MALFATTİ ÇEMBERLERİ

CEM TEZER

Konumuzu teşkil eden çemberleri bugün adıyla anmakta olduğumuz Gianfrancesco Malfatti (1737-1807) Ferrara Üniversite'sinde (Kuzey İtalya) fizik profesörü olarak çalışırken 1803 yılında yazdığı ([6]) bir makalede şu ilginç problemi ortaya atmış:

"Herhangi bir maddeden, mesela, mermerden yapılmış bir üçgen dik prizmadan en az malzeme ziyan olacak şekilde üç dairesel dik silindir nasıl çıkarılır?"

Tabii ki bu üç boyutlu sunuş aslında gereksiz. Prizma yerine, onun eksenine dik bir düzlem üzerine dik izdüşümü olan üçgen, silindir yerine de gene aynı şekilde elde edilmiş bir çember alınabilir. O zaman problem, verilen bir üçgen içine alanları toplamı en büyük olacak şekilde birbirinin "üzerine çıkmayan" üç çemberin nasıl yerleştirileceği problemidir.

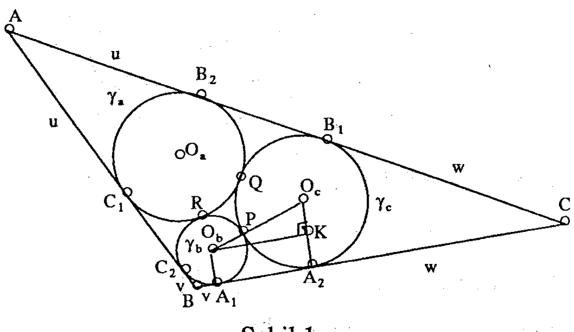
Bu eski ve elde edilmesi güç makaleyi ben de görmediğim için, Malfatti'nin bu problem üzerindeki çalışmaları hakkında fazla bir şey söyleyemeyeceğim. Kaynağı görenlerin, okuyanların (mesela [3], [5], [1], [2] gibi) yalancısı olduğumu belirterek bu hususta bildiğim birkaç şeyi nakledeyim: Malfatti, sözkonusu problemi yukarda işaret ettiğimiz gibi bir düzlem geometri problemi haline getirdikten sonra, çözümün *aşikar olarak*, (Şekil 1 de γ_a, γ_b, γ_c ile gösterilen) herbiri diğer ikisine dıştan, gene herbiri üçgenin ilgili iki kenarına içten teğet çemberlerden ibaret olduğunu belirtiyor. Malfatti, bu çemberlerin, üçgenin içinde nasıl bir konuma sahip olduklarını anlamak maksadıyla bazı hesaplar da yaparak, sonuçta işte bugün Malfatti çemberleri olarak andığımız, bu yazıda bir yüzyılı geçen maceralarından birkaç safhayı nakledeceğimiz çemberleri matematik dünyasına kazandırıyor.

Az evvel söylediğim gibi Malfatti'nin hesaplarını bilmiyorum. Buna karşılık çağdaş kaynaklarda az tanınmış bir matematikçi ([2], [5]) olan Schellbach'a izafe edilen bazı ilginç hesapları okuyucuya aktarmak istiyorum. Bu hesapların dikkate değer tarafı, küçük bir gözlemle Malfatti çemberlerinin pergel ve cetvelle çizilebilir olduğunu ispat edebilmeleridir.

Her zamanki gibi bir ABC üçgenine bağlı olarak, $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ ve $2s = a + b + c$ yazalım. ABC nin içteğet çember yarıçapı r olsun. Malfatti dokusuna ait birkaç gösterimi de Şekil 1 yardımıyla sunalım: γ_a, γ_b, γ_c çemberlerinin yarıçapları sırasıyla ρ_a, ρ_b, ρ_c, BC, CA, AB ye teğet oldukları noktalar da A_1 ve A_2, B_1 ve B_2, C_1 ve C_2 olsun. Ayrıca (bu hesaplarda değil ama sonradan kullanılmak üzere) γ_b ve γ_c, γ_c ve γ_a, γ_a ve γ_b nin birbirlerine sırasıyla P, Q, R noktalarında değdiklerini farz edelim. Nihayet

$$|AB_2| = |AC_1| = u, \ |BC_2| \doteq |BA_1| = v$$
$$|CA_2| = |CB_1| = w$$

yazalım. Malfatti çemberlerinin üçgen içindeki konumunu bilmek için u, v, w miktarlarını a,b,c cinsinden hesaplamak tabii ki yeterlidir.



Şekil 1.

