# En Basit Yazı-Tura Oyunları Üzerine

Ali Nesin* / *anesin@bilgi.edu.tr*

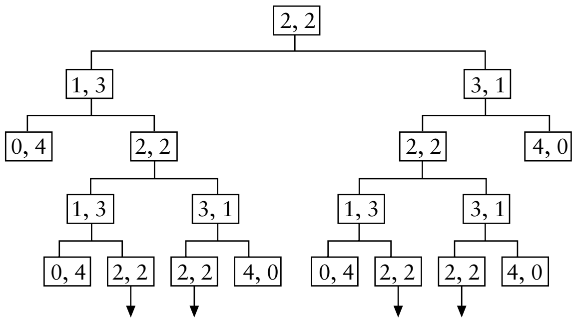
Bu yazıda kuramsal olarak sonsuz, ancak uygulamada sonlu olan, yani oynandığında her zaman (yüzde yüz olasılıkla) biten bir oyundan söz edeceğiz.

Oyunumuz iki kişi arasında oynanıyor. Yazı-tura atılıyor. Yazı gelirse birinci oyuncu ikinciden 1 lira alıyor, tura gelirse ikinci oyuncu birinciden 1 lira alıyor. Oyunculardan birinin parası bittiğinde oyun da bitiyor.

Eğer iki oyuncunun da oyuna başlarken ikişer lirası varsa ve sürekli bir yazı bir tura gelirse, oyun sonsuza dek sürer; çünkü bu yazı-tura atışlarıyla oyunculardan birinin parası bitmez.

Öte yandan bu oyunu ne zaman oynasanız oyun biter! Hatta oldukça çabuk biter, iki dakika bile sürmez. Neden? İki dakika boyunca bir yazı bir tura gelme olasılığı çok zayıftır da ondan. Bu yazıda, kuramsal olarak sonsuza dek sürebilen bu oyunun uygulamada sonsuza dek süremeyeceğini göstereceğiz, çünkü bu oyunun sonsuza dek sürebilme olasılığı öyle küçük, öyle küçüktür ki... sıfıra eşittir.

Oyunu daha iyi anlamak için oyunun "ağacını" bulalım. Oyun (2, 2) durumu ile başlıyor. Yani başlangıçta her iki oyuncunun da ikişer lirası var. Diyelim biz birinci oyuncuyuz ve yazı gelince kazanıyoruz. Ağacın tepesine (2, 2) yazalım. Para atıldı. İki olasılık var: Ya tura gelecek ve kaybedeceğiz ya da yazı gelecek ve kazanacağız. Kaybedersek oyunun yeni durumu (1, 3) olacak, yani bizim 1 liramız, öbür oyuncununsa 3 lirası olacak. Bu (1, 3) durumunu ağacın soluna yazalım. Kazanırsak (3, 1) durumuna erişeceğiz. Bunu da ağacın sağına yazalım. Ağaç sağlı sollu kök salar. Soluna kaybettiğimizde, sağınaysa kazandığımızda erişeceğimiz durumu yazarız. (3, 1)'den sonra gene iki durum ortaya çıkabilir: (2, 2) ve (4, 0) durumları. (2, 2)'yi sola, (4, 0)'ı sağa yazalım. (4, 0) durumunda oyun biter ve ağaç kök salmaz. (2, 2) durumundaysa oyun sürer.



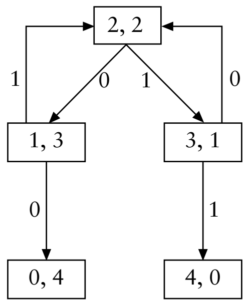

Oyun ancak (4, 0) ve (0, 4) durumlarından birine geldiğinde biter, öbür durumlarda sürer. Bu yüzden dördüncü aşamadaki (2, 2) durumlarında ağaç kök salmayı sürdürür.

