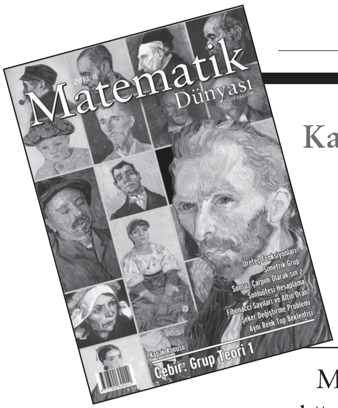

Kapak Konusu: Cebir: Grup Teori I

Cebire Başlarken

Matematiğin amacı içinde yaşadığımız evreni anlamaktır. Gözle görülen evren de büyük ölçüde geometriyle anlaşılır. Öklid geometrisi önemlidir, olmazsa olmaz, ama yeterli değildir. Öklid geometrisinden ötesini anlamak için analiz gerekir.

MD'de 2007'nin üçüncü sayısından itibaren kapak konularında analiz işledik. Ve bunu birçok kitapta yapıldığı gibi sezgisel olarak değil, aksiyomatik olarak işledik. Bu sayıdan itibaren cebire başlıyoruz.

"Evreni anlama macerasında cebirin yeri neredədir?" gibi temel bir soruyla başlayalım.

Analiz sayılarla yapılır. Sayılarda ise toplama, çıkarma, çarpma, bölme gibi işlemler vardır. İşte cebirin başlangıcı bu işlemlerdir.

Görüldüğü üzere cebirin temel malzemesi sayı gibi sıfatlar ve elbette zorunlu olarak aralarındaki ilişkiler.

Çeşitli cebirsel yapılardan örnekler verelim:

$$(\mathbb{Z}, +, \times), (Q, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times).$$

Bu yapılara "halka" adı verilir ve halkalar matematikte büyük ölçüde sıfat kümesi görevini görürler. Yani halkaların her elemanı bir sıfat olarak addedilebilir. Okurun muhtemelen daha önce gördüğü

$$(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}, +, \times)$$

modüler sayılar yapısı da bir halkadır.

$$(\mathbb{Q}, +, \times) \text{ ve } (\mathbb{R}, +, \times)$$

halkalarına özel bir ad verilir, bunlara "cisim" denir. Eğer p bir asalsa,

$$(\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}, +, \times)$$

yapısı da bir cisimdir. Cisimler özel halkalardır. Dolayısıyla, adı sizi yanıltmasın, cisimlerin elemanları da sıfat görevi görürler.

Cebir sayılarla başlar, ama sayılarla bitmez. Cebir sadece sıfatlardan oluşmaz. Ne de olsa sıfatın olduğu yerde sıfatın nitelediği nesneler de olmalıdır. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ gibi birkaç boyutlu uzaylar geometrinin ve cebirin temel nesnelerini içeren kümelerdir. Bunlara "vektör uzayı" denir.

$\mathbb{Z}^2$ ve $\mathbb{Z}^3$ yapıları vektör uzayı değildirler ama vektör uzaylarına çok benzerler ve cebirde çok önemlidirler. Bunlara "modül" adı verilir. Modülleri cebirin nesneleri olarak algılayabiliriz. Modern cebiri modülleri çalışan uğraş dalı olarak tanımlamak çok yanlış olmaz.

Özetle, modüller ve vektör uzayları nesneler içerir, halkalar ve cisimler ise sıfat.

Bazı yapılar hem modül hem de halkadırlar. Bu tür yapılara "cebir" adı verilir. Örneğin matrisler kümesi bir cebir oluşturur. Yani bir matris aynı anda hem nesne hem sıfat olabilirler.

Modüller, vektör uzayları, halkalar, cisimler ve cebirler dışında cebirde çok önemli bir yapı daha vardır: Gruplar.

Nasıl fiziksel dünyada nesneler değişime uğruyorsa, cebirde de nesneler değişime uğrarlar. Uzayı döndürebiliriz, öteleyebiliriz, uzatıp kısaltabiliriz. Neseleri değişime uğratan güçler de grup adı verilen yapıları oluştururlar.

