yöne bakarsa baksın sonsuz çoklukta kafes noktası görecektir. (Burada kafes noktası ile her iki koordinatı da tamsayı olan noktaları kastediyoruz.)



1 Boyutta rastgele yürüyüş [4]

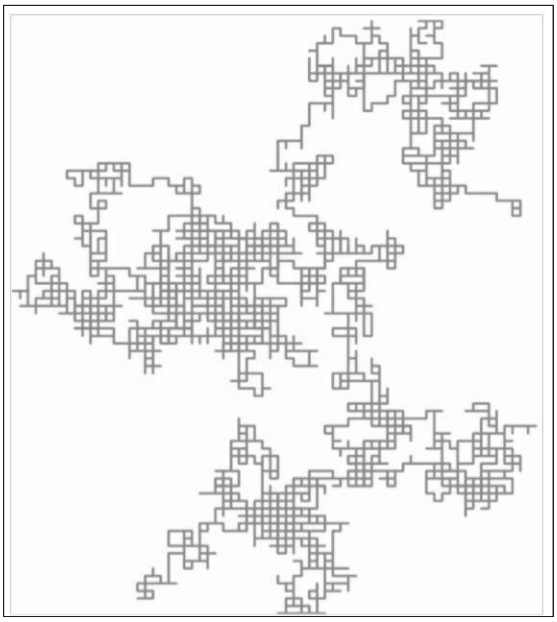
Daha sonra çekirgenin zıplamaya başladığını ve rastgele yönlerde ilerlediğini düşünün. Çekirge her saniye bir kere zıplasın ve her zıplamasında sağ, sol, yukarı veya aşağı yönlerde 1 birim ilerlesin. Problemi basitleştirmek için çekirgenin bu 4 yönün her birine gitme olasılığının eşit olduğunu kabul edelim. Yani çekirgenin her saniyenin sonunda etrafındaki 4 kafes noktasından birine gitme olasılığı 1/4 olsun.

Çekirge zıplama işlemlerini bir süre sürdürdüğünde ulaştığı bazı noktalar olacaktır. Bazı noktalara birden fazla kere uğramış olabilir, bazılarına ise hiç gitmemiş olacaktır. Hatta diyebiliriz ki sonlu sayıda zıplama yaptığında elbette yalnızca sonlu sayıda farklı noktaya uğramış olacak, dolayısıyla da uğramadığı çok sayıda (aslında sonsuz çoklukta) nokta kalacaktır. Sorumuz şu: Çekirge rastgele bir şekilde zıplamayı sonsuza kadar sürdürürse tüm kafes noktalarına ulaşmış olur mu, yoksa hâlâ hiç gitmediği noktalar kalabilir mi? Birazdan göstereceğiz ki, çekirge nasıl hareket ederse etsin, bu rastgele zıplayışı sonucunda her bir noktaya en az 1 kere uğrama (dolayısıyla sonsuz kere uğrama) olasılığı tam olarak 1'dir, yani çekirge önünde sonunda sonsuz çokluktaki noktanın tamamına ulaşır.

Bu durum ilk bakışta bariz gibi gözükebilir. Ne de olsa çekirgeye sonsuz çoklukta hamle yaptırıyoruz, dolayısıyla da sonsuz zaman tanıyoruz. Sonsuz zamanda tabii ki her noktaya gider diyebilirsiniz. Ama o kadar da bariz değil. Sonsuz zamanımız olabilir, ama çekirgenin gitmesi gereken noktaların sayısı da sonsuz. Yani koordinat düzleminin bir yerlerinde gidilmemiş noktaların kalmasının imkânsız olduğu hiç de açık değil. Bunu, problemi 3 boyutlu versiyonuyla (yani çekirgenin 1/6'şar olasılıkla sağa, sola, yukarı, aşağı, ileri veya geri gittiği haliyle) kıyaslayarak görmek daha kolay. 2 boyutlu rastgele yürüyüş probleminde çekirge her noktaya kesinlikle belli bir zaman sonra ulaşacaktır, fakat 3 boyutlu

* Üsküdar Amerikan Lisesi öğrencisi.

halinde, ilginç bir şekilde, kesinlikle gitmediği sonsuz çoklukta nokta bulunacağı kanıtlanmış. Hatta 2'den büyük tüm reel sayılı boyutlarda başlangıç noktasına geri dönme olasılığının bile 1 olmadığı gösterilmiş. Yani 2,01 boyutta bile (bu sefer çekirgenin hareketi çok soyut bir şekilde tanımlanmış bile olsa) sonsuz zamanda gitmemiş olduğu noktalar kalacaktır.

