Bir Tekhücrelinin Soyunu Sonsuza Dek Sürdürme Olasılığı

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

Fazla enerji harcamadan, ikiye bölünerek üreyen tekhücreliler vardır. Örneğin sularda yaşayan amipler. Amip gibi, üremek için bir başka canlıya ihtiyacı olmayan bir yaratık canlandıralım kafamızda.

Kimi yaratıklar, çeşitli nedenlerden, ikiye bölünemeden, yani üreyemeden ölürler. Yaratıklarımızın p olasılıkla ikiye bölündüklerini, $1 - p$ olasılıkla da üreyemeden öldüklerini varsayalım. Burada p, 0'la 1 arasında bir sayıdır.

Eğer $p = 0$ ise bütün yaratıklar üreyemeden ölürler. Eğer $p = 1$ ise, bütün yaratıklar ürerler, herbiri ikiye bölünür. Eğer $p = 1/2$ ise, bir yaratık üremekle ölmek arasında karar vermek için yazıtura atar, örneğin yazı gelirse ürer, tura gelirse ölür. Eğer $p = 1/6$ ise, bir yaratık üremekle ölmek arasında karar vermek için zar atar, örneğin şeş gelirse ürer, yoksa ölür.

Bu yazıda, tek bir yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürebilme şansının sıfırdan büyük olması için p'nin en az kaç olması gerektiğini bulacağız.

Eğer p, 0'a yakınsa, yani yaratıklar büyük bir olasılıkla üreyemeden ölüyorlarsa, tek bir yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürebilmesi oldukça küçük bir olasılık olmalı, sıfır bile olabilir bu olasılık. Eğer p gerçekten sıfırsa, yaratık kaçınılmaz olarak ölecektir, soyu bir kuşak bile sürmeyecektir. Elbette böyle bir yaratığın günümüze kalması mümkün değildir; var olduktan bir süre sonra eceli gelir ve üreyemeden ölür. Eğer $p = 0{,}001$ ise, yaratık binde bir olasılıkla bir kuşak üreyebilecektir; çok küçük bir olasılıkla bile olsa, soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olabilir; belki de hiç öyle bir şansı yoktur... Hesapsız kitapsız belli mi olur?

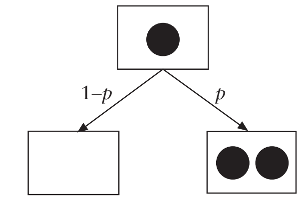
Öte yandan, p, 1'e yakınsa, yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürme olasılığı sıfırdan büyük bir sayı olabilir.

Bu sorunun yanıtını bulduktan sonra sorularımızı çoğaltacağız.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Yazarın **Matematik ve Sonsuz** adlı kitabından alınmış ve uyarlanmıştır.

Tek bir yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığına x diyelim. x'i hesaplamak istiyoruz[1].

Evet... Tek bir yaratığımız var. Bir saat sonra bu yaratık $1 - p$ olasılıkla ölecektir. Demek ki x en azından $1 - p$ olmalıdır. Amip p olasılıkla ikiye bölünüp 2 yaratık olacaktır. Bir resim yapalım:



Yaratığımız başlangıçta, yani sıfırıncı saatte, üstteki şeklin en üst noktası. Bir saat sonra, yaratık $1 - p$ olasılıkla sol oku seçecek ve ölecek, p olasılıkla sağ oku seçecek ve birken iki olacak. Sol oku izlerse, soy daha ilk kuşaktan tükenir. Sağ oku izlerse, ikinci kuşakta iki yaratık oluşur. Bu iki yaratığın herbiri de bir saat sonra ya ölecek ya üreyecektir. Her ikisi birden ölebilir, salt biri ölebilir, her ikisi birden üreyebilir. Yani birinci yaratığımızın soyunun kuruması için, birinci yaratık,

1) Ya sol oku izleyip ölmeli.