Bu ağaç sonsuz bir ağaçtır. Köklerden bazıları bitse bile, köklerin kökü kurumaz. Ağaç sonsuzdur çünkü oyun sonsuzdur. Örneğin, (2, 2), (1, 3), (2, 2), (1, 3), ... diye durmadan sonsuza dek uzayıp giden bir kök vardır.

Oyunun sonsuz olduğunu göstermek için illa sonsuz bir ağaç yapmaya gerek yoktu. Sonlu bir şemayla da bu sonsuz oyunun gidişini gösterebiliriz. Bu şemayı çizelim. Oyunda beş durum var:

(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)

durumları. Bu beş durumu birer kare içine alalım. Bir durumdan öbür duruma nasıl geçildiğini bir okla gösterelim. Eğer bir durumdan öbür duruma kazanarak geçebiliyorsak, okun kenarına 1 koyalım. Kaybederek geçebiliyorsak 0 koyalım. Örneğin, (1, 3) durumundan (2, 2) durumuna kazanarak geçebildiğimizden, (1, 3) durumundan (2, 2) durumuna giden oka 1 adını veririz. Bu oyunun şeması yandadır.




(0, 4) ve (4, 0) durumlarında oyun bittiğinden, bu iki durumdan ok çıkmaz.

Bu şemaya bakarak oyunun sonsuz olduğunu nasıl anlarız? Eğer bir kısır döngü (yani fasit daire) varsa oyun sonsuz demektir. (2, 2) durumundan başlayarak ve okları izleyerek ya (4, 0) ya da (0, 4) durumlarına gelmek zorunda değilsek oyun bitmez. Örneğin (2, 2)'yle (1, 3)'e gidip gelen bir kısır döngü vardır. Bunun gibi (2, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 2), (1, 3), ... döngüsü de döner durur. Demek bu oyun sonsuz bir oyun.

* İstanbul Bilgi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi. Yazarın **Matematik ve Oyun** (Nesin Yayıncılık, www.nesinyayinevi.com) adlı kitabındaki iki yazıdan derlenmiştir.

İlk çizdiğimiz ağaca geri dönelim. Ağaca alıcı bir gözle baktığımızda oyunun birinci ve üçüncü yazı-tura atışlarından sonra bitmediği anlaşılıyor. Biraz düşününürsek, oyunun tek sayılı yazı-tura atışlarından sonra bitmeyeceğini görürüz (örneğin tümevarımla.) Oyun 2, 4, 6 gibi çift sayılı atışlardan sonra bitebilir ancak.

Oyunun ikinci yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım[1]. Ağacın ikinci kuşak köklerine bakalım. Dört dal var. Her birinin olasılığı 1/4'tür, çünkü ikinci kuşaktaki (0, 4), (2, 2), (2, 2) ve (4, 0) durumlarına ancak sırasıyla TT (tura tura), TY (tura yazı), YT, YY atıldığında erişebiliriz. Bu dört durumdan ikisinde oyun bitiyor, ikisinde bitmiyor. Dolayısıyla, ikinci yazı-tura atışında oyunun bitme olasılığı 1/4 + 1/4, yani 1/2'dir.

Şimdi oyunun en fazla dördüncü yazı-tura atışında bitme olasılığını bulalım. Ağaca bakarak, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında nasıl bitebileeğini buluruz:

TT, TYTT, TYYY, YTTT, YTYY, YY

atıldığında oyun biter. Bu 6 yazı-tura atışının (olayın) olasılıkları sırasıyla şöyle:

1/4, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, 1/4.

Dolayısıyla, oyunun en fazla dört yazı-tura atışında bitme olasılığı bu sayıların toplamıdır, yani 3/4'tür.

Oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplayalım. Yukardaki ağacı sürdürecek olursak, altıncı aşamada 4 tane (0, 4) ve 4 tane (4, 0) olduğunu görürüz. Oyunu sona erdirecek bu 8 kökten herbirine ulaşma olasılığı $1/2^6$, yani 1/64. Dolayısıyla oyunu bitiren bu 8 kök uçlarından birine ulaşma olasılığımız 8/64, yani 1/8. Bu olasılığı bir önceki paragrafta bulduğumuz 3/4 olasılığına ekleyecek olursak oyunun altı ve daha az yazı-tura atışında bitme olasılığını buluruz. Demek ki, oyunun en fazla altı yazı-tura atışında bitme olasılığı 3/4 + 1/8 = 7/8'dir.

