Kombinasyon Hesapları

Üreteç Fonksiyonlarıyla Dizi Formülü Bulmak

Muasır Medeniyet

Örnek 1. Yanıtını önceden tahmin edebileceğimiz bir soruyla başlayalım yazıya. $a_0 = 0$ olsun ve $n \geq 0$ için,

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \qquad (1)$$

tanımını yapalım. Bu tanım her n doğal sayısı için a_n'yi belirler:

$$a_1 = a_{0+1} = 2a_0 + 1 = 2\times 0 + 1 = 1,$$
$$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 + 1 = 2\times 1 + 1 = 3,$$
$$a_3 = a_{2+1} = 2a_2 + 1 = 2\times 3 + 1 = 7,$$
$$a_4 = a_{3+1} = 2a_3 + 1 = 2\times 7 + 1 = 15.$$

Her seferinde, bir önceki terimi 2'yle çarpıp 1 ekliyoruz. İlk terimi ($a_0 = 0$) bildiğimiz için tüm a_n terimlerini bu yöntemle bulabiliriz. Sonraki terimler 31, 63, 127 olacak. Ama a_{1000} sayısını bulmak için bu işlemi 999 defa yapmalıyız... Bu yüzden a_n sayısını veren kapalı bir formül tercih edilir. Bu örnekte kapalı formülü bulmak zor değil. Yukarıda hesaplanan terimlere 1 eklersek neyin ne olduğu hemen anlaşılıyor:

$$a_0 + 1 = 0 + 1 = 1 = 2^0,$$
$$a_1 + 1 = 1 + 1 = 2 = 2^1,$$
$$a_2 + 1 = 3 + 1 = 4 = 2^2,$$
$$a_3 + 1 = 7 + 1 = 8 = 2^3,$$
$$a_4 + 1 = 15 + 1 = 16 = 2^4.$$

Demek ki, $a_n + 1 = 2^n$ ve

$$a_n = 2^n - 1$$

Bu sadece bir tahmin tabii ki. (Hem de çok güçlü bir tahmin.) Bu tahmini tümevarımla kanıtlamak gerekiyor, ki bu da çok zor bir uğraş değildir. Bu yazıda bu ve bunun gibi diziler için bir formül bulmanın bir başka yolunu bulacağız.

(1) formülünün taraflarını x^n ile çarpıp her iki tarafı tüm n doğal sayıları için toplayalım:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n + 1)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n.\end{aligned}$$

Bu aşamada,

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + 3x^2 + 7x^3 + \cdots$$

tanımını yapalım. Bu sonsuz toplamı gerçel sayılarda anlamı olan bir seri olarak değil de, "terim sayısı sonsuz olan bir polinom" olarak görün. Yani anlamı olmayan formel (biçimsel) bir nesne. Polinomlarda terim sayısı sonlu olmak zorunda olduğundan bunlara polinom değil, ***kuvvet serileri*** adı verilir. Kuvvet serilerini de aynen polinomlar gibi toplayıp çarpabiliriz, hatta bazen bir kuvvet serisini bir başka kuvvet serisine bölebiliriz. Kuvvet serilerini geçmişte MD'de konu etmiştik [MD-2004-II, sayfa 32-38].

Bu tanımdan sonra biraz önce bulduğumuz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

eşitliğinin sol ve sağ taraflarını $A(x)$ cinsinden ayrı ayrı hesaplayalım.

Önce sol taraf. Sol tarafı x ile çarparsak, neredeyse $A(x)$'i elde ederiz, sedece $A(x)$'in ilk terimi olan a_0 eksik kalır, ama a_0 zaten 0'a eşit. Demek ki,

$$x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = A(x)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = \frac{A(x)}{x}.$$