2) Ya da sağ oku izlemeli ve oluşan ikinci kuşak yaratığın her ikisinin de soyu kurumalı.

Dolayısıyla,

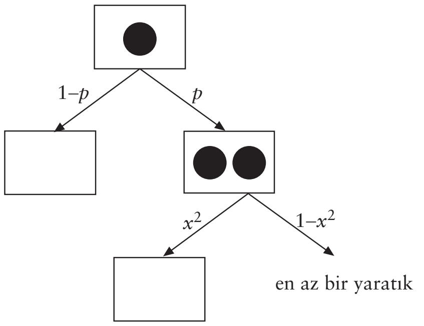
x = Sol oku izleme olasılığı
+ (sağ oku izleme olasılığı) × (iki yaratığın soylarının kuruma olasılığı)

denklemi geçerlidir. Sol oku izleme olasılığının $1 - p$, sağ oku izleme olasılığının p olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$x = (1-p) + p \times$(iki yaratığın soylarının kuruma olasılığı)

eşitliğini bulduk.

1 Yaratıkların birbirlerinden bağımsız ürediğini varsayacağız, örneğin amiplerin çok üreyip, yer ve yemek için birbirleriyle kavga etmeyeceklerini varsayacağız. Ayrıca şunu da belirtmekte yarar var: Eğer tek bir yaratığın soyunun sonsuza dek sürme olasılığı sıfırsa, sonlu sayıda yaratık için de bu olasılık sıfırdır.



Eğer tek bir yaratığın soyunun kuruma olasılığı x ise, her iki yaratığın de soyunun kuruma olasılığı x^2'dir[2]. Demek ki,

$$x = (1-p) + px^2$$

eşitliği geçerlidir. Bu, ikinci dereceden bir denklemdir. Kolaylıkla çözülür.

Eğer $p = 0$ ise, $x = 1$'dir.

Eğer $p \neq 0$ ise iki çözüm bulunur: ya $x = 1$ ya da

$$x = \frac{1-p}{p}.$$

Demek ki, $p \neq 0$ ise, x ya 1'e ya da $(1 - p)/p$'ye eşittir. Her ikisine birden eşit olamaz elbet[3]. Doğru yanıt hangisidir? 1 mi yoksa $(1 - p)/p$ mi? Belki kimi zaman 1'dir, kimi zaman da $(1 - p)/p$.

Hangi Yanıt Doğru? x'in en fazla 1 olabileceğini biliyoruz, çünkü x bir olasılıktır ve olasılıklar 0'la 1 arasında değişirler. Dolayısıyla, eğer $(1 - p)/p$ sayısı 1'den büyükse, ikinci yanıt doğru olamaz, birinci yanıt doğru olmalı, yani $x = 1$ olmalı. Kolay bir hesap, ancak $p \leq 1/2$ ise, $(1 - p)/p \geq 1$ olduğunu gösterir. Demek ki p, 1/2'den küçük olduğunda $x = 1$'dir, yani yaratığın soyu kesinlikle sonlu bir zaman sonra tükenir. Sezgimiz de bunu söylemiyor mu zaten? Sezgimiz, p küçükse, yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığının büyük olduğunu, yani 1'e yakın olduğunu söylüyor. Demek ki bu olasılık $p \leq 1/2$ iken 1'miş. Dolayısıyla, $p \leq 1/2$ ise, yaratığın sonsuza dek yaşama olasılığı yoktur.

Peki, $1/2 \leq p$ ise, x kaç olmalı? Bu soruyu yanıtlamak biraz daha zor. Çözümlememizi derinleştirmemiz gerekiyor. Bundan böyle $1/2 \leq p$ varsayımını yapacağız. O zaman,

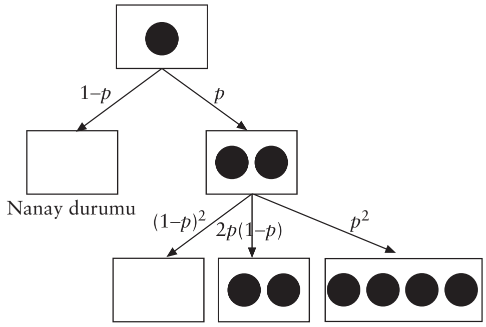
$$\frac{1-p}{p} \leq 1 \qquad (1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bunu aklımızda tutalım.

