Kapak Konusu: Analizden Konular III

Riemann Zeta Fonksiyonu

Tosun Terzioğlu* / *tosun@sabanciuniv.edu*

Her $s > 1$ gerçel sayısı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

serisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu serinin toplamını $\zeta(s)$ ile gösterelim. İlk olarak serinin toplamını asallar cinsinden sonsuz bir çarpım olarak yazacağız. Önce

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots$$

yazalım ve bunu ζ değerinden çıkaralım. Böylece

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots$$

elde ederiz. Sağ taraftaki terimlerin paydalarında 2^s ve bunun katları artık yok oldu. Bunu $1/3^s$ ile çarpıp bulduğumuz

$$\frac{1}{3^s}(1 - \frac{1}{2^s})\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \cdots$$

sayısını yukarıdaki ifadeden çıkarırsak

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \cdots$$

serisini elde ederiz. (Sağ tarafta sadece asalların gözrünmesi aldatıcı, sağ tarafta 2'ye ve 3'e bölünmeyen 25 de gözükecek mesela.) Böylece sağ tarafın paydalarındaki 3^s'nin katları da kayboldu. İkinci terim ise 5^{-s}. Asal sayılar dizisini $(p_k)_k$ ile gösterelim. Yaptığımız işlemi $p_1, \ldots, p_m$ için ardarda n kez tekrarlarsak

$$\zeta(s) \cdot \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \sum_{p_1 \nmid n, \ldots, p_m \nmid n} \frac{1}{n^s} \leq \zeta(s)$$

elde ederiz. Her adımda sırasıyla 2, 3, 5, 7, ..., p_n asal sayılarının s'inci kuvvetinin katlarını sağdaki serinin paydalarından eliyoruz. Sağdaki seriyi kolaylık olsun $\zeta_m(s)$ olarak gösterelim:

$$\zeta_m(s) = \sum_{p_1 \nmid n, \ldots, p_m \nmid n} \frac{1}{n^s} \leq \zeta(s)$$

Demek ki,

$$\zeta(s) \cdot \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \zeta_m(s).$$

Şimdi biraz hesap yapalım:

$$1 \leq \zeta_m(s) = \zeta(s) \cdot \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{p_k^s}{1-p_k^s}\right)}$$

olduğundan,

$$\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{p_k^s}{1-p_k^s}\right) \leq \zeta(s)$$

olur, dolayısıyla

$$0 \leq \zeta(s) - \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k{}^s}{p_k{}^s - 1} = (\zeta_m(s) - 1)\prod_{k=1}^{n} \frac{p_k{}^s}{p_k{}^s - 1}$$

elde ederiz. Buradaki çarpımların yakınsaklığını incelemek için

$$1 + a_k = \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$$

yazalım ve $\sum_k a_k$ serisinin yakınsaklığına bakalım. (Bkz. Teorem 1, sayfa 20.) Tabii

$$a_k = \frac{1}{p_k^s - 1}$$

ama k'ıncı asal sayı p_k daima k'dan büyük. Bunu kanıtlamak çok kolay. Öyleyse

$$p_k^s \geq (k+1)^s \geq k^s + 1$$

olacak. Demek ki

$$a_k = \frac{1}{p_k^s - 1} \leq \frac{1}{k^s}.$$

Bu da bize

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisinin yakınsak olduğunu verir. Böylece sayfa 20'deki Teorem 1 aracılığıyla

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1}$$

sonsuz çarpımının yakınsadığını kanıtlamış olduk.Bu çarpımın değerini kısaca b ile gösterelim. Elbette

$$0 < \prod_{k=1}^{m} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} = b$$

---

* Sabancı Üniversitesi öğretim üyesi.

olur. Bir önceki eşitsizlikten ve bundan

$$0 \le \zeta(s) - \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} \le b(\zeta_m(s) - 1)$$

eşitsizliğine varırız. Sağdaki

$$\zeta_m(s) - 1 = \frac{1}{p_{m+1}^s} + \cdots$$

seri yakınsak olduğunu bildiğimiz pozitif $\zeta(s)$ serisinin kuyruğundan bile küçük, demek ki 0'a yakınsar. Dolayısıyla verilen bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulabiliriz ki, her $n \ge n_0$ için

$$\sum_{m=p_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{m^s} < \frac{\varepsilon}{b}$$

sağlanır. Demek ki her $n \ge n_0$ için

$$0 \le \zeta(s) - \prod_{k=1}^{n} \frac{p_k^s}{p_k^s - 1} < \varepsilon$$

doğru. Kanıtladığımızı yazalım.

