

# POLİNOMLAR HAKKINDA

İSMAİL GÜLOĞLU\*

1993 Uluslararası Matematik Olimpiyatları'na hazırlanan Türk ekibi çalışmalarını 25 Ocak - 4 Şubat tarihleri arasında Antalya'da sürdürdü. Orda gözden geçirilen problemlerden bir demek de size sunmak istiyorum.

1.  $F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  polinomu katsayıları tamsayı olan bir polinom olsun ve

$$F(a) = F(b) = F(c) = F(d) = 5$$

olacak şekilde 4 tane farklı  $a, b, c, d$  tamsayıları bulunsun.  $F(k) = 8$  olacak şekilde bir  $k$  tamsayısının bulunmadığını gösteriniz.

Önce  $F(x)$  polinomu yerine  $G(x) = F(x) - 5$  polinomunu alarak problemi, "tam sayılı  $G(x)$  polinomu farklı tamsayı köke sahip ise hiç bir  $k$  tam sayısı için  $G(k) = 3$  olamayacağını" göstermek problemine dönüştürelim.

$G(x) = 0$  olduğunda  $G(x)$  polinomu  $x - a$  polinomuna bölünür, benzer şekilde  $x - b, x - c, x - d$  polinomlarına da bölünür. Bunlar ikiye ikiye aralarında asal oldukları için  $G(x)$  polinomu bunların çarpımına da bölünür. Yani  $H(x)$  tam kat sayılı bir polinom olmak üzere

$$G(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)H(x)$$

dir. Buna göre her  $k$  tam sayısı için  $G(k)$  bir tam sayı ve

$$G(k) = (k - a)(k - b)(k - c)(k - d)H(k)$$

$G(k)$  sayısının  $Z$  içinde bir çarpanlara ayrılışıdır. Üstelik  $(k - a), (k - b), (k - c), (k - d)$  ikiye ikiye farklı tam sayılardır. Burdan hemen  $G(k)$  değerinin hiç bir  $k$  tam sayısı için asal sayı olmayacağı görülür.

2)  $F(x)$  tam kat sayılı bir polinom olsun.  $F(1), F(2), \dots, F(k)$  tam sayılarının hiç biri  $k$  ya bölünmeyecek şekilde bir  $k$  doğal sayısı varsa  $F(x)$  polinomunun  $Z$  tam sayılar halkasından hiç bir kökü yoktur.

Bunun için şunu gözlemlemek yeter:  $a, b, k \in Z$  ve  $a \equiv b \pmod{k}$  ve tam kat sayılı  $F(x)$  polinomu için  $F(a) \equiv F(b) \pmod{k}$  dır.

Diğer taraftan her  $a$  tam sayısı  $k$  modülüne göre  $\{1, 2, \dots, k\}$  kümesinin bir elemanına denk olduğu için  $F(a) = 0$  olacak şekilde bir  $a \in Z$  varsa  $k/F(i)$  olacak şekilde uygun bir  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  sayısı vardır.

3)  $n > 1$  olmak üzere  $f(x) = (x + 1)^n - x^n - 1$  polinomunun çok katlı bir kökü olması için gerek ve yeter şart  $n - 1$  sayısının 6 ya bölünmesidir.

$c$  sayısının  $f(x)$  polinomunun çok katlı bir kökü olması demek  $m \geq 2$  olmak üzere

$$f(x) = (x - c)^m h(x)$$

olacak şekilde bir  $h(x)$  polinomunun bulunması demektir. Eğer  $h(c) \neq 0$  ise  $m$  sayısına  $c$  kökünün katlılığı denir.

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  polinomuna karşılık  $a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 2x + a_1$  şeklinde tanımlanan polinoma  $f(x)$  in türevi denir ve  $f'(x)$  ile gösterilir.  $f(x), g(x)$  polinomlar ve  $c$  bir sabit olmak üzere

$$\begin{aligned} [cf(x) + g(x)]' &= c \cdot f'(x) + g'(x) \text{ ve} \\ [f(x) \cdot g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Özel olarak  $m \geq c$  için

$$\begin{aligned} [(x - c)^m h(x)]' &= m(x - c)^{m-1} \cdot h(x) + (x - c)^m h'(x) \\ &= (x - c)^{m-1} [m h(x) + (x - c) h'(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Yani  $c$  sayısı  $f(x)$  polinomunun çok katlı bir kökü ise  $f'(x)$  polinomunun da bir köküdür.