İkinci, dördüncü ve altıncı yazı-tura atışlarından önce oyunun sona erme olasılıklarının sırasıyla

1/2, 3/4, 7/8

olduğunu bulduk. Okur, oyunun en fazla sekiz yazı-tura atışında bitme olasılığını hesaplarsa 15/16 bulacaktır.

Bu kadar eğlence yeter, artık gerçek matematik yapalım.

1 Paranın hileli olmadığını varsayıyoruz. Yani yazı gelme olasılığı 1/2, tura gelme olasılığı 1/2.

Bir oyuncuda $A$ lira, öbür oyuncuda $B$ lira olsun. Oyunun hangi aşamasında olursak olalım, üstüste $A + B$ kez yazı atıldığında, oyunculardan birinin parası biter, hatta daha önce de bitebilir. Demek ki, eğer 1 olasılıkla üstüste $A + B$ kez yazı atacağımızı kanıtlarsak, bütün yazı-tura oyunlarının 1 olasılıkla sonlu bir zamanda biteceğini kanıtlamış oluruz. Dolayısıyla şu teoremi kanıtlamalıyız:

**Teorem 1.** *$n > 0$ herhangi bir tamsayı olsun. Sonsuz kez yazı-tura atıldığında üstüste $n$ kez tura gelme olasılığı* 1'*dir*, *yani yüzde yüzdür*.

Bu teorem, tura gelince kazananın oyunu kazanacağı anlamına gelmez. Üstüste $A + B$ kez tura gelecektir (1 olasılıkla.) Orası kesin. Üstüste $A + B$ kez de yazı gelecektir. O da kesin. Ama hangi oyuncu daha önce kaybedecektir? Orası kesin değil. Şansa bağlı. İlerde bu şansın kaç olduğunu bulacağız.

**Teorem 1'in Kanıtı:** Ardarda $n$ kez yazı-tura atıldığında hep tura gelme olasılığı $1/2^n$ dir. Dolayısıyla $n$ yazı-tura atışının hepsinin birden tura olmama olasılığı $1 - 1/2^n$ dir. Bu sayıya $\alpha$ diyelim:

$$\alpha = 1 - 1/2^n.$$

$0 \leq \alpha < 1$ eşitsizlikleri birazdan önem kazanacak, aklımızın bir köşesinde tutalım.

Şimdi $2n$ kez yazı-tura atalım. $2n$ yazı-tura atışında $n$ kez üstüste tura gelme olasılığına $\beta_2$ diyelim. $\beta_2$ sayısını bulmak kolay olmayabilir, ama bu sayının $1 - \alpha^2$'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz. $2n$ atışta nasıl üstüste $n$ kez tura gelebilir? Çeşitli biçimlerde gelebilir. Örneğin ilk $n$ atış salt tura olabilir, ya da son $n$ atış salt tura olabilir. Ne birinci $n$ atışın, ne de ikinci $n$ atışın salt tura olmama olasılığı $\alpha^2$'dir. Demek ki ya birinci $n$ ya da ikinci $n$ atışta salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^2$'dir. Dolayısıyla $2n$ atışta $n$ kez üstüste tura gelme olasılığı en az $1 - \alpha^2$'dir. Yani,

$$1 - \alpha^2 \leq \beta_2 \leq 1$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Yukardaki akıl yürütmeyi $3n$, $4n$ ve genel olarak $kn$ atış için yapabiliriz. Şöyle yaparız: $k > 0$ bir doğal sayı olsun ve $kn$ kez yazı-tura atalım. $\beta_k$, $kn$ atışta üstüste en az $n$ kez tura gelme olasılığı olsun.