Teorem 1. $s > 1$ *ise*

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}$$

olur. □

Zeta fonksiyonu için ***Euler çarpım formülü*** adı verilen bu sonuç birçok bakımdan ilginç. Burada bir serinin toplamı sonsuz çarpım olarak yazılıyor. Seride her tamsayı yer alırken sonsuz çarpımda ise sadece asal sayılar gözüküyor. Çarpımdaki her terim

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_k^s}\right)^i$$

olarak bir geometrik serinin toplamıdır.

Aslında

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

serisi gerçel kısmı 1'den büyük her s karmaşık sayısı için de yakınsak. ***Riemann zeta fonksiyonu*** adı verilen bu fonksiyon $\{s: \text{Re } s > 1\}$ olarak ifade edilen açık yarı düzlemde yukarıdaki gibi tanımlanır. 1859 yılında bu tanımdan yola çıkarak Riemann, analitik genişletme yöntemiyle zeta fonksiyonunu tüm $\{s \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$ kümesinde tanımlamayı başardı. Bu genişletilmiş tanımdan hareketle

$$\lim_{s\to 1} (s-1)\,\zeta(s) = 1$$

olduğunu görebiliriz. Böylece Riemann zeta fonksiyonu karmaşık düzlemde tanımlı bir meromorfik fonksiyon olur. Bu fonksiyon $s = 1$ dışında analitiktir ve $s = 1$ değerinde kalanı 1'e eşit olan basit bir kutbu vardır.

Riemann ayrıca zeta fonksiyonunun

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s)/(2)\, \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s)$$

özdeşliğini sağladığını kanıtlayarak, fonksiyonun s ve $1 - s$ değerleri arasındaki ilişkiyi buldu. Buradaki ***gama fonksiyonu***

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

olarak karmaşık düzlemde Re $z > 0$ bölgesinden tanımlanır. Bir önceki yazıda $j \in \mathbb{N}$ için

$$\int_0^{\infty} t^j e^{-t}\, dt = j! = \Gamma(j+1)$$

sonucunu kanıtlamış ve kullanmıştık. Dolayısıyla gama fonksiyonu bir anlamda faktöryel fonksiyonunun bir genişletilmesi. Riemann'ın bu sonucundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\zeta(-2n) = 0$$

olduğunu hemen görebiliriz, çünkü

$$\sin(-n\pi) = 0.$$

Negatif çift sayılara zeta fonksiyonunun aşikâr kökleri veya sıfırları denir. Zeta fonksiyonunun diğer kökleri ise ***Riemann hipotezinin*** konusudur. Bu hipoteze göre zeta fonksiyonunun aşikâr olmayan sıfırları karmaşık düzlemde mutlaka

$$\text{Re } s = 1/2$$

doğrusu üzerindedir. Riemann hipotezi belki de tüm zamanların çözülememiş en önemli matematik problemidir ve 2000 yılında **milenyum problemleri** diye adlandırılan listenin içinde yer almıştır.

Riemann zeta fonksiyonunun matematikte analitik sayılar teorisinde, olasılık teorisinde, istatistikte ve fizikte önemli uygulamaları vardır. Bu fonksiyonun kökleri ile asal sayıların dağılımı arasındaki derin ilişkilere burada daha fazla değinme imkanımız yok. Bu genel bilgilerden sonra zeta fonksiyonunun çift sayılardaki değerlerine eğilelim.