Bu gözleme dayanarak bizim problemimizde  $c$  kompleks sayısı  $f(x) = (x + 1)^n - x^n - 1$  in çok katlı bir kökü ise

$$(c + 1)^n - c^n - 1 = 0$$

ve

$$n(c + 1)^{n-1} - nc^{n-1} = 0$$

\* ODTÜ Matematik Bölümü Öğretim Üyesi

## GÜLOĞLU

olmalıdır. Buradan  $(c+1)^{n-1} = c^{n-1}$  ve dolayısı ile  $c^{n-1}(c+1) = c^n + 1$  den

$$(c+1)^{n-1} = c^{n-1} = 1$$

bulunur. Buna göre  $c$  ve  $c+1$  kompleks sayıları birim çemberin içine çizilen bir köşesi 1 sayısı olan düzgün  $(n-1)$ -genin iki köşesidirler.

Diğer taraftan köşeleri  $c, c+1$  ve 0 sayıları ile verilen üçgen eşkenar olduğundan uygun bir  $k \in \mathbb{N}$  için

$$\frac{2\pi}{G} = k \cdot \frac{2\pi}{n-1}$$

yani  $n-1 = G \cdot k$  olmalıdır.

Tersine  $G/n-1$  ise  $(x+1)^n - x^n - 1$  polinomunun çok katlı bir kökü olduğunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz.

4)  $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  tam katsayılı bir polinom ve  $n \geq 1$  olsun. Herhangi bir  $k$  pozitif tam sayısı verildiğinde  $f(m)$  tamsayısının en az  $k$  tane farklı asal böleni olacak şekilde bir  $m$  tamsayısı var mıdır?

$K = \{p \mid p \text{ asal}, p \mid f(m), m \in \mathbb{Z}\}$  kümesi sonlu ise problemin cevabı elbette "hayır" olmak zorundadır. Önce bunu anlamaya çalışalım.  $K$  kümesi sonlu olsun,  $K = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  farzedelim. Bu durumda  $a_n \neq 0$  olduğu hemen görülür.

$$f(a_n y) = a_n [a_n^{n-1} y^n + a_1 a_n^{n-2} y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + 1]$$

olduğu için  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$  in katı olan her  $y$  tam sayısı için  $f(a_n y)/a_n$  tam sayısının asal bölenerinin hiç biri  $K$  kümesine ait olamayacağı için bu şekildeki her  $y$  için  $f(a_n y)/a_n = 1$  yani

$$a_n^{n-1} y^n + \dots + a_{n-1} y = 0$$

olmalıdır. Fakat  $n \geq 0$  için  $n$  inci dereceden bir polinomun en fazla  $n$  tane farklı kökü olabilir.  $n \geq 1$  olduğuna göre  $K$  nın sonlu olduğunu kabul etmek bir çelişkiye neden olmaktadır. Şu halde  $K$  sonsuzdur.

Buna göre verilen herhangi bir  $k$  pozitif tam sayısı için öyle  $m_1, m_2, \dots, m_k$  tamsayıları ve  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ikiye ikiye farklı asal sayılar vardır ki her  $i = 1, 2, \dots, k$  için

$$p_i \mid f(m_i)$$

olsun. Çinli Kalan Teoremi'ne göre (Matematik Dünyası, Cilt 3, Sayı 1)

$$m \equiv m_i \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

olacak şekilde bir  $m$  tamsayısı vardır. Diğer taraftan bu kongrüans bağıntıları

$$f(m) \equiv f(m_i) \equiv 0 \pmod{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

ve dolayısı ile

$$p_1 p_2 \dots p_k \mid f(m)$$

olduğunu gösterir. Yani sorumuzun cevabı "evet" dir. (1989 Olimpiyatları'na önerilen sorulardan biri).  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ikiye ikiye farklı tamsayılar ve  $n \geq 3$  olsun.  $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 2$  polinomu  $\mathbb{Z}$  üzerinde çarpanlara ayrılabilir ise yani

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

olacak şekilde, dereceleri en az 1 olan  $g(x)$  ve  $h(x)$  tam katsayılı polinomlar bulunabilirse  $n = 3$  dür.

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$  ise  $f(a_i) = -2$  den her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $-2 = g(a_i)h(a_i)$ , yani  $(g(a_i), h(a_i)) \in \{(1, -2), (-1, 2), (2, -1), (-2, 1)\}$  elde ederiz. Buna göre  $g(a_i) + h(a_i)$  her  $i = 1, 2, \dots, n$  için ya 1 ya da -1 dir.  $\{i \mid g(a_i) + h(a_i) = 1\}$  kümesinin tam  $k$  tane olsun. Bu durumda  $\{i \mid g(a_i) + h(a_i) = -1\}$  kümesinde tam  $n - k$  tane eleman vardır. Genelliği bozmadan, gerekirse  $a_i$  leri yeniden uygun şekilde indeksleyerek

$$g(a_1) + h(a_1) = g(a_2) + h(a_2) = \dots = g(a_k) + h(a_k) = 1$$

farzedelim.