En fazla n saat sonra hiç yaratık kalmama olasılığına x_n diyelim. Yani x_n, n'inci kuşak yaratık yetişmeme olasılığı, yaratık soyunun birinci, ikinci,... ya da n'inci kuşakta ölme olasılığı. Örneğin,

$$x_1 = 1 - p$$
$$x_2 = (1 - p) + p(1 - p)^2$$

dir, bir sonraki şekilden görülebileceği üzre.



$x_2 = (1-p) + p(1-p)^2$

Biraz düşününce, x'in x_n'lerin limiti olduğunu anlarız (n sonsuza gittiğinde.) Çünkü x_n, n'inci kuşak yaratık yetişmeme olasılığıdır, x de sonsuzda yaratık kalmama olasılığıdır. Yani,

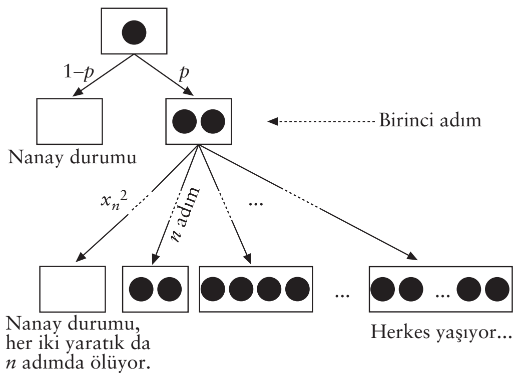
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad (2)$$

eşitliği geçerlidir. Bunu da aklımızda tutalım.

Doğru yanıtı bulmak için üçüncü bir olguya daha gereksiniyoruz. O da şu: $1/2 \leq p$ ise,

$$x_n \leq \frac{1-p}{p} \qquad (3)$$

Bu eşitsizliği n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $x_1 = 1 - p$ olduğundan, (3) eşitsizliği $n = 1$ için geçerlidir. Şimdi (3)'ün n için geçerli olduğunu varsayıp (3)'ü bir sonraki sayı olan n+1 için kanıt-



$x_{n+1} = (1-p) + px_n^2$

2 Örneğin bir zar atıldığında şeş gelme olasılığı 1/6'dır. İki zar atıldığında, her ikisinin de şeş gelme olasılığı 1/36'dır, yani $(1/6)^2$'dir. Amiplerin birbirinden bağımsız olduklarını varsaymıştık.

3 Yalan! Eğer yalnızca $p = 1/2$ ise her ikisine birden eşit olabilir.

layalım. Ancak bunu yapabilmemiz için, x_n'yle x_{n+1} arasında cebirsel bir ilişki bulmalıyız, yoksa x_n üzerine bildiğimiz bir bilgiden x_{n+1} üzerine bir bilgi çıkaramayız.

Nasıl yukarda $x = (1 - p) + px^2$ eşitliğini bulmuşsak, tamamen aynı yöntemle,

$$x_{n+1} = (1-p) + px_n^2 \qquad (4)$$

eşitliği bulunur. Bir önceki sayfadaki şekil umarız her şeyi açıklıyordur. Artık işimiz iş... (4)'ü ve tümevarım varsayımı olan (3) eşitsizliğini kullanarak,

$$x_{n+1} \le \frac{1-p}{p}$$

eşitsizliğini kanıtlayabiliriz. Şöyle kanıtlarız:

$$x_{n+1} =^{(4)} (1-p) + px_n^2 \le^{(3)} (1-p) + p\left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

$$= (1-p) + \frac{(1-p)^2}{p} = \frac{1-p}{p}$$

(3) eşitsizliği her *n için* kanıtlanmıştır.