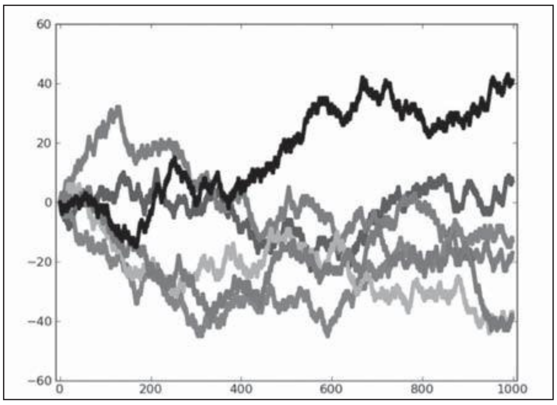


2 boyutta rastgele yürüyüş [4]

Koordinat düzleminde rastgele yürüyüş problemine geri dönecek olursak, aslında kanıtlamamız gereken şey hangi kafes noktasını seçersek seçelim çekirgenin o noktaya sonlu bir zaman sonra geleceğidir. Yani, seçebileceğimiz tüm noktalar için o noktaya en az 1 kere gitme olasılığının 1 olduğunu göstermemiz yeterli. Bunun için öncelikle (1, 0) noktasına bakalım. Çekirgenin tüm noktalara gideceğini iddia ediyorsak (1, 0) noktasına sonlu zamanda gitme olasılığı da 1 olmalı. Bu olasılığa k diyelim ve $k = 1$ olduğunu göstermeye çalışalım. y eksenine göre simetri nedeniyle (–1, 0) noktasına en az 1 kere uğrama olasılığının da k olduğunu, benzer şekilde x eksenine göre simetri nedeniyle de (0, 1) ve (0, –1) noktaları için de bu olasılığın yine k olduğunu biliyoruz.

Şimdi de orijine pozitif bir zamanda geri dönme olasılığını k cinsinden hesaplayalım. Çekirgenin ilk hamlede yapabileceği 4 hamle olduğunu biliyoruz. Eğer (1, 0) noktasına sıçradıysa, bu noktayı yeni başlangıç noktası olarak tanımlayabilir ve orijine dönme olasılığını bu noktaya göre bulabiliriz. Aradığımız olasılık (1, 0) noktasından başlayan çekirgenin (0, 0) noktasına en az 1 kere uğrama olasılığına, yani (0, 0) noktasından başlayan çekirgenin (–1, 0) noktasına uğrama olasılığına, dolayısıyla da k'ya eşit. Simetri nedeniyle aynı önermeleri ayrı ayrı çekirgenin ilk hamlesinde (–1, 0), (0, 1) ve (0, –1) noktalarına gittiği durumlar için de uygulayabilir ve bu durumlarda da olasılığın k olduğunu görebiliriz. O halde, çekirge ilk hamlesinde 4 noktadan hangisine giderse gitsin, yani ilk hamlesinden bağımsız olarak, orijine sonlu zamanda geri dönme olasılığı k'dir.

Koordinat düzlemindeki diğer noktalar için 1 boyutlu rastgele yürüyüş problemindeki kadar basit bir eşitlik yazamıyoruz; çünkü seçtiğimiz bir noktaya ulaşmak için çekirgenin geçmek zorunda olduğunu bildiğimiz belirli bir nokta yok. 1 boyutlu problemde pozitif bir n için n noktasına ulaşma olasılığının $n - 1$ noktasına ulaşma olasılığı çarpı 1 noktasına ulaşma olasılığı olduğu, dolayısıyla genel durumda n'ye ulaşma olasılığının 1'e ulaşma olasılığının n'inci kuvveti olduğu gösterilmişti (bkz. MD 2009-III-IV, sayfa 100-101).