O den $O_c A_2$ ye indirilen dikmenin ayağına K dersek, $O_c O_b K$ dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$$|A_1A_2|^2 = |O_bO_c|^2 - |O_cK|^2$$
$$= (\rho_b + \rho_c)^2 - (\rho_c - \rho_b)^2$$
$$= 4\rho_b \rho_c$$

yani

$$|A_1 A_2| = 2\sqrt{\rho_b \rho_c}$$

bulunur. Diğer taraftan

$\rho_b : v = r : s - b$

$\rho_c : w = r : s - c$

olduğundan

$$|A_1 A_2| = 2\sqrt{\rho_b \rho_c}$$
$$= r\frac{\sqrt{vw}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}$$

ve (ABC nin alanını Δ ile gösterirsek)

$$sr = \Delta = \Delta\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

den

$$|A_1A_2| = 2\sqrt{\frac{s-a}{s}}\sqrt{vw}$$

bulunur. $|AB_1| + |A_1A_2| + |A_2C| = a$ olduğundan

$$v + w + 2\sqrt{\frac{s-a}{s}} = a \qquad (1)$$

benzer şekilde de

$$w + u + 2\sqrt{\frac{s-a}{s}} = b \qquad (2)$$

$$u + v + 2\sqrt{\frac{s-a}{s}} = c \qquad (3)$$

elde edilir. Buraya kadar herkesin yapabileceği bir hesabı yürüttük. Şimdi zarif nokta :

$$\sin\xi = \sqrt{\frac{u}{s}} \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{a}{s}}$$

$$\sin\eta = \sqrt{\frac{v}{s}} \qquad \sin\beta = \sqrt{\frac{b}{s}}$$

$$\sin\zeta = \sqrt{\frac{w}{s}} \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{c}{s}}$$

şeklinde $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta$ açı-miktarlarını ithal edersek (1), (2), (3) denklemleri

$$\sin^2\eta+\sin^2\zeta+2\sin\eta\,\sin\zeta\,\cos\alpha = \sin^2\alpha \qquad (4)$$

$$\sin^2\zeta+\sin^2\xi+2\sin\zeta\,\sin\xi\,\cos\beta = \sin^2\beta \qquad (5)$$

$$\sin^2\xi+\sin^2\eta+2\sin\xi\,\sin\eta\,\cos\gamma = \sin^2\gamma \qquad (6)$$

şeklini alır. Üçgende kosinüs teoremi hatırlanırsa bu denklemlerin sağlanması için yeter şart olarak

$$\eta + \xi = \alpha \qquad (7)$$

$$\zeta + \xi = \beta \qquad (8)$$

$$\xi + \eta = \gamma \qquad (9)$$

alınabilir. Demek ki $2\sigma = \alpha + \beta + \gamma$ olmak üzere (7), (8), (9) denklemlerinden

$\xi = \sigma - \alpha$

$\eta = \sigma - \beta$

$\zeta = \sigma - \gamma$

yazarsak,

$u = s\sin^2\xi$

$v = s\sin^2\eta$

$w = s\sin^2\zeta$

çıkar. Bilinen a, b, c uzunluklarından s, α, β, γ, bunlardan da ξ, η, ξ ve en nihayet u, v, w miktarları açık bir şekilde pergel ve cetvelle elde edilebilir. Demek ki Malfatti çemberleri pergel ve cetvelle çizilebilmektedir.

Bu bilgi önemli olmakla birlikte geometriseveri tatmin etmeyecektir. Malfatti'nin makalesinin hemen ardından, matematikçiler hesaba değil, doğrudan geometriye bağlı bir çizimi heyecanla aramış. Herkesi tatmin eden teorem J. Steiner'e ait:

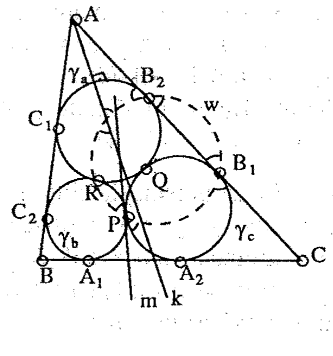
Teorem: ([7], 1826) ABC üçgeninin içteğet çemberinin merkezi I, CIA, AIB üçgenlerinin içteğet çemberleri Γ_b, Γ_c olsun. Γ_b, Γ_c nin AI doğrusu olmayan iç ortak teğeti aynı zamanda γ_b,

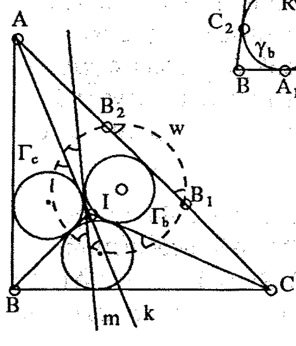
γ_c Malfatti çemberlerinin de ortak teğetidir. (Şekil 2a, b).