$$1 - \alpha^k \leq \beta_k \leq 1 \qquad (1)$$

eşitsizliklerini kanıtlamak istiyoruz. $\beta_k \leq 1$ eşitsizliği elbette doğru. Birinci eşitsizliğe bakalım. Ne ilk $n$ atışın, ne ikinci $n$ atışın, ... ne de $k$'inci $n$ atışın salt tura olma olasılığı $\alpha^k$'dir. Dolayısıyla bu $kn$ atıştan birinde (ya birinci, ya ikinci, ... ya $k$'inci $n$ atıştan birinde) salt tura gelme olasılığı $1 - \alpha^k$'dir. Demek ki $kn$ atışta üstüste $n$ kez tura gelme olasılığı $1 - \alpha^k$ sayısından fazladır. Yani

$$1 - \alpha^k \leq \beta_k$$

eşitsizliği geçerlidir. (1)'i kanıtladık.

$0 < \alpha < 1$ eşitsizliklerinden dolayı, $k$ sonsuza gittiğinde $\alpha^k$ sayısı 0'a yakınsar [MD-2007-III, sayfa 45, Teorem 1] ve $1 - \alpha^k$ sayısı 1'e yakınsar:

$$\lim_{k \to \infty} (1 - \alpha^k) = 1.$$

(1) eşitliğinde $k$'yi sonsuza götürürsek,

$$1 = \lim_{k \to \infty} (1 - \alpha^k) \leq \lim_{k \to \infty} \beta_k \leq 1$$

elde ederiz ki, bu da, $k$ sonsuza gittiğinde, $\beta_k$ sayılarının 1'e yakınsadığını gösterir. Demek ki atış sayımız yükseldikçe $n$ kez ardarda tura atma olasılığımız 1'e yakınsıyor. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □

Yukardaki kanıtta atılan paranın hilesiz olduğunu pek kullanmadık. Para hileli bile olsa, tura gelme olasılığı 0 değilse, her $n$ için, sonsuz yazı-tura atışında üstüste $n$ kez tura gelme olasılığı 1'dir. Bunun kanıtı da aynen yukardaki teoremin kanıtı gibidir.

### Yoksulun Şansı

Birazdan kanıtlayacağımız ilk teoremimizin sosyoekonomik yorumu şöyle:

**"Teorem."** *Adil bir dünyada çok yoksulun çok zengine karşı şansı yoktur. Eğer toplum düzeni biraz olsun yoksulu kayırıyorsa, o zaman yoksulun zengine karşı az da olsa şansı vardır.*

Adil bir dünyada çok yoksulla çok zengin aynı anda var olabilir mi sorusunu sormadan devam edelim.

Zenginin - tanımı gereği - çok parası var. Yoksulunsa az parası var. Zenginle yoksul yazı-tura oynayacaklar. Yazı gelirse yoksul zenginden 1 lira alacak. Tura gelirse yoksul zengine 1 lira verecek. Oyun, iki oyuncudan birinin parası bitene dek sürecek, daha önce sona eremez.

Bu kuralla oyun hiç bitmeyip sonsuza dek sürebilir ama oyunun sonsuza kadar sürme olasılığının 0 olduğunu biraz önce kanıtlamıştık. Bu yazıda yukardaki yazı-tura oyununu kimin kaç olasılıkla kazandığını bulacağız. Önce yazı-tura atılan paranın hilesiz olduğunu varsayacağız; daha sonra hileli parayla oynanan yazı-tura oyunlarını irdeleyeceğiz; yanıt daha şaşırtıcı olacak.

Örneğin birinci oyuncunun 1, ikinci oyuncunun 100 lirası varsa, büyük bir olasılıkla ikinci oyuncu oyunu kazanır. Birinci oyuncunun kazanma olasılığı azdır, ama 0 değildir. Doğru yanıt %1 değil ama ona yakın. Doğru yanıtı bulmak için bir başka örnek ele alalım. Diyelim birinci oyuncunun 2, ikinci oyuncunun 3 lirası var. Birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı kaçtır? 2/5 herhalde. Bir önceki örnekte, birinci oyuncunun kazanma olasılığı 1/101'dir, ikinci oyuncununkiyse 100/101'dir.