1 boyutlu rastgele yürüyüşte olası ilk 1000'er hamle [3]

2 boyutlu problemimizde bunun gibi bir eşitlik yazamıyoruz; fakat yine de basit bir eşitsizlik elde edebiliriz. m ve n'den en az biri 0'dan farklı olmak üzere, elimizde çekirgenin (m, n) noktasına ulaşma olasılığı ile $(m, n - 1)$, $(m, n + 1)$, $(m - 1, n)$ veya $(m + 1, n)$ noktalarından en az birine sonlu zamanda ulaşma olasılıkları arasında bir ilişki var. Bu 4 nokta (m, n) noktasına komşu olan noktalar olduğundan çekirge (m, n) noktasına ulaşmadan önce bu 4 noktadan en az birine uğramalı. Bu 4 noktadan birine ulaştıysa da, bu nokta yeni başlangıç noktası olarak tanımlanır ve (m, n) noktası bu yeni başlangıç noktasına göre (1, 0), (–1, 0), (0, 1) veya

(0, –1)'den biri haline gelir. Dolayısıyla çekirgenin (m, n)'ye komşu bir noktaya sonlu zamanda gittiği bilindiğinde (m, n)'ye varma olasılığı k olur. Yani genel durumda (m, n) noktasına ulaşma olasılığı (m, n)'ye komşu 4 noktadan en az birine ulaşma olasılığı çarpı k olarak bulunur.

Şimdi eşitsizliğimizi yazmadan önce genelliği bozmadan m fl 0 ve n fl 0 olduğunu varsayalım. Böyle bir varsayımı yapabiliriz; çünkü x ve y eksenlerine göre simetri nedeniyle (m, n)'ye sonlu zamanda ulaşma olasılığı (m, $-n$)'ye ulaşma olasılığına, bu da ($-m$, n)'ye ve ($-m$, $-n$)'ye ulaşma olasılıklarına eşit olacaktır.

Çekirgenin (0, 0)'dan başlayarak (m, n) noktasına gitmesini sağlayam yolların bazılarında, çekirge önce (1, 0), bir zaman sonra (2, 0), ..., bir zaman sonra (m, 0), bir zaman sonra (m, 1), bir zaman sonra (m, 2), ..., bir zaman sonra (m, n) noktalarına gidecektir. Bu $m + n$ tane (uzun) adımın herbirinin olasılığı k olduğundan, çekirgenin (m, n) noktasına uğrama olasılığı en az $k^{|m|+|n|}$'dir.

Artık yapmamız gereken son büyük adım $k = 1$ olduğunu göstermek. Böylece çekirgenin koordinat düzlemindeki tüm kafes noktalarından 1 olasılıkla geçeceğini, bu nedenle de gitmediği hiçbir noktanın kesinlikle kalmayacağını kanıtlamış oluruz.

$k = 1$ olduğunu göstermek için olmayana ergi yönteminden yararlanalım. Yani $k \neq 1$ varsayalım ve bir çelişki elde etmeye çalışalım. Bunun için çekirgenin başlangıç noktasına ortalama gidiş sayısını, yani matematiksel deyişle 0'dan kaç kez geçeceğinin beklentisini hesaplamaya çalışacağız. Bir başka deyişle, çekirge her 0'dan geçişte bir puan toplayacak olsa, sonsuz hareketini bitirdiğinde ortalama kaç puanı olur? Bu ortalamaya beklenti denir; bu durumda da puan beklentisinden bahsediyoruz.