Bu teoremin geometri meraklısında yarattığı, eşit miktarlarda, şaşkınlık, hayranlık, vecd ve isyan hislerinin karışımı ruh hali, Steiner'in bir çok başka eserinden de edinilebilir. Bu teoremi daha da dikkate değer hale getiren husus, Steiner'in onu (herhalde çağdaşı geometricileri çileden çıkartmak için) ispatını vermeden yayınlamış olması. Yıllarca birçok matematikçi bu teoremi ispat etmeye çalışmış. J.L. Coolidge'e [1] göre ilk ispat Hart adında az tanınmış bir İngiliz geometrici tarafından verilmiş. Bu ispat, matematik dünyasında, Hart'ın Steiner'ın zamanında bilinmeyen bir teknik (yani evirtim) kullandığı gerekçesiyle pek "hüsn-i kabul" görmemiş. J.L. Coolidge bu durumdan, bugün pek yakışık veremediğimiz bir "gayret-i milliyet" ile (herhalde biraz daha Birinci Dünya Savaşı'ndan hemen önceki yılların gerginliği içinde) "Eğer Hart, Steiner'ın milletinden olsaydı, işler başka türlü olurdu!" diye yakınır. Her neyse... Okuyucu Steiner'ın meçhul ispatının matematikçilere ne kadar dert olduğunu iyice anlamıştır herhalde. Ben Hart'ın Coolidge tarafından nakledilen ispatını, yazıyı yetiştirmek telaşından pek okuyamadım. Yıllarca evvel eski ve şimdi tam hatırlayamadığım bir geometri kitabında okuyup, anlayamayıp, sonra kendimce birkaç ilave ile elde ettiğim, evirtime dayalı bir ispatı sunmak istiyorum. Steiner'ın böyle düşündüğü yolunda bir iddiam da hiç yok!

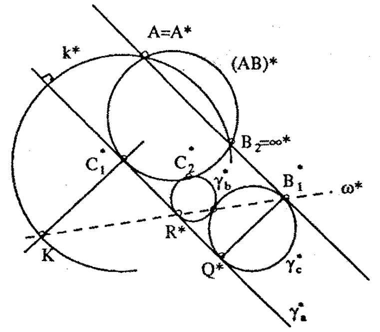
İspat: (Şekil 2a, 2b, 2c)

Şekil 2a.





Şekil 2b.



Şekil 2c.

Önce B_1, B_2, P, R noktalarının çemberdeş olduklarını hatırlatalım. (Mesela, Problem 1, [8]). Bu noktaların üzerinde kaldığı çember ω olsun, B_2 noktası merkez olmak üzere bir evirtim gözönüne alalım. Herhangi bir geometrik şey X in bu evirtim altındaki görüntüsünü X* ile gösterelim; A açısının içaçıortayını k ile, γ_b, γ_c nin ortak teğetini m ile gösterelim. İspatımızın ağırlık noktası k ile ω arasındaki açının, AC ile ω arasındaki açıya eşit olduğunu göstermek (Şekil 2a). Bunu yapabilirsek, AC ile ω arasındaki açı m ile ω arasındaki açıya eşit olduğundan (bütün bu münakaşayı bir de C açısının açıortayı için tekrarlayarak!) CI, AI = k, m ve AC doğrularının ω çemberinin merkezine eşuzaklıklı olduklarını, bu suretle de ω ve Γ_b nin eşmerkezli olduklarını ve en nihayet hem k, hem de m nin Γ_b ye teğet olduklarını göreceğiz (Şekil 2b). Aynı münakaşayı bir de ABI için tekrarlayarak m nin Γ_b ye de teğet olduğu görülebilir; ispat biter.

Böylece yapmamız gereken tek şey olarak k ile ω arasındaki açının ω ile AC arasındaki açıya eşitliğini göstermek kalıyor. Evrik şekle geçelim (Şekil 2c): AB doğrusunun evriği olan (AB)* çemberinin yarıçapı r_1, sırasıyla γ_b*, γ_c* çemberlerinin yarıçapları da r_2, r_3 olsun. Küçük bir hesapla

$$|C_1^* A| = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$|Q^* R^*| = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

$$|R^* C_1^*| = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

bulunur. ω* in C_1* dan γ_a* a çizilen dikmeyi kestiği nokta K olsun. K C_1*R* ve B_1*Q*R* dik üçgenlerinin benzerliğinden