İlk olarak zeta fonksiyonunun $s = 2$ için değerini bulalım. Bu iş için bir bölge üzerindeki belirli bir fonksiyonun çift katlı integralini iki farklı yöntemle hesaplayacağız. Bu ilginç ve şık yöntemi ilk olarak kimin kullandığını bilmiyoruz. Bölgemiz

$$B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\},$$

yani bir kare. Şimdi

$$I = \iint_B \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy$$

integralini hesaplamak için ilkin $0 < xy < 1$ olduğunu varsayarak

$$\frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n$$

yazalım. O zaman serinin her teriminin integralini alıp, toplarsak

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta \quad (2)$$

sonucuna varırız. Burada aslında B bölgemizden önce $(1, 1)$ noktasını attık, integrali

$$B_r = \{(x, y) : 0 \le x \le r,\ 0 \le y \le r\}$$

bölgesinde aldık $(0 < r < 1)$ ve sonunda r alttan 1'e yaklaşırken limiti hesapladık. Şimdi integralimizde değişkenleri şu şekilde değiştireceğiz:

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}$$

Yeni değişkenlere göre integrali hesaplamak için önce

$$g(x,y) = \frac{1}{1-xy}$$

fonksiyonunun yerine

$$h(u,v) = \frac{1}{1-u^2+v^2}$$

fonksiyonunu koyacağız. B bölgesi $x = 0$, $x = 1$ ve $y = 0$, $y = 1$ doğruları arasında kalan sınırlı bölge. $(x, y) \mapsto (u, v)$ dönüşümü altında

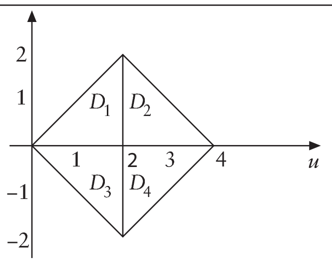
$x = 0$ doğrusu $u = v$ doğrusuna,

$x = 1$ doğrusu $u = v + 1$ doğrusuna,

$y = 0$ doğrusu $u = -v$ doğrusuna

$y = 1$ doğrusu da $u = -v + 1$ doğrusuna

dönüşür. uv-düzleminde bu doğrular arasında kalan bölgeyi D ile gösterelim.



Yeni bölge

Artık integralimizi yeni değişkenlere göre yazarsak

$$I = \iint_D h(u,v) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$$

sonucuna varırız. Buradaki Jakobyen determinantı ise

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Yeni değişkenlerimize göre h fonksiyonu u eksenine göre simetrik, yani $h(u, v) = h(-u, v)$. Böylece D bölgesini şekilde olduğu gibi D_1, D_2, D_3 ve D_4 bölgelerine ayırırsak

$$I = 2 \iint_{D_1} h(u,v) 2\, du dv + 2 \iint_{D_3} h(u,v) 2\, du dv$$

sonucuna varırız. İlk olarak D_1 üzerindeki integrale bir bakalım. Bu integrali

$$I_1 = \iint_{D_1} h(u,v) du dv = \int_0^{1/2} \left(\int_0^v \frac{dv}{1-u^2+v^2} \right) du$$

olarak iki katlı integral şeklinde yazalım. Şimdi

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

formülünü kullanarak

$$I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du$$

sonucuna varırız. Bu aşamada bir an düşünüp,

$$f(u) = \arctan \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$$

fonksiyonunun türevini alarak

$$f'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

olduğunu görelim. Böylece ilk integralimizi kolayca hesaplayarak

$$I_1 = \int_0^{1/2} f(u) f'(u) du = \frac{1}{2} f(u)^2 \Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$$

sonucuna ulaşırız. D_3 bölgesi üzerinde ise

$$I_3 = \int_{D_3}\int h(u,v) du dv = \int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} \frac{dv}{1-u^2+v^2} du$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}} du$$

sonucunu benzer şekilde elde ederiz. Bu kez

$$f(u) = \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$$

olsun. Bu takdirde

$$f'(u) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

olur. Demek ki

$$I_3 = -2\int_{1/2}^{1} f(u)f'(u)du = -f(u)^2\Big|_{1/2}^{1} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{36}.$$

Böylece

$$\zeta(2) = I = 4I_1 + 4I_3 = 4\frac{\pi^2}{72} + 4\frac{\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{6}$$

sonucuna ulaştık.