Çekirge, $1 - k$ olasılıkla hareketine başladıktan sonra orijine bir daha hiç geri dönmeyecektir. $k(1 - k)$ olasılıkla orijine 1 kez dönecek, fakat tekrar geri gelmeyecektir. Yine benzer şekilde $k^2(1 - k)$ olasılıkla orijine tam 2 kere geri gelecek, fakat daha sonra hiç dönmeyecektir. Genel olarak çekirgenin orijine tam n kere dönmesi olasılığı n defa k olasılığın gerçekleşmesi ve daha sonra 1 kere $1 - k$ olasılığın gerçekleşmesi anlamına gelir, dolayısıyla da bu olasılık $k^n(1 - k)$'dır. Ayrıca varsayımımız gereği 0 fi $k < 1$. Dolayısıyla n sonsuza yaklaşırken k^n ve $k^n(1 - k)$ dizileri 0'a yakınsar. Bu ise çekirgenin orijine sonsuz sayıda geri dönmesi olasılığının tam olarak 0 olduğu anlamına gelir. Yani, çekirgenin orijine dönme sayısı kesinlikle sonlu olmalıdır.

Aslında bu değerin sonlu olduğunu beklentiyi k cinsinden tam olarak hesaplayarak da gösterebiliriz. Çekirgenin orijine dönme sayısı beklentisi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} nk^n(1-k) &= (1-k)\sum_{n=1}^{\infty} nk^n \\
&= (1-k)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=i}^{\infty} k^n\right) \\
&= (1-k)\sum_{i=1}^{\infty}\left(k^i \sum_{n=i}^{\infty} k^{n-i}\right) \\
&= (1-k)\sum_{i=1}^{\infty}\left(k^i \sum_{n=0}^{\infty} k^{n}\right) \\
&= (1-k)\sum_{i=1}^{\infty}\left(k^i \frac{1}{1-k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} k^i = \frac{k}{1-k}
\end{aligned}$$

olur. Hesaplarda 0 fi $k < 1$ varsayımını kullandık.

Şimdi ise çekirgenin orijine dönme beklentisini başka bir yolla belirleyip bu değerin aslında sonsuz olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla $k \neq 1$ kabulüyle elde ettiğimiz sonlu değer ile çelişen bir sonuç bulmuş olacağız ve kanıt tamamlanmış olacak.

Çekirgenin orijine sonlu sayıda zıplayışla geri dönmüş olması için sağa ve sola doğru yaptığı zıplamaların sayısının eşit olması gerekir. Yine benzer şekilde yukarı ve aşağı yönde yaptığı sıçramalar da eşit sayıda olmalıdır. Genel durumda çekirge orijine dönmek için a defa sola, a defa sağa, b kere yukarıya ve b kere de aşağıya zıplamış olacaktır ve böylelikle orijine $2a + 2b$ hamle sonucunda dönmüş olacaktır. Bu değer ise çift olduğundan orijine dönmesinin yalnızca çift sayıda hamle ile mümkün olduğu görülür.

Şimdi orijine 2, 4, 6, …, $2n$, … hamlede dönme olasılıklarını ayrı ayrı hesaplayalım. Tüm bu olasılıklar orijine sonlu sayıda dönme olasılıklarıdır ve hepsini topladığımızda çekirgenin orijine dönme sayısı beklentisini verecektir. Bu sonsuz sayıdaki olasılıkların toplamının beklentiye eşit olduğunu görmek için beklentinin doğrusallığından yararlanabiliriz. Her n için, çekirgenin $2n$'inci hamlede orijine gitme beklentisi $2n$'inci hamlede orijine gitme olasılığına eşittir; çünkü çekirge orijine $2n$'inci hamlede ya gider ya da gitmez, yani o hamlesinde ya 0 kere gider, ya da 1 kere gider. Orijine ulaşma ihtimali p ise beklenti

$$0{\cdot}(1 - p) + 1{\cdot}p = p$$

olur. Dolayısıyla tüm bu olasılıkların toplamı tüm beklentilerin toplamına eşittir. Tüm beklentilerin toplamı ise beklentinin doğrusallığı nedeniyle, çift sayıdaki herhangi bir hamlede çekirgenin başlangıç noktasına dönme sayısı beklentisine eşit olur. O halde artık göstermemiz gereken son şey, beklentinin sonluluğuyla ilgili bir çelişki elde etmek için bu olasılıkların toplamının sonsuz olduğudur.