$|KC_1^*| : |R^*C_1^*| = |B_1^* Q^*| : |Q^*R^*|$

olup, buradan

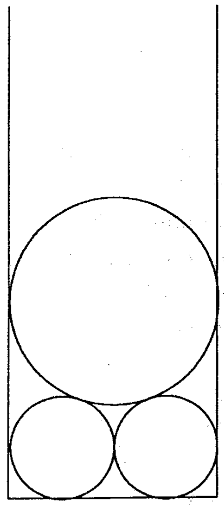
$$|KC_1^*| = \frac{|B_1^* Q^*|\ |R^* C_1^*|}{|Q^* R^*|} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

bulunur. Demek ki

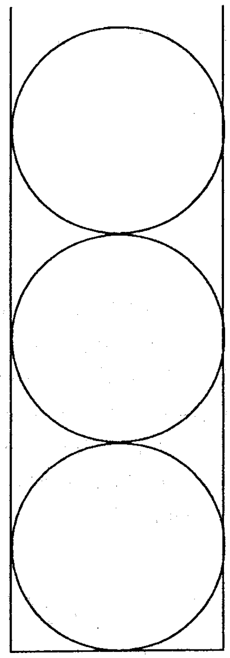
$|KC_1^*| = |C_1^*A|$

dır. O zaman C_1^* merkezli $|C_1^*K|$ yarıçaplı çember A dan geçmelidir. Bu çember γ_a^* a dik olacağından ancak k^*, yani A açısının içaçıortayı k doğrusunun evriği olabilir. K dan k^* a çizilen teğet γ_a^* a, dolayısıyla AB_1^* a paralel olduğundan, ω^* la k^* arasındaki açıya eşittir. Sonuç olarak ω ile k arasındaki açı da $AB_1 = AC$ ile ω arasındaki açıya eşit olmalıdır.

Yazımızı, Malfatti çemberlerinin meydana getirdiği harikulade dokuyla daha yeni tanışmış okuyucumuzu biraz üzerek bitirelim. Ne yazık ki Malfatti çemberleri, asıl Malfatti probleminin çözümü değildir. Hatırlıyalım: Malfatti problemi bir üçgenin içine birbirinin üzerine çıkmadan yerleşip, mümkün olan en geniş alan kaplayan üç çember istiyor. G. Malfatti bu işin "aşikar olarak" Malfatti çemberleri tarafından yapıldığını söyleyip bırakmış. Bir ispat yok! Böyle bir ispatın olmadığının ilk farkına varanlar H.Lob ve H.W. Richmond [5]. Nedense bu işe uzun ve ayrıntılı makalelerinin en son cümlesinde, o da pek mütereddit bir ifadeyle, temas ediyorlar. Halbuki durum gerçekten şaşırtıcı: Malfatti çemberlerinin asıl Malfatti problemine *hiçbir zaman* çözüm teşkil etmediği 1967 de M. Goldberg tarafından gösterilmiştir. Okuyucu için en güzel örnek tepesi "sonsuzda" yani taban açıları 90 ar derece olan bir ikizkenar üçgende Malfatti çemberlerinin toplam alanıyla (Şekil 3a) Şekil 3b deki çemberlerin toplam alanını karşılaştırmak olacaktır.



Şekil 3a



Şekil 3b

Kaynaklar:

[1] J.L. Coolidge: "A Treatise on the Circle and the Sphere" Chelsea Publishing Company, New York 1971. (İlk basım: Oxford, 1916)

[2] H. Dörrie: "100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution" Almanca'dan çeviren D. Antin, Dover Publications, New York 1965.

[3] H. Eves: "A Survey of Geometry" Allyn and Bacon, Boston 1963.

[4] M. Goldberg: "The original Malfatti Problem" Mathematics Magazine, 40 (1967) 241-247.

[5] H.Lob, H.W. Richmond: "On the solutions of Malfatti's problem for a triangle" Proceedings of the London Mathematical Society 30 (1930) 287-304.

[6] G. Malfatti: "Memoria sopra un problema sterotomica" Memorie di Matematica e di Fisica della Societá Italiana delle Szienze 10 (1803) 235 - 244.

[7] J. Steiner: "Einige geometrische Betrachtungen" Crelle's Journal 1 (1826) 161-184, 252-258.

Ben bu yazıyı Steiner'ın bütün eserlerinin toplandığı bir kitapta okudum: "Gesammelte Werke" Cilt I, Sayfa 19-76, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York 1971, (İlk basım: Berlin 1881).

[8] C.Tezer: "Evirtim" Matematik Dünyası, Cilt 2 Sayı 1, Sayfa 12-16.