Şimdi doğru yanıtı bulabiliriz: Eğer $1/2 \le p$ ise,

$$x =^{(2)} \lim_{n\to\infty} x_n \le^{(3)} \frac{1-p}{p} \le^{(1)} 1.$$

Bu son eşitsizliklerden, eğer $1/2 \le p$ ise,

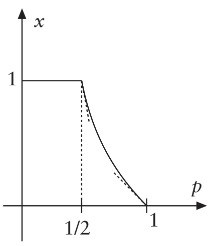
$$x = \frac{1-p}{p}$$

olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak,

$$x = \begin{cases} 1 & \text{eğer } 0 \le p \le 1/2 \text{ ise} \\ \dfrac{1-p}{p} & \text{eğer } 1/2 \le p \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

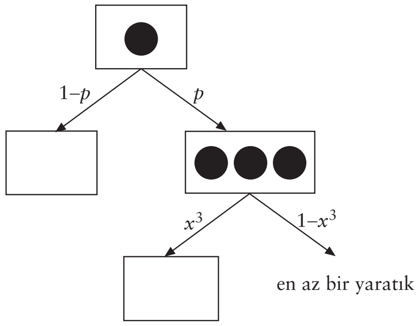
sonucunu bulduk. Yani yaratığın soyunu sonsuza değin sürdürebilme olasılığının 0 olmaması için, p, 1/2'den büyük olmalıdır.



x, p'ye bağlı bir fonskiyondur elbet. Bu fonksiyonun grafiği hemen solda. $0 \le p \le 1/2$ iken $x = 1$ oluyor, $p \ge 1/2$ iken $x = (1 - p)/p$ oluyor.

Yanıtı bulurken geçirdiğimiz süreçte küçük ama önemli bir ayrıntıya dikkatinizi çekmek isterim. Yazının en başında x diye bir olasılığın olduğunu varsaydık ve bu varsayımdan yola çıktık. Oysa böyle bir olasılık olmayabilirdi. Ama var! Ve var olduğunu bu yazıda kanıtladık da. Nitekim x, $(x_n)_n$ dizisinin limitidir ve bu dizinin limiti var, çünkü artan ve üstten sınırlı. Eğer $(x_n)_n$ dizisinin limiti olmasaydı x diye bir olasılık da olmazdı.

Yeni Problem. Bu kez yaratığımız p olasılıkla üçe bölünsün, $1 - p$ olasılıkla ölsün. Üçe bölünen bir yaratığın gerçekten olup olmaması beni hiç mi hiç ilgilendirmiyor. Bu yazılık siz de ilgilenmeyin bu dünyasal sorunla.



p olasılıkla üçe bölünen varsayımsal yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olması için p kaç olmalıdır? Yaratık bu kez iki yerine üçe bölündüğünden, yaratığın sonsuza dek soyunu sürdürebilme olasılığı daha yüksek olmalıdır.

Az önce çözdüğümüz problem gibi çözülür bu problem de. Ancak hesaplar biraz daha karmaşıktır.

Bu kez, $x = (1 - p) + px^2$ denklemi yerine,

$$x = (1 - p) + px^3$$

denklemini elde ederiz[4].