Genel durumda, herhangi bir n pozitif tamsayısı için, orijine tam olarak $2n$'inci hamle sonunda uğrama olasılığı $2n$ hamle sonucunda orijinde biten yolların sayısının tüm olası $2n$ hamlelik yolların sayısına bölümüne eşittir, çünkü tüm yolların olasılığı aynıdır. $2n$ hamlelik orijinde biten tüm yollarda çekirge a kere sola, a kere sağa, b kere yukarı ve b kere de aşağı herhangi bir sırada gitmiş olacağını biliyoruz. (Burada a ve b de $a + b = n$ koşulunu sağlayan herhangi iki doğal sayı.) Sağa, sola, yukarı ve aşağı hamlelerden oluşan $2n$ hamlelik her permütasyon ise farklı birer yolu belirtir. O halde, ℓ ile sola zıplayışları, r ile sağa, u ile yukarı, d ile de aşağı zıplayışları gösterirsek, $2n$'inci hamlede orijinde biten yolların sayısı a tane ℓ, a tane r, b tane u ve b tane de d harfinin kaç farklı şekilde sıralanabileceğinin sayısına eşit olur. Bu ise kombinatoriksel bir yaklaşımla bir tür tekrarlı permütasyon problemidir. Tüm harfler başlangıçta $(2n)!$ farklı şekilde sıralanır. Fakat bu haliyle, bazı harflerin birbirinin aynısı olması aynı durumların birden fazla kez sayılmasına neden olmuştur. ℓ harflerinin $a!$ şekilde birbirleriyle değiştirilmeleri mümkündür ve tüm ℓ harfleri aynı olduğundan bu $a!$ sıralamanın tamamı özdeş olmalıdır. Aynı şekilde r harfleri $a!$, u harfleri $b!$ ve d harfleri de $b!$ farklı şekilde kendi içerisinde değiştirilebilir ve yine bu durumların da farklı sayılmaması gerekir. Dolayısıyla bu $2n$ harfi toplamda

$$\frac{(2n)!}{a!\cdot a!\cdot b!\cdot b!} = \frac{(2n)!}{(a!)^2\cdot(b!)^2}$$

farklı şekilde sıralamak mümkündür. Burada a ve b'nin her ikisinin de değişken olduğunu hatırlayalım. Değişkenlerden birinden kurtulmak için

$$a + b = n$$

eşitliğinden yararlanabiliriz. Bunun için b yerine $n - a$ koyarsak ℓ, r, u ve d harflerinin toplam sıralanış sayısı

$$\frac{(2n)!}{(a!)^2\cdot((n-a)!)^2}$$

ifadesine eşit olur. a ise 0'dan n'ye kadar tüm pozitif tam sayı değerleri alabileceğinden a'yı değişken kabul eden bu şekildeki sıralamaların sayısı:

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=0}^{n} \frac{(2n)!}{a!a!(n-a)!(n-a)!}\\
&= \sum_{a=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{n!}{a!(n-a)!}\frac{n!}{a!(n-a)!}\\
&= \sum_{a=0}^{n} \binom{2n}{n}\binom{n}{a}\binom{n}{a}\\
&= \binom{2n}{n}\cdot\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\binom{n}{n-a}
\end{aligned}$$

Bu son bulduğumuz eşitlikteki

$$\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\binom{n}{n-a}$$

ifadesini de sadeleştirebilmek ve a değişkeninden tamamen kurtulmak için yine kombinatoriksel bir fikirden yararlanacağız. Bu elimizdeki ifade aslında şunu belirtir: Elimizde $2n$ farklı nesne var ve bu $2n$ nesneyi n'şer nesne içeren 2 öbeğe ayırmışız. İlk n nesneden a tanesini ve 2'nci n'lik öbekten de $n - a$ tanesini seçiyoruz. Burada a tamsayısı 0'dan n'ye kadar herhangi bir değer aldığı için yaptığımız işlem aslında $2n$ nesneden n tanesine seçme işlemine denktir. Çünkü $2n$ nesneden n tanesini seçmek için önce ilk n nesneden a tanesini, sonra da kalan n nesneden $n - a$ tanesini seçebiliriz. O halde

$$\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\binom{n}{n-a} = \binom{2n}{n}.$$

Yani, $2n$ hamlelik orijinde sonlanan yolların sayısı

$$\binom{2n}{n}\sum_{a=0}^{n}\binom{n}{a}\binom{n}{n-a} = \binom{2n}{n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2$$

sayısına eşit olur.