Önce  $k \geq \frac{n}{2}$  durumunu inceleyelim:

$$g(x) + h(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)u(x)$$

olacak şekilde tam katsayılı bir  $u(x)$  polinomu vardır.  $g(x) + h(x) - 1$  polinomunun derecesi,  $g$  ve  $h$  polinomlarının derecelerinin büyüğünden daha büyük olmadığı için,  $n$  den küçüktür. Dolayısı ile  $k < n$  dir.  $i \leq k + 1$  için  $g(a_i) + h(a_i) = -1$  olduğu için her  $i \geq k + 1$  için

$$(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_k)u(a_i) = -2 \quad (*)$$

dir. Problem 1'de uyguladığımız düşünce ile bu denklemlerden önce  $k \leq 3$  olduğunu görürüz.  $k = 3$  ise yukarıdaki denklemden

$$\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq \{a_i - 2, a_i - 1, a_i + 1, a_i + 2\} \quad (**)$$

bulunur.  $n > 4$  ise  $(**)$  da  $i = 4$  olup  $a_5$  e bakarsak,  $|a_5 - a_j| \geq 3$  olacak şekilde bir  $j \in \{1, 2, 3\}$  bulunması gerektiği görülür ki,  $(*)$  denklemi ile çelişir.  $n = 4$  ise  $g(x)$  veya  $h(x)$

polinomlardan birinin derecesi 1 olmak zorundadır yani  $f(x)$  polinomunun tamsayı olan  $z$  gibi bir kökü bulunmalıdır. Fakat bu

$$(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4) = 2$$

verir ki mümkün değildir. Şu halde  $k = 2$  ve dolayısı ile  $n \leq 2k = 4$  olmalıdır.  $n = 4$  olsun. Yukarıdaki düşünce ile  $g(x)$  ve  $h(x)$  in her birinin derecesi 2 den küçük olamayacağı için tam 2 olmalı ve dolayısı ile

$$g(x) + h(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2)u(x)$$

de  $u(x)$  sabit olmalıdır ve dolayısı ile sol tarafın baş katsayısına eşit olmalı.  $g(x)$  ve  $h(x)$  in baş katsayıları 1 olduğu için  $u(x) \equiv 2$  bulunur. Buna göre

$$(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = -1 = 9a_4 - a_1)(a_4 - a_2)$$

yani

$$\{a_3 - 1, a_3 + 1\} = \{a_1, a_2\} = \{a_4 - 1, a_4 + 1\}$$

elde edilir ki  $a_3 = a_4$  çelişkisini verir. Şu halde  $u = 3$  olur.

Benzer şekilde  $k < \frac{n}{2}$  durumunda,  $g(x) + h(x) - 1$  polinomu yerine  $g(x) + h(x) + 1$  polinomu alarak  $n = 3$  olduğunu göstermeyi okuyucuya bırakıyoruz.

Geçen sayımızda Veliev'in makalesinde söz edilen polinomun kökleri ve katsayıları arasındaki münasebetler konusunda bir takım problem ile bu yazıya son verelim:

I.  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + x^2 + x + 1$  reel katsayılı polinomun bütün köklerinin ( $C$  içinde) reel olamayacağını gösterin.

II.  $a_i \in \{-1, 1\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  katsayılı ve köklerinin hepsi reel olan  $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  polinomlarının tümünü bulun.

III.  $a, b, c$  reel sayıları  $a + b + c = 0$  koşulunu sağlarsa

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

olduğunu gösterin.

## DÜZELTME

Yarıçapları  $r_1, r_2, r_3$  olan  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  çemberleri, sayısında hatalı olarak yayınlanmıştır. Aşağıda düzeltilmiş şeklini sunar, özür dileriz...

Y54. Yarıçapları  $r_1, r_2, r_3$  olan  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  çemberleri,

$$\gamma_2 \cap \gamma_3 = \{O, A_1\}$$

$$\gamma_3 \cap \gamma_1 = \{O, A_2\}$$

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{O, A_3\}$$

olacak ve  $O$  noktası  $A_1 A_2 A_3$  üçgeninin içinde kalacak şekilde kesiştikleri takdirde

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leq \frac{1}{|OA_1|} + \frac{1}{|OA_2|} + \frac{1}{|OA_3|}$$

olduğunu ve eşitliğin ancak  $A_1 A_2 A_3$  üçgeninin eşkenar ve

$$r_1 = r_2 = r_3$$

olması halinde mümkün olduğunu gösteriniz. (Cem TEZER)