$\zeta(2)$ değerini verdiğimiz yöntemden daha da basit, bambaşka bir yolla hesaplayabiliriz. Şimdi ilkin tek ve çift sayılarla

$$\zeta(2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$$

şeklinde yazalım. Öyleyse

$$\zeta(2) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4}\zeta(2).$$

Demek ki

$$\zeta(2) = \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}. \qquad (1)$$

Kısacası $\zeta(2)$'yi veren serinin toplamını sadece tek sayılar üzerinden bulmak yeterli olacak. Bu gözlemden sonra bir de iyi bildiğimiz

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

sonucundan yola çıkarak, sırasıyla,

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n} = x,$$

$$\lim_{n\to\infty} 4^n \sin^2\frac{x}{2^n} = x^2$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\frac{x}{2^n}} = \frac{1}{x^2}$$

limitlerine varalım. Burada x yerine $(2k+1)\pi/2$ koyalım ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4^n\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}} = \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

olduğunu görelim.

İşte trigonometrik fonksiyonları kullanarak $\zeta(2)$ değeri bulma umudu buradan doğuyor!

Önce $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ özdeşliğini kullanarak

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right]$$

elde edip,

$$\cos^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{\pi+x}{2}$$

özdeşliğini kullanır ve burada $x = \pi/2$ alırsak

$$1 = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right]$$

sonucuna ulaşırız. Yaptığımızı $x = \pi/4$ ve $x = 3\pi/4$ için tekrarlarsak, sırasıyla,

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{8}}\right]$$

ve

$$\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{8}}\right]$$

buluruz. Bunları toplayarak ilk ettiğimiz eşitlik,

$$1 = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{8}} + \frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{8}}\right]$$

haline bürünür. Bu yöntemi n kez tekrarlayarak

$$1 = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

sonucuna varalım. Bir önceki eşitliği bir gözden geçirelim. Burada

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \sin^2\frac{7\pi}{8} \text{ ve } \sin^2\frac{3\pi}{8} = \sin^2\frac{5\pi}{8}$$

çünkü $\sin a = \sin(\pi - a)$ olduğunu biliyoruz. Bu gözlemimizi yukarıdaki toplama uygularsak

$$1 = \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

elde ederiz. Kolaylık olsun diye

$$x_{n,k} = \frac{\pi(2k+1)}{2^{n+1}}$$

tanımını yapalım. O zaman yukardaki eşitlik

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{4^n\sin^2 x_{n,k}} \qquad (2)$$

Şimdi n sonsuza giderken bu ifadenin limitini alacağız ve

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{4^n\sin^2 x_{n,k}} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \qquad (3)$$

bulacağız. Solda toplanan terimlerin limitinin

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

olduğunu zaten biliyoruz; ama limit alırken karşımıza bir de terim sayısı n ile değişen bir toplam çıkıyor. O nedenle dikkatli olmamız gerekir.

Önce kolay bir sav kanıtlayalım:

Sav.

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Kanıt: $\lim_{x\to 0} x/\sin x = 1$ olduğundan,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli. $x \geq 0$ iken

$$f(x) = x - \sin x - x^3/3!$$

tanımını yapalım. O zaman,

$$f'(x) = 1 - \cos x - x^2/2$$

ve

$$f''(x) = \sin x - x$$

olur. $f''(x) \leq 0$ olduğundan, f' azalır. $f'(0) = 0$ olduğundan, $f'(0) \leq 0$ olur. Demek ki f de azalır. $f(0) = 0$ olduğundan, $f(x) \leq 0$ yani,

$$x - \sin x \leq x^3/3!$$

olur. Buradan, x, 0'a sağdan yakınsarken

$$0 \leq \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \leq \frac{x^3/6}{x \sin x} = \frac{x}{6}\frac{x}{\sin x} \to 0$$

buluruz. Demek ki x, 0'a sağdan yakınsarken

$$x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) \to 0$$

Aynı şey x yerine $-x$ koyarsak doğru olduğundan istediğimizi kanıtlamış oluruz. □

Şimdi bu savda x yerine $x_{n,k}$ koyup n'yi sonsuza götürürsek ve sadeleştirmeleri yaparsak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sin^2 x_{n,k}^2} - \frac{1}{x_{n,k}^2}\right) = 0$$

elde ederiz. Demek ki $\varepsilon > 0$ verilmişse, öyle bir n_0 vardır ki eğer $n > n_0$ ise

$$0 \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\sin^2 x_{n,k}^2} - \frac{1}{x_{n,k}^2}\right) < \varepsilon,$$

yani (ikinci $x_{n,k}$ yerine değerini koyarak ve gereken düzenlemeleri yaparak),

$$0 \leq \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}^2} - \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (4)$$

olur.

