Diferansiyel Geometri

Düzlemde Eğriler ve Eğrilikleri

Ferit Öztürk / ferit.ozturk@boun.edu.tr*

Bu yazıda düzlemde eğriler için matematiksel bir tanım geliştireceğiz. Bu modeli kullanarak bir eğrinin düzlemde ne kadar kıvrıldığını ölçen, ***eğrilik*** diyeceğimiz bir çokluk icat edeceğiz.

Düzlemde bir eğri, hareket eden bir parçacığın herhangi bir zamanda hangi noktada olduğunun, yani konumunun belirtilmesiyle tarif edilebilir. Bunu tam olarak, diyelim bir $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ açık aralığından (bu açık aralık $\mathbb{R}$ de olabilir) $\mathbb{R}^2$'ye giden birebir bir fonksiyon aracılığıyla yapabiliriz.

Parametrizasyon

Şimdi
$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$$
koordinat fonksiyonlarıyla verilmiş
$$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$$
birebir γ fonksiyonunu düşünelim. Burada γ_1 ve γ_2, (a, b) açık aralığından $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar. Her $t \in (a, b)$ için
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$
olur. γ'nın sürekli (ya da türevli) olması, koordinat fonksiyonlarının sürekli (ya da türevli) olması demektir. Sürekli (türevli) bir γ'nın $\mathbb{R}^2$'de görüntüsüne *parametrize edilmiş sürekli* (*türevli*) *bir eğri*, γ'ya da o eğrinin bir *parametrizasyonu*, kronometreyi tutan (a, b) aralığına da *parametre kümesi* denir.

Düzlemde bir eğrinin sonsuz tane farklı parametrizasyonu vardır. Türevli bir parametrizasyonu olan eğrilere ***türevli*** denir.

Parametre kümesinin pek önemli olmadığı, örneğin (a, b) aralığı yerine herhangi bir açık aralığı alabileceğimiz malum olmalı, hatta dilersek (a, b) aralığı yerine $\mathbb{R}$ bile alabiliriz, ne de olsa $\mathbb{R}$ ile (a, b) aralığı arasında sonsuz defa türevlenebilen bir fonksiyon bulabiliriz.

* Boğaziçi Ü. öğretim üyesi.

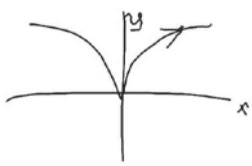
Türevli bir ε eğrisinin rastgele seçilmiş bir parametrizasyonu türevli olmayabilir! Örneğin, düzlemde $t \in \mathbb{R}$ için
$$t \mapsto (t, 0) \quad (1)$$
ya da
$$t \mapsto (t^3, 0) \quad (2)$$
olarak parametrize edilebilen x-ekseni, türevli bir eğridir. x-eksenini
$$\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, 0) & \text{eger } t \geq 0 \\ (t, 0) & \text{eger } t \leq 0 \end{cases}$$
yumuşak g çıkmamış x:

olarak da parametrize edebiliriz ama bu parametrizasyon elbette türevli olmaz çünkü ilk koordinat fonksiyonu türevli değildir, $t = 0$'da türevi yoktur.

Örnekler

1. $y = x^2$ eşitliğini sağlayan düzlem noktaları bir parabol oluşturur. Bunu türevli bir eğri olarak görmek için türevli bir parametrizasyonunu yazmamız gerek. Örneğin,
$$\gamma(t) = (t, t^2)$$
formülüyle tanımlanmış $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonunu alabiliriz.

2. Bir eğrinin türevli olması, *yumuşak* bir biçimde devam edeceği anlamına gelmez; türevli bir eğrinin *köşeleri* olabilir. Örneğin, $t \in \mathbb{R}$ için
$$\beta(t) = (t^3, t^2)$$
fonksiyonuyla parametrelenmiş eğri türevlidir çünkü koordinat fonksiyonları türevlidir. Oysa, eğri şöyle gözükür:



Şekil 1. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

Bu eğride (0, 0) noktasına bir köşe diyoruz.

3. Parametrize edilmiş bir eğrinin, parametrizasyonca betimlenen bir *yönü* vardır. Bir eğrinin yönü, eğrinin üzerine konan bir oktur; parametre büyürken eğri üstünde ne tarafa hareket edildiğini tarif eder. Örneğin yukarda (1) ve (2) parametrizasyonları tarafından x-eksenine verilen yön soldan sağa iken, $t \mapsto (-t, 0)$ parametrizasyonu eksene sağdan sola yön verir. Bir önceki eğri için ise yön Şekil 1'de gösterilmiş.

Kapalı eğriler ve uç noktalar

Düzlemde, çember ya da elips gibi, kapalı bir ε eğrisi alalım. ε, tek bir parametrizasyonla ifade edilen bir eğri olmasa bile her bir noktasının yakın çevresinde türevli biçimde parametrize edilmiş bir eğri olarak görülebiliyorsa ε'a ***türevli kapalı eğri*** denir. Örneğin, düzlemde birim çember, (0, 1) noktası çevresinde

$$(-1,1) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$$

xx

olarak parametrize edilebilir. (–1, 0) noktası çevresinde de, mesela,

$$(-1,1) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \left(-\sqrt{1-t^2}, t\right)$$

olarak parametrize edilebilir. Dolayısıyla birim çember türevli, kapalı bir eğridir.

Kapalı bir eğri yerine *uç noktaları* olan bir eğri de düşünülebilir. Bu noktalar öyle noktalardır ki bunların çevresinde eğri ancak $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^2$ şeklinde (ya da $\gamma : (a, b] \to \mathbb{R}^2$ şeklinde) bir gönderimin görüntüsü olarak tarif edilebilir. Bu durumda eğrinin $g(a)$ noktasına (ya da ikinci durumda $g(b)$ noktasına) bir *uç nokta* denir. Kapalı olmayan bir eğri için de türevlilik söz konusudur: uç noktalarda tek taraflı türevleri göz önüne alın.

Teğet vektörler ve tekillikler

Bundan böyle, γ_1 ve γ_2, (a, b)'den $\mathbb{R}$'ye (yeterince çok sayıda) türevli fonksiyonlar olsun;

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$$

parametrizasyonuyla verilen türevli ε eğrisini düşünelim. $t \in (a, b)$ olmak üzere ε eğrisinin $\gamma(t)$ noktasında parametrizasyonun ***hız vektörünü***

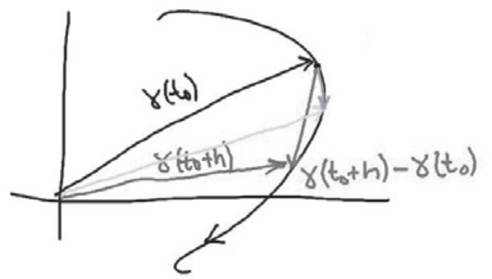
$$\left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t), \frac{d\gamma_2}{dt}(t)\right)$$

vektörü olarak tanımlıyoruz ve bu vektörü $d\gamma/dt$ ya da $\gamma'(t)$ olarak gösteriyoruz. Bu vektöre ε'a $\gamma(t)$ noktasında ***teğet***, $\|\gamma'(t)\|$ uzunluğuna da parametrizasyonun t noktasındaki ***hızı*** diyoruz.

Bu adlandırmanın mantıklı bir temeli var. Bir γ parametrizasyonunun türevini, türev tanımından yola çıkarak yazalım:

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}(t) &= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\gamma_1(t+h)-\gamma_1(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{\gamma_2(t+h)-\gamma_2(t)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\gamma_1,\gamma_2)(t+h)-(\gamma_1,\gamma_2)(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\end{aligned}$$

Burda son satırda paydaki işlem, bir vektör uzayı olan $\mathbb{R}^2$'deki vektör toplamı. Son satırda limitin içindeki vektörlerin yönünü paydaki ifade veriyor. Burda γ'nın $t + h$ anındaki konumuyla t anındaki konumunun vektör farkının, h sıfıra giderken yavaş yavaş eğriye teğet hale geldiğini gözleyebiliyoruz (Resim 2).



Şekil 2. $\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)$, h sıfıra yaklaşırken giderek eğriye teğet oluyor.

Demek ki, seçilen parametrizasyon, ε'un her noktasında bir vektör veriyor. Şimdi, eğrinin parametrizasyonun hız vektörünün 0 olduğu noktalar olabilir. Örneğin, x-ekseninin yukarda (2) olarak işaretlenmiş parametrizasyonunun 0'daki hızı 0'dır. Oysa aynı x-eksenini, 0'da hızı 0 olmayacak biçimde de parametrize edebiliyoruz (yukarıda (1) olarak işaretlenmiş parametrizasyon). Bu örnekte hızın 0 olması eğrinin değil, şanssızlıkla seçilmiş bir parametrizasyonun arızası. Ama öyle eğriler olabilir ki, bir noktası civarında hangi parametrizasyonu seçersek seçelim o noktada hız hep 0 olur. Yukardaki Örnek 2'ye bakın. Verilen parametrizasyonun 0'daki hızı 0'dır. (0, 0) çevresinde hangi türevli parametrizasyonu seçersek seçelim parametrizasyonun oradaki hızının 0 olacağı gösterilebilir.

Bir eğrinin bir noktasında hangi parametrizasyon seçilirse seçilsin parametrizasyonun hızı hep 0 oluyorsa, o noktaya ε'un ***kritik noktası*** denir. ε'un kritik olmayan bir noktasınaysa ***olağan nokta*** denir. Olağan bir noktada eğrinin parametrizasyon tarafından verilen yönünü o noktada hız vektörünün yönü olarak da verebiliriz.

Yay uzunluğu parametrizasyonu

Kritik noktalarla uğraşmamak için bundan böyle kritik noktaları olmayan bir ε eğrisiyle devam edeceğiz. ε'un tüm olası parametrizasyonları içinde özel bir tanesi var: Her noktada hız vektörünün uzunluğu 1 olan parametrizasyon. Böyle bir parametrizasyona, birazdan nedenini anlayacağınız üzere, *yay uzunluğu parametrizasyonu* diyoruz. Bu tür bir parametrizasyonu, hızı hiçbir yerde 0 olmamak koşuluyla rastgele seçilmiş bir $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ parametrizasyonundan elde edebiliriz. Tanımlayacağımız yeni parametremiz u (uzunluğun u'su), γ'nın parametresi t'ye şöyle bağlı olacak:

$$u = u(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau. \tag{3}$$

$t = b$ için u'nun alacağı değer

$$L = u(b) = \int_a^b \|\gamma'(\tau)\| d\tau$$

olur ki bu da eğrinin $\gamma(a)$ noktasından $\gamma(b)$ noktasına uzunluğundan başka bir şey değil. Üstelik, integralin içi her $\tau \in (a, b)$ için pozitif olduğundan, integral t'ye göre sürekli artan bir fonksiyon. Bunu daha güzel görmek için (3)'te iki tarafın t'ye göre türevini alalım. Analizin Temel Teoremi'nden, t'deki türev

$$\frac{du}{dt}(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$$

olur. Dolayısıyla Ters Fonksiyon Teoremi [MD-2012-I, sayfa 68],

$$u : (a, b) \to (0, L)$$

fonksiyonunun türevlenebilir bir tersi olduğunu söylüyor. Bu ters

$$\phi : (0, L) \to (a, b)$$

olsun. Teorem, tersin türevinin ne olduğunu da söylüyor. $u = u(t)$ olmak üzere,

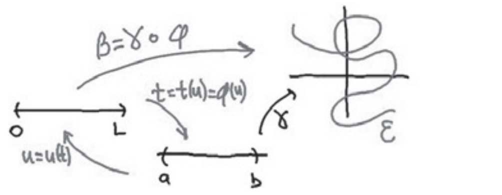
$$\frac{d\phi}{du}(u) = \frac{1}{\frac{du}{dt}(t)} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

elde ederiz.

Artık ϕ fonksiyonu, t'yi u cinsinden ifade ediyor; yani kafaların karışmayacağından eminsek, $t = \phi(u)$ yerine $t = t(u)$ da yazabilirdik. Şimdi ε eğrisini

$$\beta = \gamma \circ \phi : (0, L) \to \varepsilon$$

fonksiyonu ile parametrize edelim (Şekil 3).



Şekil 3

Bu fonksiyonun bir u anında türevi, Zincir Kuralından:

$$\frac{d\beta}{du}(u) = \frac{d\gamma}{dt}(t(u)) \cdot \frac{dt}{du}(u) = \frac{d\gamma}{dt}(t) \cdot \frac{d\phi}{du}(u)$$
$$= \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\frac{du}{dt}(t)} = \gamma'(t) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}$$

olur. Buradan, yeni β parametrizasyonunun türevinin uzunluğunun her u anında 1 olduğu açıkça görülüyor. Yani β tanım gereği bir ***yay uzunluğu parametrizasyonu*** olur. Şimdi hızı hep 1 olan bir parametrizasyona yay uzunluğu parametrizasyonu denmesinin nedenini görebiliriz: 0'dan herhangi bir u anına kadar β'nın ε üzerinde katettiği yolun uzunluğu

$$\int_0^u \|\beta'(\tau)\| d\tau = \int_0^u 1 \cdot d\tau = u.$$

Yani yol uzunluğu parametrizasyonunda hız hep 1'dir, yani geçen zaman alınan yola eşittir.

Birim teğet ve birim normal vektör alanları

Kritik noktası olmayan bir ε eğrisi ve ε'u parametrize eden ve hızı hiçbir yerde 0 olmayan bir $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ parametrizasyonu olsun. Eğri üzerinde $\mathbb{R}^2$ değerli yeni bir fonksiyon tanımlayalım:

$$T : (a,b) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Bu fonksiyon, her noktasında ε eğrisine teğet birim vektörler tarif eder; yani bir ***vektör alanı*** tarif eder. Aynı yönü tanımlayan iki parametrizasyon için bu birim vektör alanları aynıdır (çünkü her bir noktada birim uzunlukta ve aynı yöndeler).

Şimdi $\|T'(t)\| \neq 0$ olmak üzere her t için,

$$N : (a,b) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

vektörlerini düşünelim. Her t için

$$T(t) \cdot T(t) = \|T(t)\|^2 = 1$$

olduğundan,

$$0 = \frac{d}{dt}(T \cdot T) = T' \cdot T + T \cdot T' = 2T \cdot T'$$

olur. Yani her t için $T'(t)$ vektörü $T(t)$ vektörüne diktir. Dolayısıyla, $T(t)$ eğriye teğet olduğundan, o noktada $N(t)$ eğriye diktir. İşte her noktada dik vektörler tarif eden N fonksiyonuna ε için ***birim normal vektör alanı*** denir.

Eğrilik

Şimdi ε üzerinde reel değerli bir fonksiyon tanımlayacağız ve bunun eğrinin ne kadar kıvrıldığını, bir doğrudan ne kadar saptığını ölçtüğünü gözlemleyeceğiz. Yine kritik noktası olmayan bir ε eğrisi ve ε'u yay uzunluğuyla parametrize eden bir $\gamma(u)$ parametrizasyonu olsun.

$$\kappa(\gamma(u)) = \|T'(u)\|$$

formülüyle verilmiş

$$\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna ε eğrisinin ***eğrilik fonksiyonu*** denir.

Örnek **1.** Düzlemde $y = ax + b$ denklemiyle verilmiş bir doğru için

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u, au+b)$$

bir yay uzunluğu parametrizasyonudur:

$$\|\gamma'(u)\| = \frac{\|(1,a)\|}{\sqrt{a^2+1}} = 1.$$

Buradan,

$$T(u) = \frac{\gamma'(u)}{\|\gamma'(u)\|} = \gamma'(u) = \frac{(1,a)}{\sqrt{a^2+1}}$$

çıkar, yani $T(u)$ bir sabittir, dolayısıyla $T'(u)$ her u için 0 vektörüdür. Yani doğrunun eğriliği her noktada 0'dır. Bir doğrudan beklediğimiz gibi...

Örnek **2.** Düzlemde orijin merkezli ve $r \in \mathbb{R}^{>0}$ yarıçaplı bir Ç çemberini, $(-r, 0)$ noktası hariç

$$\alpha : (-r\pi, r\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(u) = \left(r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r}\right)$$

ile parametrize edebiliriz.

$$\|\alpha'(u)\| = r\left\|\left(-\frac{1}{r}\sin\frac{u}{r}, \frac{1}{r}\cos\frac{u}{r}\right)\right\| = 1$$

hesabı bize α'nın bir yay uzunluğu parametrizasyonu olduğunu gösteriyor.

$$T(u) = \left(-\sin\frac{u}{r}, \cos\frac{u}{r}\right)$$

olduğundan bir t anında Ç'nin eğriliğini

$$\kappa(u) = \|T(t)\| = \left\|\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{u}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{u}{r}\right)\right\| = \frac{1}{r}$$

olarak buluruz. Dolayısıyla r yarıçaplı çemberin eğriliği sabittir, ve yarıçap ne kadar büyükse o kadar küçüktür, ne de olsa yarıçap büyüdükçe çember daha çok bir doğruyu andırmaya başlar...

Bir eğriyi yay uzunluğuyla parametrize etmek için (3) denkleminde t'yi u cinsinden ifade etmek gerek. Bu genellikle kolayca yapılabilecek bir hesap değil. Ama yine de yay uzunluğu parametrizasyonunu bilmeden eğriliği herhangi bir parametrizasyon aracılığıyla da hesaplayabiliriz. Bir γ parametrizasyonu ve t parametresi alalım. O zaman zincir kuralından

$$\kappa(t) = \left\|\frac{dT}{du}\right\| = \left\|\frac{dT/dt}{du/dt}\right\| = \left\|\frac{dT/dt}{\|d\gamma/dt\|}\right\| = \frac{\|dT/dt\|}{\|d\gamma/dt\|}$$

buluruz.

Örnek 3. Oldukça genel bir örnek verelim şimdi. (a, b) aralığında bir $f(x)$ fonksiyonun grafiği olarak verilen bir ε eğrisini

$$\beta : (a, b) \to \mathbb{R}^2, \beta(x) = (x, f(x))$$

ile parametrize edelim. Bu eğrinin x_0'a karşılık gelen noktası yerel bir çukur noktası olsun. Şimdi yukardaki formülü kullanarak eğriliği hesaplayalım. İlk olarak

$$\gamma'(x) = (1, f'(x)) \text{ ve } T(x) = \frac{(1, f'(x))}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

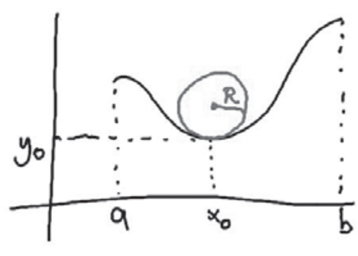
olduğunu kaydedelim. O zaman, x'leri yazmayarak,

$$\kappa(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(0, f'') + \frac{-f'f''}{(1+f'^2)^{3/2}}(1, f')\right\|$$

$$= \frac{1}{(1+f'^2)^2}\left\|(0, (1+f'^2)f'') + (-f'f'', -f'^2f'')\right\|$$

$$= \frac{1}{(1+f'^2)^2}\left\|(-f'f'', f'')\right\| = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

buluruz. x_0 çukur noktası olduğu için $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$ olacaktır. Öyleyse $\kappa(x_0) = f''(x_0)$ elde ederiz.



Şekil 4

Bu örneği kullanarak κ fonksiyonunun eğrilik adını niye hakkettiğini görebiliriz. İlgisizmiş gibi görünen bir soruyla başlayalım: $y_0 = f(x_0)$ olmak üzere, yukardaki grafiğin (x_0, y_0) noktasından geçen öyle bir çember bulalım ki grafiğe o nokta civarında en iyi yapışan çember o çember olsun, yani o çemberi o nokta çevresinde tasvir eden $g(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri o noktada $f(x)$'inkilerle aynı olsun.

Çemberin merkezi (A, B) ve yarıçapı R diyelim. Bir kere $g'(x_0) = 0$ istendiğinden

$$A = x_0 \text{ ve } B = R - y_0$$

olduğunu saptıyoruz. O zaman çemberi

$$(x - x_0)^2 + (y - B)^2 = R^2$$

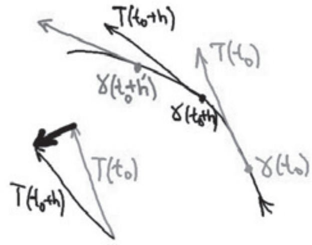
olarak, ve o nokta civarında

$$g(x) = -\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + B$$

diye ifade edebiliriz. g'nin iki kez türevini alarak kolaylıkla $g''(x_0) = 1/R$ buluruz. $g''(x_0) = f''(x_0)$ istiyorduk. Ama yukarda $\kappa(x_0) = f''(x_0)$ bulmuştuk. Dolayısıyla, x_0 noktasında eğrinin eğriliği, o noktada eğriyle en iyi örtüşen çemberin eğriliğine, yani yarıçapının birbölüsüne eşitmiş:

$$R = \frac{1}{\kappa(x_0)}.$$

Eğrilik ne kadar büyükse, en iyi yapışan çemberin yarıçapı o kadar küçülüyor. Tam beklediğimiz gibi!



Şekil 5

Bu nefis gözlemin ardından, belki şu son gözlemi de yapmalıyız. Şekil 5'te yönlü bir eğri için T vektörlerini görüyorsunuz. T'nin $p = \gamma(t_0)$ noktasında türevi,

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(t_0 + h) - T(t_0)}{h}$$

idi. Resimde görülen kalın vektörün h sıfıra giderken limitinden söz ediyoruz. p çevresinde T ne kadar hızlı dönerse, bu limitin, uzunluğu o denli fazla vektörler vereceği açıkça görülüyor; yani eğrilik o denli büyük olacaktır. ♦