Eğer $p = 0$ ise, bir sorun yok: $x = 1$'dir. Bundan böyle p'nin 0 olmadığını varsayalım. O zaman yukardaki denklem, üçüncü dereceden bir denklemdir ve çözmesi ikinci dereceden denklemden biraz daha zordur. Ancak $x = 1$ bir çözüm olduğundan, $px^3 - x + (1 - p)$ polinomu $x - 1$ polinomuna bölünür. Bölme yapıldığında,

$$px^3 - x + (1 - p) = (x - 1)(px^2 + px - (1 - p))$$

elde edilir. Bundan da (1)'in bütün çözümleri bulunur:

$$x = 1,$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{4-3p}{p}}}{2},$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{\dfrac{4-3p}{p}}}{2}.$$

Üçüncü çözüm her p için negatif bir sayı verdiğinden problemimizin bir çözümü olarak kabul

4 x'in yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığı olduğunu okura anımsatırım.

edilemez. Ayrıca, $p < 1/3$ olduğunda, ikinci çözüm 1'den büyüktür ve dolayısıyla bu şıkta o çözüm de yasal bir çözüm değildir. Demek ki $p < 1/3$ olduğunda $x = 1$'dir. Ama $p \geq 1/3$ olduğunda, doğru yanıt birinci eşitlik de olabilir ikincisi de. Hangisi?

Bundan böyle $p \geq 1/3$ eşitsizliğini varsayalım. x_n ilk problemde tanımlanan olasılıklar olsun. x, x_n'lerin sonsuzda limitidir.

a, ikinci seçenek olsun. Yani

$$a = \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{4-3p}{p}}}{2}$$

olsun. $a \leq 1$ eşitsizliğini biliyoruz, bilmiyorsak da kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ayrıca

$$a^2 + a - (1-p)/p = 0$$

eşitliğini biliyoruz. Bunu ve

$$x_{n+1} = (1-p) + p x_n^3$$

eşitliği kullanılarak, tümevarımla $x_n \leq a$ eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanabilir. Kanıtı okura bırakıyorum. Buradan, $x = \lim_{n \to \infty} x_n \leq a \leq 1$ elde ederiz. Demek ki $p \geq 1/3$ ise, $x = 1$ olamaz, $x = a$'dır.

Bir Problem Daha. Şimdi yaratığın p_0 olasılıkla öldüğünü, p_1 olasılıkla ne öldüğünü ne de bölündüğünü, p_2 olasılıkla ikiye bölündüğünü ve p_3 olasılıkla üçe bölündüğünü varsayalım. Bu tuhaf yaratığın bu dört seçenekten başka seçeneği olmasın. Demek ki,

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

eşitliği geçerlidir. Yaratığın soyunun sonlu bir zaman sonra kuruma olasılığını (x'i) hesaplayın. Hesaplar biraz daha karmaşık olsa da yukardaki yöntem sonucu veriyor. Şu sonuç bulunması gerekiyor:

Eğer $p_3 \neq 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1 & \text{eğer } p_0 \geq 2p_3 + p_2 \text{ ise} \\ \dfrac{-p_2 - p_3 + \sqrt{(p_2+p_3)^2 + 4p_0p_3}}{2p_3} & \text{eğer } p_0 \leq 2p_3 + p_2 \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer $p_3 = 0$, $p_1 \neq 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1 & \text{eğer } p_0 \geq p_2 \text{ ise} \\ \dfrac{p_0}{p_1} & \text{eğer } p_0 < p_2 \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer $p_3 = p_2 = 0$ ise, çözümleri okura bırakıyoruz.

Bu konuda daha geniş bilgiyi [1, 2]'de bulabilirsiniz. Her açıdan daha ilginç olan erkek ve dişi gerektiren üremelerle ilgilenirseniz [3]'e bakın. ♣

KAYNAKÇA

[1] Ulam, S. M., *How to formulate mathematically problems of rate of evolution*, Mathematical Challenges to the Neo–Darwinian Interpretation of Evolution adlı yapıtın 25 ve 26. sayfaları, Wistar Institute Press, Philadelphia ABD, 1967.

[2] Feller, W., **Introduction to Probability Theory and Its Applications**, 1. cilt, 3. basım, John Wiley & Sons, Inc., New York ABD, 1968.

[3] Hull, David M., *How Many Mating Units Are Needed to Have a Positive Probability of Survival?*, Mathematics Magazine, 66. cilt, 1. sayı, Şubat 1993.