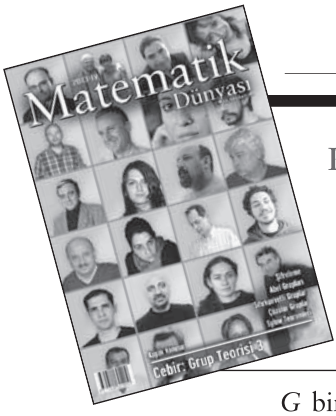

Kapak Konusu: Cebir: Grup Teorisi III

Abel Gruplarının Saf Altgrupları

G bir abel grubu ve $H \leq G$ olsun. H'nin bir elemanının G'de n'inci kökü olabilir ama H'de olmayabilir. Örneğin $G = \mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}$ ise, H'nin 2 elemanının G'de "karekökü" vardır: 1; ama aynı elemanın H'de karekökü yoktur. Eğer her $h \in H$ elemanı ve $n > 0$ tamsayısı için $x^n = h$ eşitliğinin G'de bir çözümü olduğunda, bu denklemin H'de de bir çözümü varsa, H'ye G'nin ***saf altgrubu*** adı verilir. Eğer işlemi toplama altında yazarsak, saf altgrup demek, her $n > 0$ tamsayısı için $nG \cap H = nH$ demektir.

Bu yazıda her grup bir abel grubu olacak.

Örnekler

1. Tümleyeni olan algruplar saf altgruplardır.

2. Saf bir altgrubun saf altgrubu saf altgruptur.

3. Bölünebilir altgruplar saf altgruplardır.

4. G/H burulmasızsa, H saf bir altgruptur.

5. $T(G)$, G'nin burulmalı elemanlarından oluşan altgrupsa, $T(G)$ saf bir altgruptur.

6. Bir saf altgruplar zincirinin bileşimi saf bir altgruptur.

Alıştırmalar

8. $H \leq G$ ve
$$P(H) = \{g \in G : \text{bir } n > 0 \text{ doğal sayısı için } ng \in H\}$$
olsun. $P(H)$'nin bir saf altgrup olduğunu kanıtlayın.

9. $T(G)$, G'nin burulmalı elemanlarından oluşan altgrup olsun. $P(0) = T(G)$ eşitliğini kanıtlayın.

10. $T(G) \leq P(H)$ olduğunu kanıtlayın.

11. $G/P(H)$'nin burulmasız bir grup olduğunu kanıtlayın.

12. $T(G/H) = P(H)/H$ eşitliğini kanıtlayın.

13. $P(H)$'nin H'yi ve $T(G)$'yi içeren en küçük saf altgrup olduğunu kanıtlayın.

14. G burulmasız bir grup ve $H \leq G$ olsun. H'nin saf olması için "G/H burulmasızdır" koşulunun yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

15. $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $H = (3, 2)\mathbb{Z}$, $K = (1, 2)\mathbb{Z}$ olsun. G/H ve G/K gruplarının burulmasız olduğunu kanıtlayın. Bir önceki alıştırmayı kullanarak H ve K'nın saf altgruplar olduklarını gösterin.
$$L = \langle G, H\rangle = (3, 2)\mathbb{Z} + (1, 2)\mathbb{Z}$$
olsun. $(2, 0) \in L$ ama $(1, 0) \notin L$ olduğunu gösterin. Bunu kullanarak L'nin saf bir altgrup olmadığını gösterin.

16. $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $H = \langle\overline{m}\rangle$ olsun. $d = \text{obeb}(n, m)$ ve $e = n/d$ olsun. H'nin G'de saf olması için $\text{obeb}(d, e) = 1$ eşitliğinin yeter ve gerek olduğunu kanıtlayın.

Aşağıdaki saf altgruplarla ilgili önemli teorem, Sonlu Üreteçli ve Burulmalı Abel Grupları yazısındaki Önsav 6'yı genelleştirmektedir.