**Teorem 2.** *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununa birinci oyuncu $n$ lirayla, ikinci oyuncu $m$ lirayla başlarsa, birinci oyuncu oyunu $n/(n+m)$ olasılıkla kazanır.*

Teoremi bir an için kanıtlanmış varsayıp teoremin önemli bir sonucunu irdeleyelim. Teoreme göre, ikinci oyuncunun ne kadar çok parası varsa, birinci oyuncunun kazanma şansı o kadar azdır. Çünkü $n$ sabit kalır ve $m$ artarsa, $n/(n+m)$sayısı gittikçe küçülür. Zengin ne denli zenginse ya da yoksul ne denli yoksulsa, yoksulun kazanma olasılığı o denli azdır. Biraz abartalım ve zenginin sonsuz parası olduğunu varsayalım. O zaman, yoksulun oyunun sonlu bir anında beş parasız kalma olasılığı 1 olacak. Yani yoksul yüzde yüz kaybedecek. Oyuna kaç parayla başlarsa başlasın... Çünkü $m$ sonsuza gittiğinde $n/(n+m)$ sayısı sıfıra gider. Yoksul milyoner olarak oyuna başlasa bile, zenginin sonsuz parası varsa kesinlikle kaybeder. Dolayısıyla bu teoremden şu çıkar:

**Teorem 2'nin Bir Sonucu.** *Hilesiz parayla oynanan yazı-tura oyununda, birinci oyuncunun sonlu, ikinci oyuncunun sonsuz parası varsa, oyunu 1 olasılıkla (yani yüzde yüz) ikinci oyuncu kazanır.*

Şimdi Teorem 2'yi kanıtlayalım. $s = n + m$ olsun. Yani $s$, iki oyuncunun toplam parası olsun. Kanıt boyunca $s$'yi sabit tutacağız, ama $n$ ve $m$ değişecekler.

$p(n)$ sayısı, birinci oyuncunun $n$, ikinci oyuncunun $s - n$ lirası olduğunda, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı olsun.

Örneğin, $p(0) = 0$. Çünkü birinci oyuncunun hiç parası yoksa, zaten oyunu kaybetmiştir ve kazanma olasılığı yoktur.

Öte yandan, $p(s) = 1$. Çünkü, birinci oyuncunun s lirası varsa, ikinci oyuncunun hiç parası kalmamıştır ve oyunu birinci oyuncu kazanmıştır.

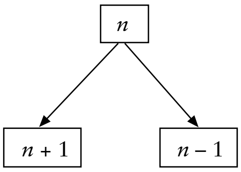
Teorem 2, $p(n)$ sayısının $n/s$ olduğunu söylüyor. Demek ki,

$$p(n) = n/s$$

eşitliğini kanıtlamalıyız.

$p(n)$ sayıları birbirinden bağımsız değillerdir. Aralarında bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi bulalım.

$0 < n < s$ olsun. Birinci oyuncunun $n$ lirası var. İlk yazı-tura atışında oyun iki yoldan birini alabilir: Birinci oyuncu ya kazanacaktır ya kaybedecektir. Kazanırsa $n + 1$ lirası olacaktır, kaybederse de $n - 1$ lirası.