Sol tarafı bulduk. Şimdi sıra sağ tarafta. Sağ tarafta iki kuvvet serisi var. Birincisinin ne olduğu belli: $2A(x)$'e eşit. İkincisi ise $1/(1-x)$. Nitekim $\sum_n x^n$ serisini $1 - x$ ile çarparsak, bütün x'ler sadeleşir ve geriye sadece 1 kalır. Bu dediğimiz, polinomlarda doğruluğunu bildiğimiz

$$(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$$

eşitliğinin bir sonucudur. Sonuç olarak,

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}.$$

eşitliğini buluruz. Buradan da

$$A(x) = 2xA(x) + \frac{x}{1-x}.$$

ve

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

çıkar. Şimdi öyle a ve b sayıları bulalım ki,

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$$

olsun. a ve b'yi bulmanın bin türlü yöntemi vardır; işte bunlardan biri: Eşitliği $1 - x$ ile çarpıp $x = 1$ alırsak, $a = -1$ buluruz. Aynı eşitliği $1 - 2x$ ile çarpıp $x = 1/2$ alırsak, $b = 2$ buluruz. Demek ki, a ve b varsa, ancak $a = -1$, $b = 2$ olmalı. Nitekim bu değerlerle yukarıdaki eşitliğin sağlanacağını kontrol etmek hiç zor değil. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

olur. Bu aşamada

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ ve } \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1)x^n\end{aligned}$$

buluruz. Biraz önce $A(x)$ için bulduğumuz formülden,

$$\begin{aligned}A(x) &= \frac{x}{(1-x)(1-2x)}\\ &= x\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1)x^{n+1}\end{aligned}$$

çıkar. Şimdi $A(x)$ için iki eşitliğimiz var, biri tanımdaki, diğeri üst satırdaki:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1}-1)x^{n+1}.$$

Katsayılar eşit olmak zorunda olduğundan (çünkü bunlar **formal** kuvvet serileri),

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

elde ederiz, en başta tahmin ettiğimiz gibi...

Umarım yöntem hoşunuza gitmiştir. Doğrusu bu kolay bir soruydu ve cevabı önceden tahmin etmiştik. Şimdi aynı yöntemle önceden tahmin etmesi daha zor bir soruyu çözelim.

Örnek 2. Bu sefer $a_0 = 1$ olsun ve $n \geq 0$ için,

$$a_{n+1} = 2a_n + n \qquad (2)$$

tanımını yapalım. Bu tanım her n doğal sayısı için a_n'yi verir. İlk a_n değerlerini hesaplarsak,

1, 2, 5, 12, 27, 58, 121, 248

buluruz. Bu sefer diziyi tahmin etmek hiç kolay değil. Ama her seferinde önceki sayıyı 2 ile çarptığımız için, daha doğrusu,

$$a_{n+1} = 2a_n + n \geq 2a_n$$

eşitsizliğinden dolayı,

$$a_{n+1} \geq 2a_n \geq 4a_{n-1} \geq 8a_{n-2} \geq \ldots \geq 2^{n+1}a_0 = 2^{n+1}$$

olur. Yani $(a_n)_n$ dizisi üstsel büyür.

Bir önceki örnekteki yöntemi kullanarak dizinin terimlerinin kapalı bir formülünü bulacağız.

(2) eşitliğinin taraflarını x^n ile çarpıp n üzerinden toplayalım.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n + n)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n.\end{aligned}$$

Yine

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

tanımını yapıp bir önceki eşitliği $A(x)$ cinsinden ifade edelim. Sol taraf bir önceki örnekteki gibi (ama bu sefer $a_0 = 0$ değil, $a_0 = 1$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = \frac{A(x)-1}{x}.$$

Sağ tarafın birinci serisi $2A(x)$'e eşit. En zoru en sağdaki terim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$$

Bunu sonsuz toplamı bulmak için türev kavramını kullanabiliriz. (Ama toplamı bulduktan sonra, bulduğumuz eşitliğin doğru olduğunu türev kavramını kullanmadan kanıtlayabiliriz.) Daha önce de gördüğümüz

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

eşitliğinin her iki tarafının da formel türevini alalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (3)$$

elde ederiz. Her tarafı x ile çarparsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

buluruz. Şimdi yukarıdaki eşitliği $A(x)$ cinsinden ifade edebiliriz:

$$\frac{A(x)-1}{x} = 2A(x) + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Buradan kolay bir hesapla $A(x)$'i çekelim:

$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

Şimdi,

$$\frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{a}{(1-x)^2} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1-2x}$$

eşitliğini sağlayan a, b ve c sayılarını bulalım. Eşitliği $1-2x$ ile çarpıp $x = 1/2$ alırsak, $c = 2$ buluruz. Eşitliği $(1-x)^2$ ile çarpıp $x = 1$ alırsak, $a = -1$ buluruz. Eşitliği $1-x$ ile çarpıp x'i sonsuza götürürsek,

$$1 = b + c/2 = b + 1,$$

yani $b = 0$ buluruz. Demek ki,

$$A(x) = \frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{-1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-2x}.$$

Sağda toplanan iki terimi kuvvet serisi olarak hesaplayalım. İlk terimi bulmuştuk ve sonucu (3) olarak yazmıştık. İkinci terim de geometrik seri olarak ifade edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} A(x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - n - 1)x^n \end{aligned}$$

bulunur. Demek ki $A(x)$'in n'inci katsayısı a_n'yi bulduk:

$$a_n = 2^{n+1} - n - 1.$$

Örnek 3. Bu örnekte meşhur Fibonacci dizilerini ele alacağız. Fibonacci dizileri, $n \geq 1$ için

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad (4)$$

eşitliğiyle verilmiştir, yani dizinin her terimi daha önceki iki terimin toplamıdır. Eğer ilk iki terim olan f_0 ve f_1 (ayrıca) verilmişse, tüm dizi bu ilişkiyle belirlenir. Genek olarak $f_0 = f_1 = 1$ alınır; biz de öyle yapalım. Böylece,

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + f_0 = 1 + 1 = 2 \\ f_3 &= f_2 + f_1 = 2 + 1 = 3 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 3 + 2 = 5 \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 5 + 3 = 8 \\ f_6 &= f_5 + f_4 = 8 + 5 = 13 \end{aligned}$$

bulunur ve bu prosedür hayat izin verdiği sürece devam edilebilir.

Her f_n'yi teorik olarak hesaplayabiliriz belki ama pratikte f_{1000}'i ya da $f_{1.000.000}$'u hesaplamak çok uzun süre alacağından, f_n için kapalı bir formül bulmak işimize gelir. Bu örnekte bunu yapacağız.

Daha önceki örneklerde olduğu gibi (4) dizisini x^n ile çarpıp toplayacağız.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

tanımını yaparsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} x^n$$

ilişkisinden önce

$$\frac{F(x)-1-x}{x} = (F(x)-1) + xF(x),$$

sonra da,

$$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

bulunur. Devam edelim. $1-x-x^2$ polinomunun iki kökü vardır:

$$u = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad v = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Demek ki $1-x-x^2$ polinomu,

$$1-x-x^2 = (1-ux)(1-vx)$$

olarak ayrışır. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{1-x-x^2} \\ &= \frac{1}{(1-ux)(1-vx)} \\ &= \frac{1}{u-v}\left(\frac{u}{1-ux} - \frac{v}{1-vx}\right) \\ &= \frac{1}{u-v}\left(u\sum_{n=1}^{\infty} u^n x^n - v\sum_{n=1}^{\infty} v^n x^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{u-v} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Demek ki,

$$f_n = \frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{u-v} = \frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

olur. İstediğimizi bulduk.

Sağdaki sayının bir tam sayı çıkması başlı başına bir olay!

Bu son formül sayesinde, f_n'nin yaklaşık değerini de bulabiliriz. $|v| < 1$ olduğundan, n çok çok büyükken v^{n+1} çok çok küçük bir sayıdır. Dolayısıyla

$$f_n \approx \frac{u^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

olur. Hatta $0 < -v^{n+1}/\sqrt{5} \leq v/\sqrt{5} \leq 0{,}3 < 1/2$ olduğundan, fn, $u^{n+1}/\sqrt{5}$'ten küçük en büyük doğal sayıdır. ♥