Gruplar soyut cebirin, ele avuca sığan, hesaba kitaba gelen, insanı karşısında çaresiz bırakmayan olabilecek en yalın ve en doğal yapılardır. Bu söylediklerime anlam kazandırmak için şöyle bir örnek vereyim: Diyelim bir X kümesi var. Bu küme hakkında ne söyleyebiliriz? Ne söyleyebiliriz ki? Sadece bir küme hakkında ne söylenebilir ki? Söylenecek fazla bir şey yok. Bu küme üzerine bir de ayrıca

$$f\colon X \times X \to X$$

fonksiyonu verilmiş olsun. Şimdi bu küme ve fonksiyon üzerine ne söyleyebiliriz? Gene söylenecek fazla bir şey bulamayız. Ama diyelim bu fonksiyon, her $x, y, z \in X$ için

$$f(x, f(y, z)) = f(f(z, x), y)$$

gibi bir eşitliği sağlıyor. Konu biraz daha ilginçleşti. Bir de ayrıca mesela

$$f(f(x, y), f(y, z)) = f(x, z)$$

gibi bir eşitlik sağlıyorsa, söyleyecek çok daha fazla şeyimiz olabilir.

Yukardaki örnek yapaydı ve sanırım pek ilginç değildi. Gruplar ise çok daha doğal, uygulamada yararlı ve ilginç yapılardır. Matematiğin en temel kavramlarından biridir. Her yerde karşımıza çıkarlar.

Her ne kadar grupların ele avuca sığan, hesaba kitaba gelen, insanı karşısında çaresiz bırakmayan olabilecek en yalın ve en doğal yapılar olduğunu söylediysek de, bundan grupların anlaşılması çok kolay yapılar olduğu sanılmasın. Tam tersine, grup teori oldukça zor bir konudur. Cebirin diğer önemli kavramları olan halka, cisim, modül, vektör uzayı, cebir gibi yapılardan daha soyut ve daha zordur.

Modülleri ve vektör uzaylarını yeryüzündeki toz parçacıkları kümesine, halka ve cisimleri de bu toz parçacıklarını niteleyen sıfat kümelerine (örneğin sayı kümelerine) benzetirsek, grupları da bu tozları hareket ettiren rüzgar filan gibi kuvvet kümelerine benzetmek lazım.

Kuvveti gözle görmek daha zor olduğu için, grup teori daha soyuttur. Örneğin bir kürenin resmi çizilebilir, fotoğrafı çekilebilir ama bir grup için aynı şeyi yapamayız. (Ama biz gene de grupların soyut düzeyde de olsa resimlerini yapacağız.)

Bu toz, sıfat ve kuvvet benzetmesini ciddiye alırsak, pedagojik olarak cebir çalışmaya modüllerden ve vektör uzaylarından, o da olmadı halkalardan başlamak lazım. Cebir yazarları tarafından pek rağbet görmese de ve teknik olarak mümkün olmasa da bunun çok yanlış bir bakış açısı olduğunu sanmıyorum. Kısa bir grup teoriye girişten sonra halkalara ve cisimlere, ardından cebirin asıl alanı olan modüllere ve vektör uzaylarına yöneleceğiz. Grup teoriyi de - olabildiğince - etkilediği nesnelerle (yani analojimizde tozlarla) birlikte göreceğiz.

Okuyacağınız cebir notları cebire yeni başlayanlar için yazılmıştır ama notlar belli bir matematiksel olgunluk gerektiriyor. Yazılanı hemen anlamayan okur paniğe kapılmadan devam etsin, muhtemelen daha sonra birkaç sayfa önce söyleneni çok daha iyi anlayacaktır ve hatta neden daha önce anlamadığına şaşıracaktır. En azından böyle olacağını umuyorum.

Hepimize kolay gelsin. ♥