Teorem 1. *G bir abel grubu ve H, G'nin bir saf altgrubu olsun. Eğer H'nin eksponenti sonluysa H'nin G'de bir tümleyeni vardır.*

Kanıt: H'nin eksponentlerini bölen farklı asallar $p_1, ..., p_k$ olsun. Önce teoremi $k = 1$ durumunda kanıtlamanın yeterli olduğunu, gerisinin k üzerine tümevarımla kolaylıkla kanıtlanacağını gösterelim. Teoremin $k = 1$ durumda kanıtlandığını varsayalım. Bir p asalı için,
$$H_p = \{h \in H : \text{bir } n > 0 \text{ tamsayısı için } h^{p^n} = 1\}$$
olsun. O zaman $H_p \leq H$ ve
$$H = H_{p_1} \oplus ... \oplus H_{p_k}$$
olur. H'de ayrıştıkları için, H_{p_i}'lerin her biri H'de saftır. H de G'de saf olduğundan, H_{p_i}'lerin her biri G'de saftır. $k = 1$ durumunda teoremi kanıtladığımızı varsaydığımız için, bir $K \leq G$ için
$$G = H_{p_1} \oplus K$$
olur. $i \geq 2$ için p_i ve p_1 iki farklı asal olduğundan
$$H_{p_i} \leq K$$
olur; ayrıca H_{p_i} altgrubu K'da saftır. Tümevarımla, bir $L \leq K$ için,
$$K = (H_{p_2} \oplus ... \oplus H_{p_k}) \oplus L$$
olur. Demek ki,
$$G = H_{p_1} \oplus K = H_{p_1} \oplus ((H_{p_2} \oplus ... \oplus H_{p_k}) \oplus L)$$
$$= (H_{p_1} \oplus H_{p_2} \oplus ... \oplus H_{p_k}) \oplus L = H \oplus L$$
olur ve teoremi $k = 1$ için kanıtlamak gerekiyor.

Bundan böyle $p = p_1$, $H = H_p$ ve $\exp H = p^n$ olsun. Sonlu Üreteçli ve Burulmalı Abel Grupları yazısındaki Sonuç 8'e göre $I_1, ..., I_n$ kümeleri için

$$H = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\bigoplus_{I_k} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \right) \qquad (1)$$

olur.

$$H_k = \oplus_{I_k} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$

olsun. H/H_n, G/H_n grubunun saf bir altgrubudur ve

$$\exp H/H_n \leq p^{n-1}$$

olur. Demek ki tümevarımla H/H_n altgrubunun G/H_n altgrubunda bir tümleyeni vardır. Böylece bir $H_n \leq K \leq G$ için,

$$G/H_n = H/H_n \oplus K/H_n$$

olur, yani

$$G = HK \text{ ve } H \cap K = H_n.$$

Bu arada H_n'nin K'da saf olduğunu görelim: Eğer $k \in K$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $k^m \in H_n \leq H$ oluyorsa, bir $h \in H$ için $k^m = h^m$ olur; ama (1)'den dolayı $h \in H$ elemanını H_n'de seçebiliriz. Eğer

$$K = H_n \oplus L$$

eşitliğini sağlayan bir $L \leq K$ bulabilirsek, o zaman

$$G = HK = HH_nL = HL$$

ve $H \cap L \leq H \cap (K \cap L) \leq (H \cap K) \cap L = H_n \cap L = 1$ olur, yani $G = H \oplus L$ olur.

Bundan böyle

$$G = K \text{ ve } H = H_n \approx \oplus_{I_k} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$

olsun. Teoremi bu durumda kanıtlamak yeterli. Kanıtı ufak bir değişiklikle Sonlu Üreteçli ve Burulmalı Abel Grupları yazısındaki Önsav 6'nın kanıtı gibi olacak.

Önce $G^{p^n} = \{g^{p^n} : g \in G\}$ altgrubuyla H'nin kesişmediğini görelim: Eğer $g^{p^n} \in H$ ise, bir $h \in H$ için $g^{p^n} = h^{p^n}$ olur. Ama $\exp H = p^n$ olduğundan, buradan $g^{p^n} = h^{p^n} = 1$ çıkar. Demek ki $G^{p^n} \cap H = 1$.

$$\mathcal{Z} = \{K \leq G : K \cap H = 1 \text{ ve } G^{p^n} \leq K\}$$

olsun. $G^{p^n} \in \mathcal{Z}$ olduğundan $\mathcal{Z} \neq \emptyset$ olur. $\mathcal{Z}$'yi altgrup (ya da altküme) olma ilişkisiyle sıralayalım, altgruplar üstgruplardan küçük olsun. Eğer $(K_i)_i$, $\mathcal{Z}$'nin bir zinciriyse, $\bigcup_i K_i \in \mathcal{Z}$ olur. Dolayısıyla, Zorn Önsavı'na göre $\mathcal{Z}$'nin maksimal bir elemanı vardır. Bu altgruba K diyelim. Demek ki

$$\langle H, K\rangle = HK = H \oplus K \leq G.$$

$HK = G$ eşitliğini kanıtlayacağız. Diyelim eşitlik yok ve $HK < G$. Amacımız $\langle K, g\rangle \cap H = 1$ eşitliğinin doğru olduğu bir $g \in G \backslash K$ elemanının varlığını kanıtlamak; böylece $K < \langle K, g\rangle$ olacak ve K'nın maksimalliğiyle çelişeceğiz.