Her iki durumun da olasılığı 1/2'dir. Demek ki $k$ lirayla oyuna başlayan birinci oyuncunun cebinde ilk oyundan sonra yarım olasılıkla $k - 1$ lirası, yarım olasılıkla da $k + 1$ lirası olacaktır. Bu son iki durumda birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı, sırasıyla, $p(k-1)$ ve $p(k+1)$'dir. Yani, $0 < k < s$ ise,

$$p(k) = \frac{p(k-1)}{2} + \frac{p(k+1)}{2}$$

dir. Bunu şöyle de yazabiliriz: $0 < k < s$ için,

$$p(k+1) = 2p(k) - p(k-1) \qquad (2)$$

Şimdi bir önsav kanıtlayalım:

**Önsav.** *Eğer* $0 < k \leq s$ *ise*, $p(k) = kp(1)$.

**Önsavın Kanıtı:** Önsavı $k$ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. Eğer $k = 1$ ise, sorun yok. Şimdi eşitliği $k = 2$ için kanıtlayalım. $p(2) = 2p(1)$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. (2) eşitliğinden,

$$p(2) = 2p(1) - p(0)$$

elde ederiz. Ama $p(0) = 0$ eşitliğini biliyoruz. Demek ki, $p(2) = 2p(1)$ ve bu durumda da önsavımız kanıtlanmıştır.

Şimdi $k \geq 3$ olsun. Önsavın $k - 1$ ve $k$ için doğru olduğunu varsayıp $k + 1$ için kanıtlayalım. Bu varsayımlardan ve (2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p(k+1) &= 2p(k) - p(k-1) \\ &= 2kp(1) - (k-1)p(1) = (k+1)p(1) \end{aligned}$$

çıkar. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Yukardaki önsavda $k = s$ alalım:

$$1 = p(s) = sp(1)$$

buluruz, yani $p(1) = 1/s$. Önsavı bir kez daha $k = n$ için uygularsak, bu eşitlikten $p(n) = np(1) = n/s$ çıkar. Teoremimiz kanıtlanmıştır. □ □

**Hileli Paranın Öyküsü**

Yazının süreğinde paranın hileli olduğunu varsayacağız. Yazı gelme olasılığına $y$ diyelim ve birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın. Tura gelme olasılığı da $t$ olsun. $y + t = 1$ eşitliği geçerli elbet. Toplam paraya gene $s$ diyeceğiz. $s$ gene sabit olacak. $p(n)$, birinci oyuncunun (yani yazı geldiğinde kazanan oyuncunun) $n$ lirası varken öbür oyuncunun bütün parasını ütme olasılığı olsun.

Eğer $y = 0$ ise, yani para hiç yazı gelmeyecekçesine hileliyse, oyunu ikinci oyuncu kazanır elbet.

Eğer $y = 1$ ise, oyunu birinci oyuncu kazanır.

Ayrıca $y = 1/2 = t$ şıkkını yukarda irdelemiştik.

Demek ki, bundan böyle $0 < y < 1$ ve $t \neq y$ eşitsizliklerini varsayabiliriz.

**Teorem 3.** *Yazı gelme olasılığının* $y$, *tura gelme olasılığının* $t$ *olduğunu varsayalım* ($t = 1 - y$). *Birinci oyuncu yazı geldiğinde kazansın ve oyuna* $n$ *lirayla başlasın. İkinci oyuncunun* $s - n$ *lirası olsun. Ve* $y \neq t$ *olsun. Birinci oyuncunun yazı-tura oyununu kazanma olasılığı*

$$\frac{y^s - y^{s-n}t^n}{y^s - t^s}$$

*dir.*

(2) formülünün bir benzerini bulalım önce. Aynen o kanıttaki gibi bir akıl yürütmeyle,

$$p(n) = tp(n-1) + yp(n+1)$$

eşitliğini buluruz. Bundan da

$$p(n+1) = \frac{p(n)}{y} - \frac{tp(n-1)}{y} \qquad (3)$$

çıkar. Aynen biraz önceki kanıttaki gibi yapacağız. $p(n)$ sayısını $p(1)$'i kullanarak bulacağız.

