

## Turán Teoremi

Bir çizge, içinde noktalardan (köşerlerden) ve bu noktalardan bazılarının arasında kenarlardan (bağıntılardan) oluşan bir yapıdır. Bir örnek aşağıda.



Yukardaki örnekte 10 nokta ve 11 kenar vardır. Çeşit çeşit çizge vardır ama bizim çizge tanımımıza göre bir nokta kendisiyle bağıntılı olamaz ve herhangi iki nokta arasında 1'den fazla kenarlar kesişmeyecek biçimde düzleme çizilemez. Örneğin dört noktadan oluşan ve her noktanın her noktayla bağıntılı olduğu çizge düzleme çizilebilir ama 6 noktanın üçünün diğer tüm üç noktaya bağıntılı olduğu bir çizge düzleme çizilemez.

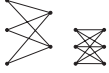


Düzlemel bir çizge



Düzlemel olmayan bir çizge

Kenar sayısı arttıkça çizge düzleme çizilemez olur. Kenar sayısı arttıkça başka şeyler de olur, mesela çizgede üçgenler oluşmak zorunda kalır. Örneğin 4 noktamız varsa ve toplamda 5 kenar istiyorsak, çizgede mutlaka bir üçgen (yani birbirleriyle bağıntılı olan üç nokta) olmak zorundadır. Eğer 5 nokta varsa 6 kenarı olan üçgensiz bir çizge vardır (aşağıda) ama 7 kenarı olan üçgensiz bir çizge yoktur. Eğer nokta sayısı 6 ise, toplam 9 kenarı olan üçgensiz bir çizge vardır da toplam 10 kenarı olan üçgensiz bir çizge yoktur.



Mesut Babıtyar, Mutlu Berbudar, Saadet Ongun

Turán teoremi olarak adlandırılan teorem,  $n$  noktali bir çizgenin  $n^2/4$ 'ten fazla kenarı varsa, çizgede mutlaka bir üçgen oluşacağını söylüyor. Bu yazının amacı bu teoremi kanıtlamak.

Kanıtı başlıyoruz. İçinde üçgen olmayan ve kenar sayısının en büyük olduğu  $n$  noktali bir çizge alalım.

Noktalar arasında yeni bir ilişki tanımlıyoruz: Eğer iki nokta arasında bağıntı (kenar) yoksa, noktalara "ilişkili" diyelim.

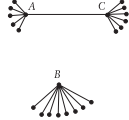
Elbette her nokta kendisiyle ilişkilidir.

Ayrıca eğer  $A$  noktası  $B$  noktasıyla ilişkilirse,  $B$  noktası da  $A$  noktasıyla ilişkilidir.

Bu ilişki genelde geçişli olmak zorunda değildir, yani  $A$  noktası  $B$  noktasıyla ve  $B$  noktası  $C$  noktasıyla ilişkilirse (yani bağıntılı değillerse),  $A$  noktası  $C$  noktasıyla ilişki olmayabilir (yani bağıntılı olabirler). Örneğin aşağıdaki çizgede bu böyledir.



Öte yandan bizim özel durumumuzda geçişlilik geçerlidir, çünkü içinde üçgen olmayan maksimum sayıda kenarı olan bir çizgeyle çalışıyoruz. Nitekim diyelim  $A$  ile  $B$  ve  $B$  ile  $C$  bağıntısız ama  $A$  ile  $C$  bağıntılı, yani diyelim aşağıdaki gibi bir çizge durum söz konusu.



Yukardaki şekilde  $A$ ,  $B$  ve  $C$  noktalarını ve bu noktaların bağıntılı olduğu noktaları gösterdik.

$A$  ile  $C$  bağıntılı olduğundan ve çizimizde üçgen olmadığından,  $A$ 'nın bağıntılı olduğu hiçbir nokta  $C$ 'nin bağıntılı olduğu bir noktaya bağıntılı olmaz. Öte yandan  $A$  ile  $B$ 'nin ya da  $C$  ile  $B$ 'nin bağıntılı olduğu ortak noktalar olabilir.

$A$ 'nın bağıntılı olduğu nokta sayısına  $a$  diyelim.  $b$  ve  $c$  sayılarını da benzer şekilde tanımlayalım.