Önce rastgele bir $g \in G \backslash HK$ alalım. Bu elemanı istediğimizi sağlaması için yavaş yavaş değiştireceğiz. İlk olarak

$$g, g^p, g^{p^2}, ..., g^{p^n} = 1$$

dizisine bakalım. İlk terim, g yani, HK'da değil. Ama son terim, g^{p^n} elemanı yani, HK'da çünkü

$$g^{p^n} \in G^{p^n} \leq K \leq HK.$$

Bu dizinin elemanlarını soldan sağa doğru tararken, bir $i = 0, 1, ..., n-1$ için

$$g^{p^i} \notin HK \text{ ama } g^{p^{i+1}} \in HK$$

olmalı. g yerine bu g^{p^i} elemanını alarak,

$$g \notin HK \text{ ama } g^p \in HK$$

varsayımını yapabiliriz; öyle yapalım. Şimdi, $h \in H$ ve $k \in K$ için

$$g^p = hk$$

olur. H'nin eksponenti p^n olduğundan

$$g^{p^n} = (g^p)^{p^{n-1}} = (hk)^{p^{n-1}} = h^{p^{n-1}}k^{p^{n-1}}$$

olur. Ama $g^{p^n} \in G^{p^n} \leq K$ olduğundan, buradan

$$h^{p^{n-1}} \in H \cap K = 1$$

ve $h^{p^{n-1}} = 1$ elde ederiz.

Şimdi H grubunda hangi elemanların p^{n-1}'inci kuvvetinin 1'e eşit olduğunu görelim. Teoremin hipotezine göre $H \approx (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(I)}$. Ama

$$\{x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} : p^{n-1}x = 0\} = p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

eşitliğini önceki sayılarda kanıtlamıştık, ama bu aşamada okur için kolay bir alıştırma olmalı; demek ki aynı şey $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(I)}$ grubunda da doğru:

$$\{x \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(I)} : p^{n-1}x = 0\} = (p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(I)} = p \cdot (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(I)}.$$

Sonuç olarak benzer önerme (çarpımsal bir grup olan) H için de geçerlidir ve $h^{p^{n-1}} = 1$ olduğundan, bir $h_1 \in H$ için $h = h_1{}^p$ eşitliğinin doğru olduğunu görürüz. Böylece

$$g^p = hk = h_1{}^pk \text{ ve } (h_1{}^{-1}g)^p = k \in K$$

elde ederiz. $h_1{}^{-1}g \in G \backslash HK$ olduğundan (aksi halde $g = h_1(h_1{}^{-1}g) \in H(HK) = HK$ olurdu), g yerine $h_1{}^{-1}g$ elemanını alıp,

$$g \in G \backslash HK \text{ ve } g^p \in K$$

varsayımlarını yapabiliriz.

Bu aşamada $\langle K, g\rangle$ altgrubuna bakalım. Bu altgrubun elemanları bir $k \in K$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için kg^m biçimindedir (daha önceki k'yı artık unutun). K'nın seçiminden dolayı, $\langle K, g\rangle \cap H \neq 1$ olmalı. Kesişimden 1'e eşit olmayan bir eleman seçelim:

$$1 \neq kg^m \in H$$

olsun. Demek ki $g^m \in HK$. Eğer p asalı n'yi bölmezse, g^p de HK'da olduğundan,

$$g = g^1 = g^{\text{obeb}(n,\, p)} \in HK$$

olur, ki bu da g'nin seçimiyle çelişir. Demek ki $p|m$, diyelim $ps = m$. Bu durumda, $g^p \in K$ olduğundan,

$$kg^m = kg^{ps} = k(g^p)^s \in K$$

olur. Ama aynı zamanda $kg^m \in H$. Demek ki $kg^m \in H \cap K = 1$, çelişki. □