**Önsav.** *Eğer* $0 < n \leq s$ *ise*,

$$p(n) = \frac{y^n - t^n}{y^{n-1}(y-t)}\,p(1).$$

**Önsavın Kanıtı:** $n$ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $n = 1$ için bir sorun yok. $n = 2$ için kanıtlayalım. (3) eşitliğinde $n = 1$ alırsak ve $p(0) = 0$, $y + t = 1$ eşitliklerini kullanırsak, önsavın $n = 2$ için doğru olduğunu buluruz. Şimdi formülün $n$ ve $n - 1$ sayıları için doğru olduğunu varsayıp, formülü $n + 1$ için kanıtlamak gerekiyor. Ayrıntıları okura bırakıyoruz. (İpucu: (3) eşitliğini kullanın.) □

Artık Teorem 3'ü kanıtlayabiliriz. Yukardaki önsavda $n = s$ alırsak ve $p(s) = 1$ eşitliğini kullanırsak,

$$p(1)=\frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s-t^s}$$

buluruz. Bu eşitliği önsava uygulayarak,

$$p(n)=\frac{y^n-t^n}{y^{n-1}(y-t)}\,\frac{y^{s-1}(y-t)}{y^s-t^s}$$

buluruz. Sadeleştirerek,

$$p(n)=\frac{y^s-y^{s-n}t^n}{y^s-t^s} \tag{4}$$

eşitliğini buluruz. Teorem 3 kanıtlanmıştır. □ □

Birinci oyuncuda $n$ lira, ikinci oyuncuda sonsuz para varsa, birinci oyuncunun oyunu kazanma olasılığı nedir? Bu soruyu yanıtlayalım.

**Üçüncü Teoremin Şaşırtıcı Bir Sonucu.** *Yazı gelme olasılığı $y$ olsun. Birinci oyuncu yazı gelince kazansın ve oyunun başında $n$ lirası olsun. İkinci oyuncunun ise sonsuz parası olsun. Eğer $y \le t$ ise birinci oyuncu* 1 *olasılıkla* (*yani* %100 *olasılıkla*) *bütün parasını kaybedecektir. Eğer $y > t$ ise birinci oyuncu oyunu* $1-(t/y)^n$ *olasılıkla sonsuza kadar hiç kaybetmeden oynayabilecektir.*

**Kanıt:** Eğer $t = y$ ise yanıtı Teorem 2'den biliyoruz. Bundan böyle $t \ne y$ olsun. Teorem 3'e göre,

$$\lim_{s\to\infty}\frac{y^s-y^{s-n}t^n}{y^s-t^s}$$

limitini hesaplamalıyız. Eğer $y = 0$ ise limit elbette 0 bulunur. Bundan böyle $y > 0$ olsun. Eğer $t < y$ ise,

$$\frac{y^s-y^{s-n}t^n}{y^s-t^s}=\frac{1-(t/y)^n}{1-(t/y)^s}\to\frac{1-(t/y)^n}{1-0}=1-\left(\frac{t}{y}\right)^n$$

olur. Eğer $t > y$ ise,

$$\frac{y^s-y^{s-n}t^n}{y^s-t^s}=\frac{(y/t)^s-(y/t)^s(t/y)^n}{(y/t)^s-1}\to\frac{0-0(t/y)^n}{0-1}=0$$

olur. □

$n = 1$ için bu şu demektir: Eğer yazı gelme olasılığı tura gelme olasılığından daha fazlaysa, o zaman her an, o ana kadar gelen yazı sayısının tura sayısından daha az olmadığı sonsuz yazı-tura atışlarının olasılığı 0'dan büyüktür, tan tamına $1 - t/y$'dir.

Şöyle de ifade edebiliriz: Sonsuz kez yazı-tura atarak rasgele bir sonsuz 0-1 dizisi belirleyelim. Ama yazı gelme olasılığı tura gelme olasılığı daha büyük olsun. Diziye $(x_n)_n$ diyelim. Her $n$ için,

$$f(n) = |\{i < n : x_i = 0\}|$$

olsun. Dizinin,

$$\text{her } n \text{ için } f(n)/n \ge 1/2$$

özelliğini sağlama olasılığı 0'dan büyüktür. ♠