Şimdi de, başlangıç noktasında bitme şartı aranmadan $2n$ hamle ile yapılabilecek tüm yolların sayısına bakalım. Bunu hesaplamak daha kolay; çünkü her hamlede 4 olası hamle vardır ve her hamle bir öncekinden bağımsızdır. Dolayısıyla toplamda

$$4{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}\;\cdots\;{\cdot}4 = 4^{2n}$$

farklı yol vardır. $2n$ hamlelik yolun orijinde bitmesi olasılığı ise orijinde biten yolların sayısının tüm yolların sayısına oranı olduğundan, aradığımız olasılık tam olarak

$$\frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}$$

olur. Oldukça karmaşık gibi gözüken bir rastgele zıplama işlemi için hayli sade bir ifade elde ettik!

Artık atmamız gereken son adım tüm n değerleri için elde edilecek sonsuz çokluktaki olasılığın toplamının sonsuz olduğunu göstermek. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} = \infty$$

olduğunu kanıtlamamız yeterli.

Bu sonsuz toplamın ıraksak olduğunu göstermek için ise yine temel bir fikirden yararlanacağız. Elimizdeki sonsuz toplamın bilinen bir ıraksak seriden büyük eşit olduğunu göstereceğiz. Bunun için de yaralanacağımız seri

$$\frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Şimdi son olarak, söz verdiğimiz gibi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

olduğunu kanıtlayalım.

Burada kıyasladığımız toplamların ikisi de birer sonsuz seri olduğundan aslında göstermemiz gereken şey, yeterince büyük her k pozitif tamsayısı için

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \geq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

olduğudur.

Bunu göstermek için soldaki seriyle sağdaki serinin terimlerini tek tek birbirleriyle karşılaştıracağız. Yani her k pozitif tam sayısı için eşitsizliğin solundaki dizinin k'inci teriminin sağdaki dizinin k'inci teriminden büyük eşit olduğunu göstereceğiz. Bunu yaparsak, soldaki serinin en az sağdaki kadar hızlı arttığını, dolayısıyla da ondan küçük ya da sonlu olamayacağını kanıtlamış oluruz.

O halde artık kanıtlamamız gereken tek eşitsizlik her k pozitif tamsayısı için

$$\frac{\binom{2k}{k}^2}{4^{2k}} \geq \frac{1}{4k}$$

olduğudur. Bu eşitsizliği ise kolaylıkla k üzerine tümevarımla gösterebiliriz.

$k = 1$ için

$$\frac{\binom{2}{1}^2}{4^2} \geq \frac{1}{4}$$

eşitsizliği kanıtlanmalı ki bu da doğrudur. Tümevarımla eşitsizliği k için varsayıp $k + 1$ için kanıtlayalım; yani

$$\frac{\binom{2k}{k}^2}{4^{2k}} \geq \frac{1}{4k}$$

eşitsizliğini, yani

$[(2k)!]^2 \cdot 4k$ fl $(k!)^4 \cdot 4^{2k}$

eşitsizliğini varsayıp

$[(2k+2)!]^2 \cdot 4(k+1)$ fl $[(k+1)!]^4 \cdot 4^{2k+2}$,

yani,

$[(2k)!]^2(2k+1)^2(k+1)^2 4^2(k+1)$ fl $(k!)^4(k+1)^4 4^{2k} 4^2$

eşitsizliğini kanıtlayalım. Tümevarım varsayımından yararlanarak kanıtlamak istediğimiz eşitsizliği sadeleştirebilir ve şuna indirgeyebiliriz:

$(2k+1)^2(k+1)^2 4(k+1)$ fl $k(k+1)^4 4^2$.