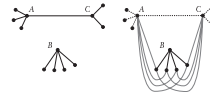
İki durum var: Ya  $b$  sayısı  $a$  ve  $c$  sayılardan birinden küçüktür ya da her ikisinden de büyüktür.

Birinci durumu ele alalım. Diyelim  $b < a$ . Aşağıdaki şekilde izleyin. Bu durumda,  $B$  noktasının tüm bağıntılarını silelim ve  $A$  noktasının bağıntılı olduğu her noktayı  $B$  noktasına bağlayalım. Aşağıda sağdaki çizgeyi elde ederiz. Bu şekilde, sildiğimiz bağıntıları noktalı, eklediğimiz bağıntıları gri yaptık. Elde ettiğimiz yeni çizgede nokta sayısı değişmedi, hâlâ daha  $n$ . Ama kenar sayısı  $a - b$  arttı. Ve yeni çizgede hâlâ daha üçgen yok çünkü olası  $A$  ve  $B$  noktaları bağıntılı değil. Böylece birinci durumda bir ilişki ettik.



İkinci durumu ele alalım:  $b \geq a$  ve  $b \geq c$ . Aşağıdaki şekilde izleyin. Bu durumda  $A$  ve  $C$  noktalarının bağıntılarını silelim ve  $A$  ve  $C$  noktalarını  $B$ 'nin bağıntılı olduğu noktalara bağlayalım. Nokta sayısı gene değişmedi. Kenar sayısına bakalım.  $A$  ve  $C$  noktalarının toplam  $a + c - 1$  tane olan bağıntılarını sildik ve yerine  $2b$  tane bağıntı ekledik. Demek ki kenar sayısındaki artış

$2b - (a + c - 1) = 1 + (b - a) + (b - c) \geq 1 > 0$ . Kenar sayımız artmış. Elde ettiğimiz çizgede hâlâ daha üçgen yok. İkinci durumda da bir ilişki ettik.



Demek ki tanımladığımız ilişki bir denklik ilişkisiymiş. Denklik sınıflarını ele alalım. Aynı denklik sınıfındaki noktalar birbirleriyle bağıntılı olmazlar ama diğer tüm noktalara bağıntılılar. Çizgede üçgen olmadığından en fazla iki sınıf olabilir. (Bkz. aşağıdaki şekil.) Hatta  $n \geq 3$  ise tam tamına iki sınıf olmalı. Bundan da bu çizgenin "iki parçalı bir tamçizge" olduğu ortaya çıkar, yani çizgede iki (ayrık) nokta kümesi vardır ve bir kümedeki noktalar arasında hiç bağıntı yoktur ama bir kümedeki her nokta diğer noktadaki tüm noktalara bağıntılıdır.



Eğer kümelerdeki nokta sayısına  $a$  ve  $b$  dersek (eski  $a$  ve  $b$ 'yi unutun),

$$a + b = n$$

ve çizgedeki bağıntı sayısı

$$ab = a(n - a)$$

olur. Bu sayının maksimal olması için ise  $a$  (dolayısıyla  $b$  de) aşağı yukarı  $n$ 'nin yarısı olmalıdır; Bir başka deyişle

$$|a - b| \leq 1,$$

yani eğer  $n$  çiftse

$$a = b = n/2,$$

eğer  $n$  tekse

$$a = \frac{n+1}{2}, b = \frac{n-1}{2}$$

olur. Kolayca görüleceği üzere, her iki durumda da  $ab$  sayısı, yani ilişki sayısı  $n^2/4$ 'ün tam kısmına eşittir.

Ve böylece Turán teoremini üçgenler için kanıtlamış olduk.

**Teorem.** İçinde üçgen olmayan  $n$  noktali bir çizgenin kenar sayısı en fazla  $n^2/4$  olabilir.  $\square$

Aynı yöntemle aşağıdaki teorem de kanıtlanabilir:

**Teorem.** İçinde  $r + 1$  noktali bir tamçizge barındırmayan  $n$  noktali bir çizgenin en fazla

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2}$$

tane kenarı olabilir.  $\spadesuit$