Ayrıca

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

serisi yakınsak olduğundan, öyle bir n_1 vardır ki, eğer $n > n_1$ ise

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=2^{n-1}}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

olur.

Şimdi $n > \max\{n_0, n_1\}$ alalım ve (4) ve (5) eşitliğini kullanarak (3) limitini gösterelim.

$$\left|\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}^2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left|\frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}^2} - \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}\right| + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=2^{n-1}}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\leq 2^{n-1}\frac{\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ve istediğimizi elde ederiz.

Buradan (2) sayesinde

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{4^n \sin^2 x_{n,k}}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

ve (1) sayesinde, nihayet,

$$\zeta(2) = \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

elde ederiz.

Zeta fonksiyonun asal sayılarla olan ilişkisini Euler çarpım teoreminde görmüştük ama bu fonksiyonun 2'deki değerinde birden karşımıza π sayısı çıktı. Bu bir rastlantı değil. Şimdi amacımız her $k \in \mathbb{N}$ için $\zeta(2k)$ değerini hesaplamak. Burada hem π^{2k} sayısı hem de Bernoulli sayılarıyla karşılaşacağız.

Önce karmaşık sayılar kullanarak

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ ve } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

yazalım. O zaman

$$x \cot x = x\frac{\cos x}{\sin x} = ix\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}$$

buluruz. Sağ tarafta ix yerine $z/2$ yazarak

$$= z\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z-1}$$

elde ederiz. İkinci terim tanıdık, çünkü Bernoulli sayılarının tanımını hatırlarsak (sayfa 35)

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

sonucuna varırız. Bernoulli sayıları hakkında bildiklerimizi hatırlayalım. $B_1 = -1/2$ ve diğer her tek sayı n için $B_n = 0$. Öyleyse z yerine $2ix$ koyarsak

$$x\cot x = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}\frac{(2ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

sonucunu buluruz. Yukarıda kuvvet serisi açılımını Bernoulli sayıları cinsinden yazdığımız x cot x fonksiyonu, Euler 1755 yılında farklı bir açılımı bulmuş ve

$$x\cot x = 1 - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\pi n}\right)^2}$$

olarak yazmış. Geometrik seri açılımı bize

$$\frac{x^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1-\left(\frac{x}{\pi n}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^{2k}$$

verir. Öyleyse

$$\begin{aligned} x\cot x &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\pi n}\right)^{2k} \\ &= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{2k}\right) x^{2k} \end{aligned}$$

sonucuna vardık. Bu açılımda x^{2k}'nın katsayısı

$$-\frac{2}{\pi^k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{2k} = -\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k).$$

Öyleyse

$$-\frac{2}{\pi^{2k}} \zeta(2k) = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Yaptıklarımızı bir teorem olarak yazalım.

Teorem 11.2. *Her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \pi^{2k}$$

olur. □

Bernoulli sayılarının ilk birkaçını hesaplamıştık daha önce.

$$B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30}, \ldots$$

Böylece teoremimiz bize

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{x^6}{945},\ \zeta(8) = \frac{x^8}{9450}$$

verir. Bu olağanüstü güzel sonuç zeta fonksiyonunun çift sayılardaki değerlerini π ve Bernoulli sayıları cinsinden vermekte. Eğer B_{100} sayısını biliyorsak ζ(100) değerine hesaplamak çok kolay.

Oysa tek sayılar için ζ(2k + 1) hakkında çok az şey biliyoruz. Apery 1979 yılında ζ(3) sayısının irrasyonel olduğunu kanıtladı. Tüm ζ(2k + 1) sayılarının irrasyonel olduğu sanılmakta. Ama bu da açık bir problem. ♠

Kaynaklar

[1] Martin Aigner ve Günter M. Ziegler, *Kitap'tan Deliller*, (çev. M. Uludağ) İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları 2009.

[2] T-L. T. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu, *Problems in real analysis: advanced calculus on the real axis*, Springer Verlag 2009.