Her iki tarafı da $4(k+1)^3$'e bölersek yalnızca

$(2k+1)^2$ fl $4k(k+1)$

olduğunu göstermemizin yeterli olduğunu görürüz. Son olarak ifadeleri açtığımızda

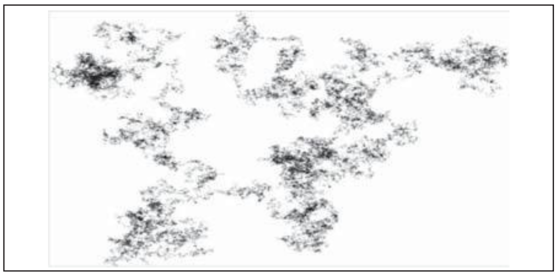
$4k^2 + 4k + 1$ fl $4k^2 + 4k$

elde ederiz ki bu da 1 fl 0 olduğundan açık bir şekilde doğrudur. Böylelikle tümevarım adımı da tamamlanmış olur.

Buraya kadar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} \geq \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = \infty$$

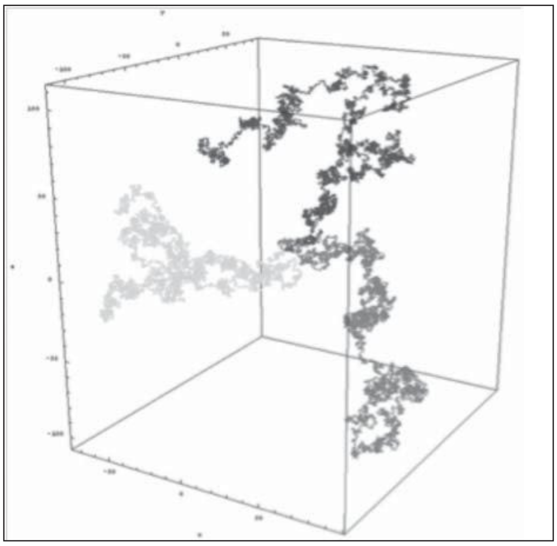
olduğunu, dolayısıyla da çekirgenin koordinat düzlemindeki rastgele zıplayış hareketi süresince orijine dönme beklentisinin sonsuz olduğunu gösterdik. Bu ise daha önceki $k \neq 1$ varsayımıyla elde ettiğimiz $k/(1 - k)$ şeklindeki sonlu beklenti ile açıkça çeliştiğinden k'nin alabileceği tek değer 1'dir.



2 milyon hamleden sonra 2 boyutta rastgele yürüyüşün bir görüntüsü. Hamle sayısı arttıkça rastgele yürüyüş işlemi fizikte Brown hareketi olarak bilinen harekete yakınsar. [4]

2’den büyük boyutlar

2 boyutlu rastgele yürüyüş problemini tanıtırken problemin daha büyük boyutlarda da, örneğin 3, 4, 5 ve 6 boyutta da incelendiğine ve ilginç bir şekilde 2’den büyük tüm boyutlarda tüm kafes noktalarına gitme olasılığının 1’den küçük olduğuna değinmiştim.



3 boyutta rastgele yürüyüş. [4]

Bunu aslında ilk defa 1921 yılında Macar matematikçi George Pólya kanıtlamış. Meraklı okur bu konuda [2]’deki bağlantıyı inceleyebilir. Biz bugünlük problemin 2 boyutlu haliyle yetindik. Ama kanıtımız boyunca hepsi gayet temel olan kombinatoriksel yaklaşımlar, beklenti hesapları, sonsuz serilerin kıyaslanması gibi pek çok önemli fikirden faydalandık ve bence rastgele yürüyüş alanına derin bir giriş yaptık.

Kaynakça:

[1] Dartmouth College, Chapter 12 - Random Walks, http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_boo k/Chapter12.pdf .

[2] Eric Weisstein, Wolfram Mathematica, Random Walk - 2 Dimensional, http://mathworld.wolfram.com/RandomWalk2-Dimensional.html .

Resimler için kaynakça:

[3] Python for Bioinformatics, Random Walk in 1D, http://telliott99.blogspot.com/2010/03/random-walk-in-1d.html.

[4] Wikipedia the Free Encylopedia, Random Walk, http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk .