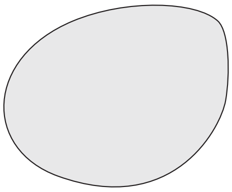
Diferansiyel Geometri

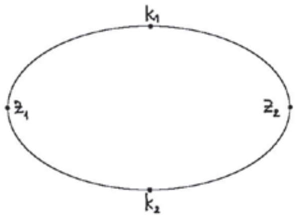
Mükemmel Hacıyatmazlar ve Gömböç

Ferit Öztürk / ferit.ozturk@boun.edu.tr*

Yoğunluğu sabit bir metal levhadan rastgele şekilli ama dışbükey bir para keselim. Levha, paranın dik durabilmesine olanak verecek kadar kalın olsun; birkaç milim yeter. Bu parayı kenarının herhangi bir noktasında dik durmaya bırakalım ve devrilmeden yuvarlanacağını kabul edelim. Para genelde bir tarafa doğru yuvarlanıp bir kenar noktası üzerinde dengeye gelecektir.



Örneğin dairesel bir para her noktası üzerinde "kararda" dik duracak, yuvarlanmayacak. Elips şeklinde (ama dairesel olmayan) bir parayı ise tam olarak 4 kenar noktası üzerinde dengede tutabilirsiniz. Bu noktalardan ikisi "kararlı", ikisi "kararsız" noktadır; kararsız noktalar hariç, elipsi hangi noktası üzerinde dik koyarsak koyalım kararlı noktalardan birine yuvarlanacaktır. Öte yandan elipsi kararsız denge noktalarının üstünde dikkatlice dik yerleştirirsek elipsi o iki noktada dik tutabiliriz, uygulamada olmasa da en azından teorik olarak.



Şekil 1. Elipste k_1 ve k_2 kararlı, z_1 ve z_2 kararsız denge noktalarıdır

Öyleyse şöyle bir soru sorabiliriz: Türdeş (homojen) malzemeden yapılmış dışbükey bir paranın en az kaç denge noktası vardır? Bu birinci sorumuz.

Soruyu bir üst boyuta taşıyalım. Dışbükey ve türdeş malzemeden yapılmış bir cismin (örneğin dışbükey bir taşın ya da bir patatesin) en az kaç denge noktası vardır? Bu da ikinci sorumuz.

Burada açıklanmasına gerek olmayan nedenlerden dolayı mutlaka bir kararlı ve bir de kararsız olmak üzere en az 2 denge noktası olmalı. Soru, 2'den daha fazla denge noktası olup olamayacağı.

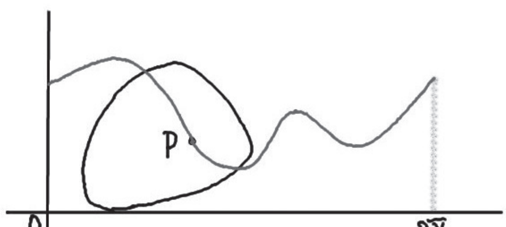
Birinci soruya yanıt 4. Bu sonuç, ünlü **Dört Verteks Teoremi** kullanılarak kanıtlanabiliyor.

İkinci soruya yanıtsa, beklentimizin aksine 2. Yani dışbükey ve homojen öyle bir patates vardır ki, biri kararlı biri kararsız olmak üzere tam tamına 2 noktası üzerinde dengede durabilir. Mucitleri bu üç boyutlu cisme Macarca ***gömböç*** (orijinali *gömböc*) adını vermiş. Gömböcü türdeş ve mükemmel bir hacıyatmaz olarak düşünebilirsiniz.

Bu yazıda yukarıdaki yanıtları tartışacağız. İlk sorunun meşhur Dört Verteks Teoremi'yle ilişkisini kuracağız. (Bu teorem dışbükey olmayan eğriler için bile geçerlidir.) Yazının sonunda da gömböç hakkında biraz bilgi vereceğiz.

Potansiyel Fonksiyonu ve Verteksler

Düzlemde basit, kapalı, türevli ve düzgün bir $\mathcal{E}$ eğrisi alalım. Çevrelediği bölgeyi U olarak gösterelim. U'nun ağırlık merkezi P olsun.



Şekil 2. Yuvarlanan şekilsiz paranın ağırlık merkezi, potansiyel fonksiyonun grafiğini çiziyor.

* Boğaziçi Ü. öğretim üyesi.

$\mathcal{E}$, kenarındaki Q noktasında yere değdiğinde U'nun potansiyeli P noktasının düşey yüksekliği olarak verilir. Böylece $\mathcal{E}$'den $\mathbb{R}$'ye, ***potansiyel fonksiyonu*** diyeceğimiz türevli bir φ fonksiyonu tanımlamış olduk. Bu fonksiyonu gözümüzde canlandırmanın kolay bir yolu var. Bir doğru üzerinde U'yu yuvarlayın; P noktasının çizdiği 2π periyodlu yol, φ'nin grafiğidir (Resim 2).

Kenarı üzerine dik konan U, φ potansiyelini en düşük yapacak biçimde yuvarlanarak karara gelmeye çalışır. (Potansiyel fonksiyonun en yüksek olduğu nokta da kararsız denge noktasıdır.) Potansiyel fonksiyonunun kritik noktalarını, yani türevinin 0 olduğu noktaları bulmaya çalışacağız.

Sav. *Kapalı türevli düzgün dışbükey bir $\mathcal{E}$ eğrisinin potansiyel fonksiyonunun kritik noktaları, $\mathcal{E}$'nin eğrilik fonksiyonunun kritik noktalarıyla yani $\mathcal{E}$'nin verteksleriyle aynı noktalardır.*

Bu savı kanıtlarken Dört Verteks Teoremi'nden potansiyel fonksiyona bir köprü kuracağız. Böylece iki boyutlu türdeş ve mükemmel bir hacıyatmaz olamayacağını kanıtlamış, yani yukarıdaki ilk soruyu da doğrudan yanıtlamış olacağız.

Öncelikle Dört Verteks Teoremi'ni başka türlü ifade edeceğiz. $\mathcal{E}$ eğrisinin uzunluğu 2π olsun. Eğri saat yönünde u yay uzunluğuyla $(x(u), y(u))$ olarak parametrize edilsin. Burada elbette $0 \le u \le 2\pi$ alıyoruz. κ, eğrinin eğrilik fonksiyonu olsun. $\beta(u)$ ise $T(u)$ birim teğet vektörünün u anında yatay pozitif x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı olsun. (Açıları saat yönünde hesaplıyoruz.) O zaman elimizde

$$T(u) = \left(\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}\right) = (\cos\beta(u), \sin\beta(u)) \qquad (1)$$

var. Eğri dışbükey olduğu için β sürekli artan bir fonksiyondur; her u için $d\beta(u)/du > 0$ olur. Ters Fonksiyon Teoremi, bu durumda u'nun da β'nın bir fonksiyonu olarak görülebileceğini söyler. Dolayısıyla κ da β'nın bir fonksiyonu olarak yazılabilir:

$$\kappa(u) = \| T'(u) \| = \left\| (-\sin(\beta(u)), \cos(\beta(u)))\frac{d\beta}{du} \right\| = \frac{d\beta}{du}.$$

Üstelik, Zincir Kuralından

$$\frac{d\kappa}{d\beta}(u) = \frac{d\kappa}{du}(u) \cdot \frac{du}{d\beta}(u)$$

bulunur. Sağda ikinci çarpan 0'dan farklı olduğu için,

$\frac{d\kappa}{d\beta}(u)$ ile $\frac{d\kappa}{du}(u)$ tam tamına aynı u değerleri için 0 olur. (*)

Yani Dört Verteks Teoremi, kapalı $\mathcal{E}$ eğrisinin en az 4 noktasında $d\kappa/d\beta$'nın 0 olduğunu iddia ediyor.

$\mathcal{E}$'nin kapalı olması da şu demek aslında: $\mathcal{E}$ boyunca ilerlerken noktaların x ve y koordinatları u ile değişiyor ama u parametresi 0'dan 2π'ye değiştiğinde x'teki ve y'deki toplam değişimler 0 oluyor. Yani $\mathcal{E}$'nin kapalı olması aşağıdaki eşitliklere denk:

$$\begin{aligned} 0 = x(2\pi) - x(0) &= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{du} du \\ &= \int_0^{2\pi} \cos\beta \, du = \int_{\beta(0)}^{\beta(2\pi)} \cos\beta \frac{du}{d\beta} d\beta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\beta}{d\beta/du} d\beta. \end{aligned}$$

(İkinci eşitlik Analizin Temel Teoremi'dir; üçüncü eşitlik (1)'den kaynaklanır, dördüncü eşitlik bariz, beşinci eşitlik Ters Fonksiyon Teoremi'nden kaynaklanır.) Benzer biçimde

$$\begin{aligned} 0 = y(2\pi) - y(0) &= \int_0^{2\pi} \frac{dy}{du} du \\ &= \int_0^{2\pi} \sin\beta(u) \, du = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\beta}{\kappa(\beta)} d\beta, \end{aligned}$$

yani

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\beta}{\kappa(\beta)} d\beta = 0 \qquad (3)$$

buluruz. Dolayısıyla (*), (2) ve (3) kullanılarak Dört Verteks Teoremi artık şöyle de ifade edilebilir:

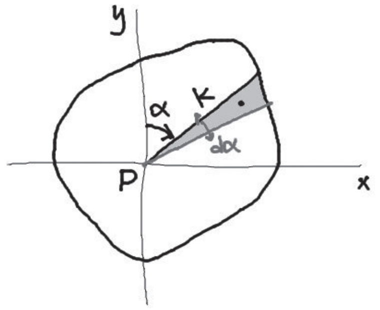
Dört Verteks Teoremi (yeni): *Bir $\beta \in (0, 2\pi)$ parametresiyle parametrize edilmiş bir $\mathcal{E}$ eğrisi ve $\mathcal{E}$ üzerinde pozitif reel değerli $\kappa = \kappa(\beta)$ periyodik fonksiyonu alalım, öyle ki*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\beta}{\kappa(u)} d\beta = 0 \text{ ve } \int_0^{2\pi} \frac{\cos\beta}{\kappa(u)} d\beta = 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda $\kappa(\beta)$'nın en az 4 kritik noktası vardır.

Savın Kanıtı: Bu teorem doğru olsun. $\mathcal{E}$'nin çevrelediği düzlemsel bölgeye U ve U'nun ağırlık merkezine P demiştik. P'yi orjin kabul edelim. P'yi $\mathcal{E}$'nin noktalarına birleştiren vektörün uzunluğu

k, pozitif y ekseniyle saat yönünde yaptığı açı α olsun; yani k, α'nın fonksiyonu. Aşağıdaki şekildeki sonsuz küçük üçgenlerin y eksenine göre momentlerinin toplamı 0 olmalı.



Şekil 3

Üçgenin ağırlığı

$$\frac{1}{2}k \cdot k\, d\alpha;$$

üçgenin ağırlık merkezinin P'den uzaklığı ise

$$\frac{2}{3}k.$$

Dolayısıyla,

$$0 = \int_U y\, dA = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3}k\right) \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}k^2 d\alpha\right)$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}k^3 \cos\alpha\, d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\alpha}{3k^3} d\alpha.$$

x eksenine göre de momentlerin toplamı 0 olduğundan

$$0 = \int_U x\, dA = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}k \sin\alpha \frac{1}{2}k^2 d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\alpha}{3k^3} d\alpha$$

elde ediyoruz. Yukardaki yeni Dört Verteks Teoremi,

$$f(a) = \frac{1}{3k^3(a)}$$

fonksiyonunun en az 4 kritik noktası olduğunu söylüyor. Ama

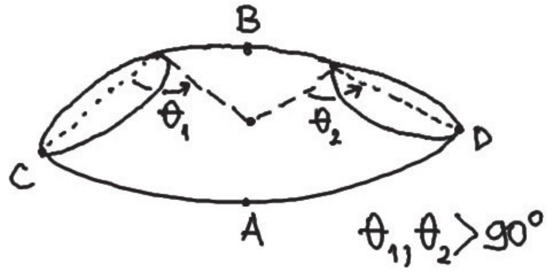
$$f'(a) = -\frac{k'}{k^4}$$

olduğundan, f'nin ve k'nin kritik nokta sayıları eşit. Son olarak, basit mekanik bir gözlemle k'nin kritik noktalarıyla $\mathcal{E}$'nin potansiyel fonksiyonunun kritik noktalarının aynı olduğunu fark edip iddianın kanıtını bitiriyoruz.

Gömböç

İlk baştaki ikinci soruya geri dönelim: üç boyutlu mükemmel, dışbükey bir hacıyatmaz mümkün mü? Cismin yüzeyi tıkız ve üzerinde tanımlı potansiyel fonksiyonu sürekli olduğundan yüzeyde zaten en az iki kritik nokta olmalı; bunlardan biri mutlak tepe, diğeri mutlak çukur... Dolayısıyla soru şu: Cisim öyle inşa edilebilir mi ki potansiyel fonksiyonunun sadece 2 kritik noktası olsun?

Biraz düşününce kritik noktaların sayısı dörde indirilebiliyor. Resim 4'teki odun parçasının potansiyelinin dört kritik noktası var. A noktası mutlak çukur, B mutlak tepe, C ve D eyer noktaları.



Şekil 4

Evet, sadece iki kritik noktası olan dışbükey bir cisim var. Mucitlerinin gömböc olarak ad taktıkları bu cisim inşa edilmiş durumda. Mucitlerinden G. Domokos, 2012 Baharı'nda bu konuda bir konuşma yapmak için Boğaziçi Üniversitesi Güney Kampüs'teki İstanbul Matematiksel Bilimler Merkezi'ni (IMBM) ziyaret etti. Konuşması sırasında merhum V. I. Arnold'un gömböcü öngördüğünü anlattı. 1995'te Hamburg'da düzenlenen Uluslararası Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik Kongresi'nin ardından tamamen tesadüfler eseri Hamburg tren garında kendisiyle birkaç dakika ayaküstü konuşma fırsatı bulmuş.

Amacı, iki boyutlu homojen hacıyatmazların en az 4 kritik noktası olduğu sonucunu Arnold'a anlatmakmış. Arnold bu sonucu duyar duymaz derin düşünceye dalmış. Domokos, kanıtını anlatmak istediğinde Arnold sözünü keserek "Kanıtı nasıl yaptığını tabii ki biliyorum" demiş. Problemin bir üst boyutta da yanıtlanması durumunda bu problemlerin ardındaki ortak giz konusunda bir fikir yürütebileceğini eklemiş.

Ancak üç boyutta cevabın 4'ten az olabileceğini söylemiş. Soruyu çözer çözmez Domokos'un kendisine haber vermesini istemiş. Aceleyle kalkıp trenine yetişmiş. Bu olaydan on yıl sonra Domokos ve çalışma arkadaşları, inşa edilmiş ilk gömböç örneğini Arnold'a sunmuşlar.

Gömböcün varlığının kanıtını burada anlatmayacağız. Ama meraklısına bir fikir vermesi açısından kanıtın bir rotası şöyle çizilebilir: Önce dışbükey cisimler için yassılık ve incelik diye iki nicelik tanımlanıyor. İçi dolu bir kürenin (yuvar) hem yassılığı hem de inceliği 1'e eşittir. Daha sonra, potansiyelinin sonlu sayıda kritik noktası olan bir cismin bir gömböç olabilmesi için bu iki niceliğin de 1 olmasının gerek ve yeter koşul olduğu kanıtlanıyor. Buradan şöyle bir umut çıkıyor: Bir gömböc, yuvarı deforme ederek elde edilebilir. Bu deformasyonun sağlaması gereken diferansiyel denklemler yazılıyor ve bu diferansiyel denklemlerin çözüm aileleri inşa ediliyor. Kanıtın can alıcı noktası burası. Dolayısıyla tek bir gömböç yok. En azından bir aile dolusu deformasyon var.

Gömböcün yapımı, keşfinden daha zor belki de. Yapım için ihtiyaç duyulan duyarlılık, 10 santimetrede en fazla 0,1 mm mertebesinde. Yapılan ilk gömböçlerde kullanılan çözüm ve teknoloji, (Arnold'a hediye edilen de dahil olmak üzere) iyi çalışmayan gömböçler ortaya çıkarmış. Şimdiki gömböçler sorunsuz çalışıyor. Gömböç ne kadar büyükse hatalara toleransı o kadar yüksek oluyor. Şu ana kadarki en büyük gömböç, 2010'da Şangay'da düzenlenen World Expo'da Macaristan pavyonu için inşa edilen 3 metre boy ve 3 metre enindeki gömböc. Budapeşte'deki Ulusal Müzede rengarenk boyanmış gömböçler için kocaman bir salon ayrılmış. Şimdi çalışan bir gömböcü dileyen herkes satın alabiliyor ama biraz pahalı.

2012 yazında Matematik Köyü'nde gömböce ilişkin bir gece seminerinde tüm dinleyiciler Türkiye'deki belki de tek gömböcü ellerine alıp onunla oynama şansını yakaladılar. Eğer Boğaziçi Matematik'e yolunuz düşerse şeffaf pleksiglastan yapılmış bu gömböcle siz de oynayabilirsiniz. ♦

Kaynaklar

[1] Gábor Domokos, Jim Papadopulos, Andy Ruina, *Static equilibria of planar, rigid bodies: is there anything new?* J. Elasticity 36 (1994), no. 1, 5-66.

[2] P. L. Várkonyi ve G. Domokos, *Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles, and the Poincaré-Hopf theorem*, J. Nonlinear Sci. 16 (2006) no. 3, 255-281.

[3] Gábor Domokos, *My Lunch with Arnol'd*, The Mathematical Intelligencer 2006.